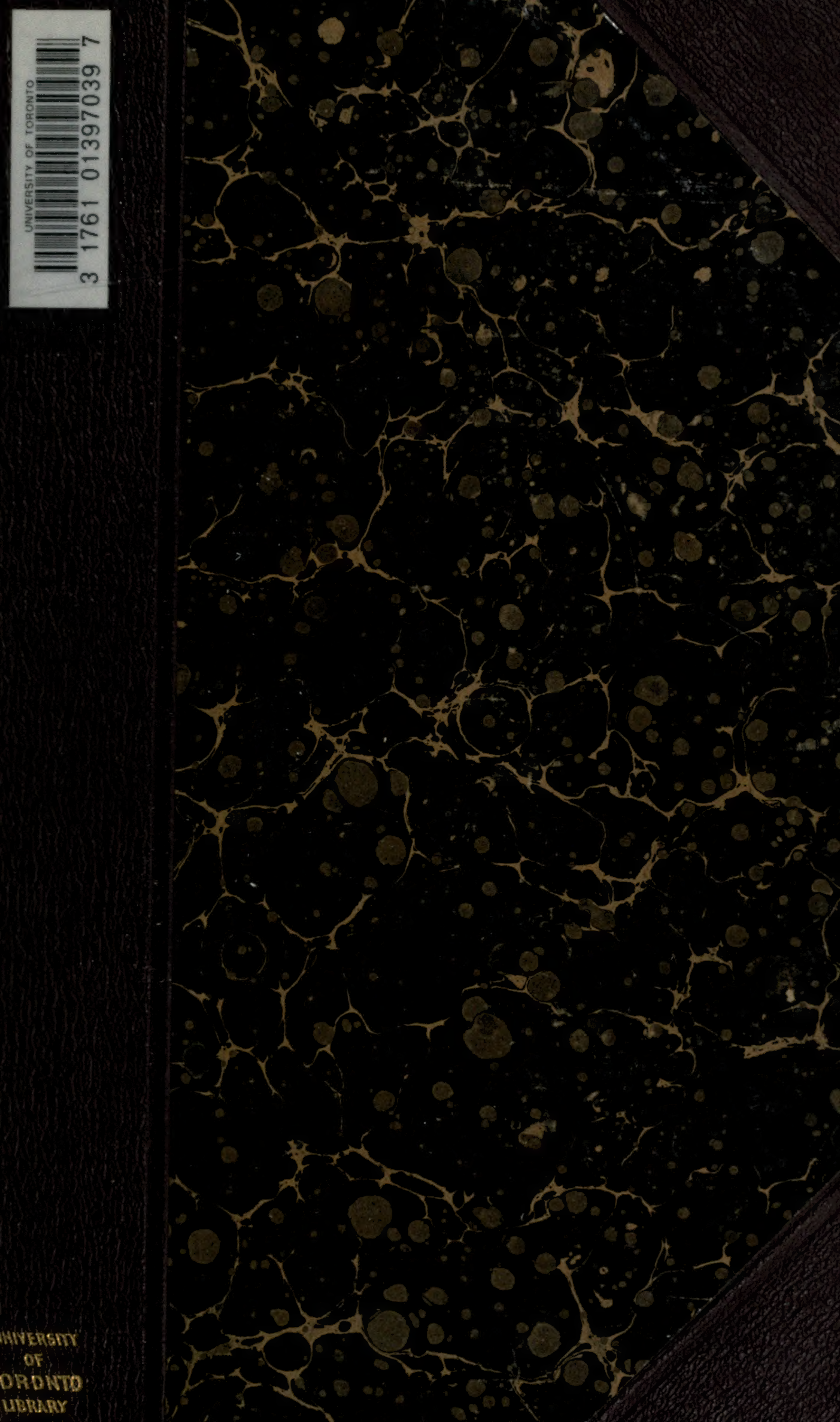
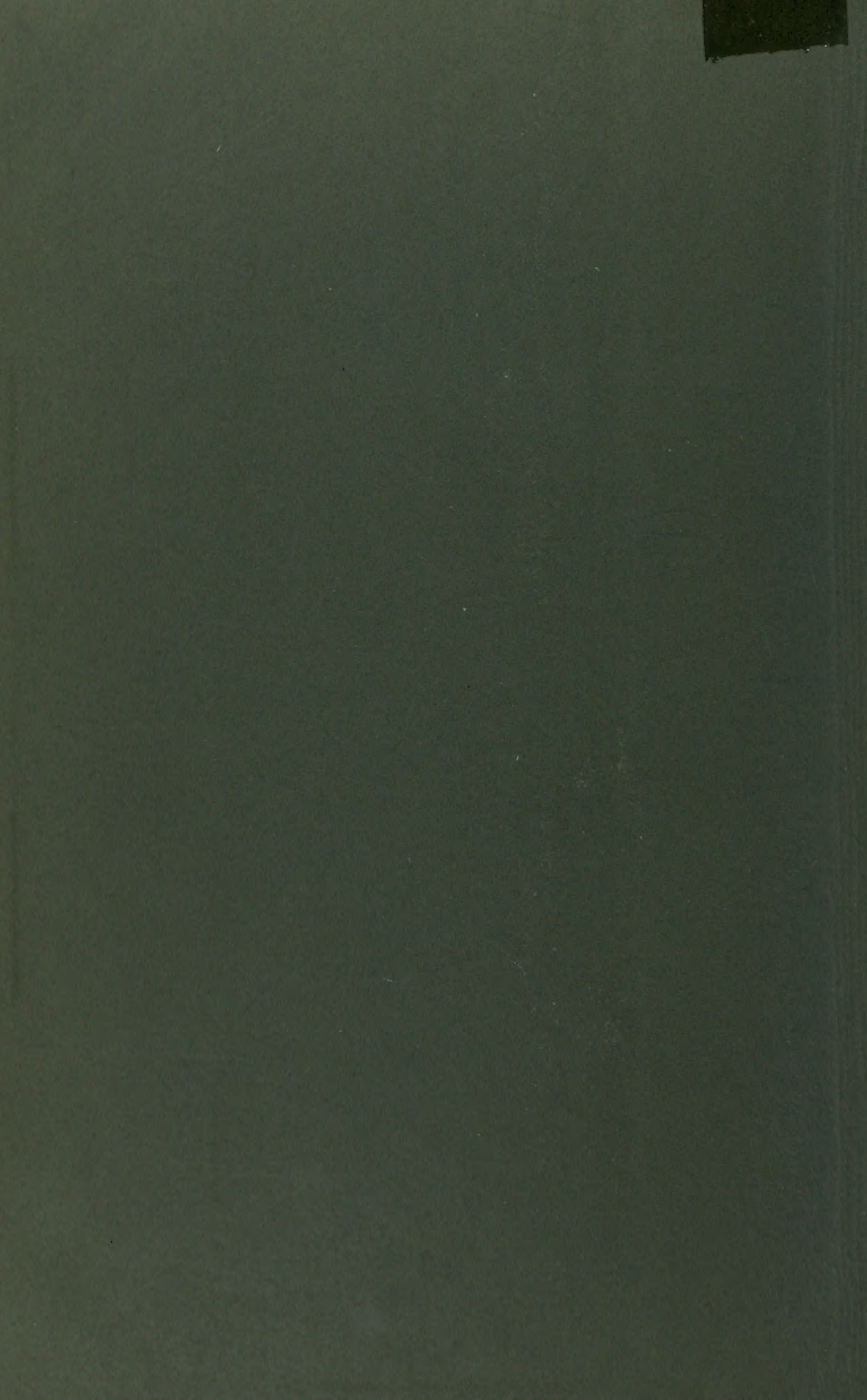
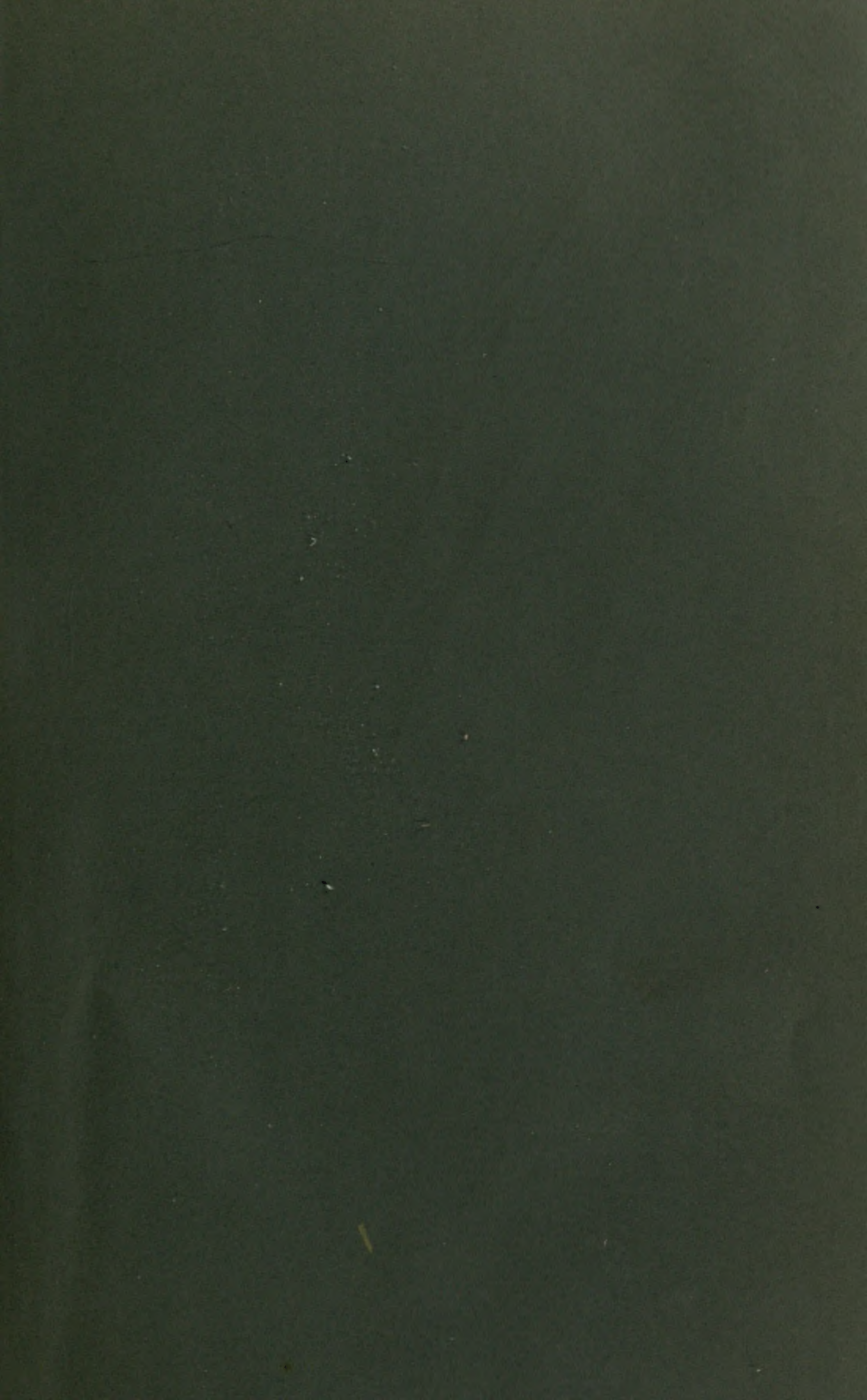
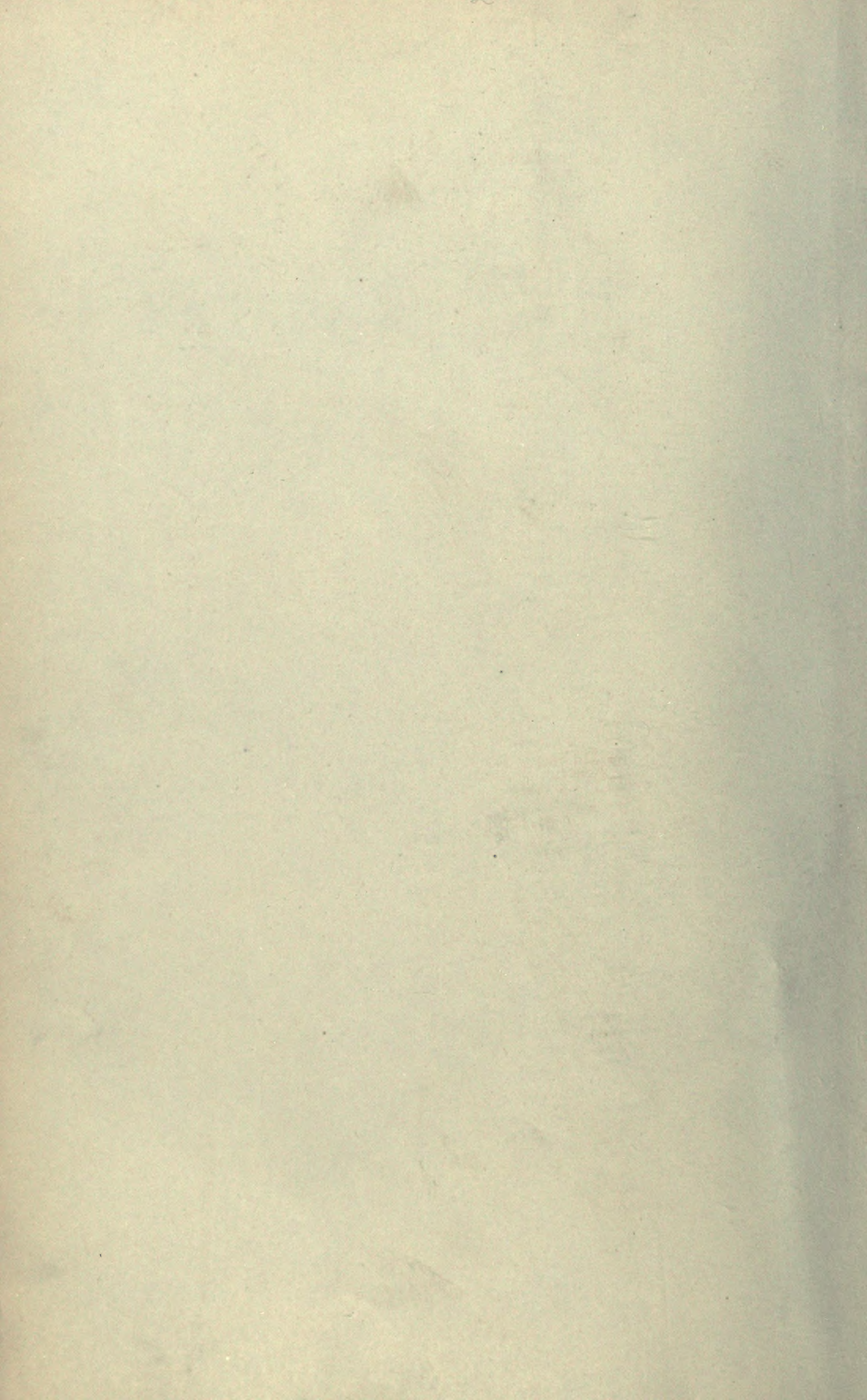

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01397039 7
UNIVERSITY
OF
TORONTO
LIBRARY







GRUNDZÜGE DER THEORIE

DER

OPTISCHEN INSTRUMENTE

NACH ABBE

VON

DR. SIEGFRIED CZAPSKI

ZWEITE AUFLAGE

UNTER MITWIRKUNG DES VERFASSERS UND MIT BEITRÄGEN VON M. VON ROHR

HERAUSGEGEBEN VON

DR. O. EPPENSTEIN

MIT 176 ABBILDUNGEN



LEIPZIG

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH

1904

Sonderdruck aus dem
„Handbuch der Physik“ von A. Winkelmann
Band VI.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort zur ersten Auflage.

Die folgenden Blätter enthalten einen Abdruck der Artikel, welche ich für das von Herrn Prof. WINKELMANN herausgegebene, im gleichen Verlag erscheinende „Handbuch der Physik", über Dioptrik und die Theorie der optischen Instrumente geschrieben habe.

Es sei mir gestattet, auch an dieser Stelle dem Herausgeber wie Verleger jenes Handbuchs meinen herzlichsten Dank auszusprechen für das Entgegenkommen, welches sie mir in bezug auf Umfang wie Zeitpunkt meiner Veröffentlichung an jener Stelle bewiesen haben — ein Entgegenkommen, von welchem ich wiederholt und in ziemlich ausgiebigem Maße Gebrauch machen mußte.

Der Begriff der „optischen Instrumente" ist im folgenden in seinem engsten Sinne verstanden, als Bezeichnung derjenigen Instrumente, welche Bilder von äußeren Gegenständen entwerfen. Ich habe selbst diejenigen Instrumente mit abzuhandeln unterlassen, welche man sonst mit unter diesen engeren Begriff subsumiert, wie die auf der Anwendung von Winkelspiegeln beruhenden in der Geodäsie und Astronomie angewendeten, das Stereoskop u. dgl., weil ich die Theorie derselben in anderen Werken genügend klar und vollständig vorgetragen fand, so daß ich jenen Darstellungen nichts Besseres an die Seite zu setzen mich getraut hätte. Es war aber der eigentliche Zweck meiner Darstellung, vornehmlich dasjenige mitzuteilen, was meiner Meinung nach nicht schon anderwärts vollständiger und zusammenhängender zu finden ist; von dem übrigen nur das Wesentliche und für meinen speziellen Zweck Notwendige anzuführen und für das nähere Studium dieser Gebiete der geometrischen Optik bloß Literaturhinweise zu bieten.

In den Vorbemerkungen zu den einzelnen Abschnitten habe ich mich bemüht, den wesentlichen Inhalt derselben anzugeben und den Zusammenhang hervorzuheben, in welchem sie unter einander sowie mit dem Endzwecke der Darstellung stehen. Auf diese einleitenden Bemerkungen kann ich daher wohl diejenigen verweisen, welche sich im voraus über die in der Darstellung waltenden Gesichtspunkte unterrichten wollen.

Es sei mir an dieser Stelle nur gestattet, in aller Kürze zu erörtern, worin das Unterscheidende der vorliegenden Darstellung von den mir bekannten sonstigen besteht und worin ich den Fortschritt erblicke, den die hier vorgetragenen Theorien und Anschauungen ABBES für das Verständnis der optischen Instrumente bedeuten.

Ich finde denselben in drei Punkten.

Erstens in der Fundierung der Theorie der optischen Bilder auf eine allgemeinere Grundlage. Diese Theorie, d. h. die Gesetze und Beziehungen, welche zwischen Bildern und ihren Objekten überall bestehen, weist

ABBE als bloßen Ausdruck des Bestehens der Kollineationsverwandtschaft nach, somit als gänzlich unabhängig von allen den besonderen Voraussetzungen über die Form und Anordnung der wirksamen Flächen, über die Lage und Öffnung der abbildenden Büschel, sowie über die physikalischen Gesetze ihrer Modifikation (Spiegelung, Brechung), auf welche man sie bisher stets gegründet hat. Dieser Nachweis, daß dieselben Gesetze überall herrschen müssen, wo ihre elementaren Voraussetzungen — eindeutige punktweise Abbildung zweier Räume durch Vermittelung geradliniger Strahlen — erfüllt sind, ermöglicht erst, in allen besonderen Verwirklichungsformen optischer Bilder eine Scheidung desjenigen vorzunehmen, was in den Gesetzen derselben auf jener allgemeinen Grundlage beruht und was in eben dieser Verwirklichungsart seinen Ursprung hat. Sie beseitigt manche Zweifel über die Leistungen, welche bei optischen Instrumenten von einer bisher noch nicht existierenden Zusammensetzung etwa künftig einmal möglich sein könnten und läßt auch die bekannten Beziehungen, entsprechend der Verschiedenheit des Ausgangspunktes für ihre Auffindung, teilweise in einem anderen Zusammenhange erscheinen oder weist ihnen eine andere Rangordnung zu, als ihnen sonst zuerteilt wurde.

Das Gegenstück zu dieser methodischen Feststellung der Voraussetzungen und des Gültigkeitsbereichs optischer Abbildung im allgemeinen bildet eine vollständigere Berücksichtigung der besonderen Art und Weise, in welcher in einem gegebenen Instrument Bilder zustande kommen. Und dies nach zwei Richtungen hin.

Ist es für die allgemeine Theorie der optischen Bilder völlig gleichgültig, auf welche Weise, durch welche Hilfsmittel dieselben entstanden gedacht werden, welche Neigungen zur Achse und welche Öffnungen die Strahlenbüschel haben, die sie erzeugen, welche Ausdehnung die so hervorgebrachten Bilder besitzen und von welchem Standpunkt und in welcher Weise sie beobachtet werden — so liegt für die realen Verwirklichungsweisen optischer Abbildungen, d. h. für die optischen Instrumente der Schlüssel für das Verständnis ihrer Wirkung und event. auch für die Konstruktion vollständig in eben jenen besonderen Momenten. Erst die in einem System stattfindende Begrenzung der Strahlen und der hieraus resultierende Strahlengang — nach ABBE in sehr einfacher Weise bestimmt durch die Lage und Größe je zweier Blenden im Objekt- wie Bildraume, die selber paarweise im Verhältnis von Objekt und Bild zu einander stehen — geben die Unterlagen für die Beantwortung der Fragen nach der Wirkung eines Instruments in dessen wichtigsten Äußerungen. Von ihnen hängt die in einem Bilde herrschende Perspektive, hängt die Vergrößerung ab, welche es für einen in bestimmter Stellung zum Instrument befindlichen Beobachter besitzt und der Umfang, in welchem das Bild für ihn sichtbar ist. Durch ihre passende Regulierung kann man ein Instrument vorteilhaft für die Benützung zu mikrometrischen Messungen mittels optischer Bilder machen; sie allein endlich bedingt die Tiefenwirkung (das Penetrationsvermögen), die Helligkeit (Lichtstärke) der Bilder und vor allem auch die Grenzen der eigentlichen Leistungsfähigkeit (das Unterscheidungs- und Trennungsvermögen) eines optischen Instruments.

Die notwendige Voraussetzung für eine solche Diskussion, damit dieselbe nicht in der Luft schwebend erscheine — daher in der Darstellung das natürliche Mittelglied zwischen ihr und der zuerst erwähnten — bildet der Nachweis, daß sich mit den zu Gebote stehenden physischen Mitteln eine Abbildung überhaupt realisieren läßt und eine Untersuchung darüber, auf welche Weise und bis zu welchem Bereiche dies der Fall sei.

Was den letzteren Punkt betrifft, — die mögliche Erweiterung der jeder Abbildung zunächst scheinbar gesteckten Grenzen — so werden die mathematischen Entwickelungen in der Theorie der Aberrationen, wenn man in

denselben nicht bei den ersten Schritten stehen bleiben will, bald so kompliziert, daß sie keinerlei Übersicht und allgemeine Schlußfolgerungen mehr gestatten. Die Resultate praktisch-rechnerischer Bemühungen andererseits — gänzlich abhängig von der Geschicklichkeit, Erfahrung und Ausdauer des Rechners und seiner Einsicht in die Besonderheiten seiner Aufgabe, ferner abhängig von der technischen Vollkommenheit, mit welcher der Konstruktionsplan zur Ausführung gebracht wird und endlich von der durch physiologische Faktoren stark beeinflußten Beurteilungsweise der Bilder — lassen Einwänden der verschiedensten Art nach beiden Richtungen hin stets offenes Spiel.

Einer derartigen Sachlage gegenüber scheint es mir von Wichtigkeit, daß sich — wiederum auf ganz allgemeine Voraussetzungen hin und infolgedessen mit dem Anspruch auf eben so allgemeine Gültigkeit — ein Nachweis darüber erbringen läßt, welchen Grad der Vollkommenheit optische Bilder überhaupt erreichen können und daß die Vereinigung weitgehender Ansprüche nach verschiedenen Richtungen hin in sich widerspruchsvoll, daher das Streben nach einer solchen von vornherein aussichtslos ist. Dieser Nachweis erstreckt sich in der vorliegenden Darstellung nur auf einige Punkte. Vielleicht ist ein anderer so glücklich, ihn auf die anderen, im Text näher angegebenen Bildeigenschaften mit ausdehnen zu können.

Diese allgemeinen Erörterungen bilden die Unterlagen für die eigentliche besondere Theorie der optischen Instrumente, in welcher die Hauptgattungen derselben (Auge, Projektionssystem, Lupe, Mikroskop und Fernrohr) im einzelnen durchgegangen und von den allgemeinen Betrachtungen auf sie Anwendung gemacht wird. Es wird also bei jedem dieser Instrumente die dioptrische Grundwirkung bestimmt und die Faktoren hervorgehoben, von denen sie abhängt, ferner die Art der in ihm stattfindenden Strahlenbegrenzung und ihr eigentümlicher Einfluß auf die Wirkung des Instruments. Hieran schließt sich bei den künstlichen Instrumenten eine kurze kritische und historische Übersicht über die wichtigsten bisher bekannt gewordenen Konstruktionstypen derselben.

Die Beengung in dem mir zu Gebote gestellten Raume und das Dilemma zwischen Lieferungsfrist und Muße zur Fertigstellung haben mich gerade in diesem Abschnitte genötigt, mich auf die Zeichnung der allgemeinsten Umrisse zu beschränken. Kenner der einzelnen Instrumente werden daher wohl die Diskussion mancher sie interessierender Fragen vermissen. Sollte die hier gegebene Darstellung trotzdem einigen Beifall finden, so würde ich nach meiner persönlichen Neigung besonders gern eine spätere Gelegenheit wahrnehmen, um gerade auf diesem Gebiete das jetzt Versäumte nachzuholen.

Die Methoden zur empirischen Bestimmung der Konstanten der optischen Instrumente bilden den Gegenstand des letzten Kapitels; sie liefern eine natürliche Ergänzung der voranstehenden durchweg rein theoretischen Erörterungen.

Auch hier habe ich mich auf das Wesentlichste beschränkt und z. B. vorläufig abgesehen von der Darstellung der Methoden, welche man vorgeschlagen und angewandt hat, um die Qualität eines Systems nach ihren verschiedenen Richtungen hin zu prüfen. Der größte Teil dieser Methoden beruht überdies so sehr auf praktischer Erfahrung und auf der Beachtung von Merkmalen, die sich mit Worten kaum genügend sicher angeben lassen, daß ich von vornherein Bedenken trug, eine schriftliche Anleitung zu solchen Erprobungen zu versuchen, wo bekanntermaßen kaum eine mündliche mit unmittelbaren Hinweisen verbundene immer zum Ziele führt.

Die Theorie der optischen Instrumente bezw. der durch solche vermittelten Abbildung findet ihren eigentlichen Schlußstein erst da, von wo sie rationeller Weise auch ihren Ausgangspunkt nimmt: in der Betrachtung des physischen Prozesses der Bildentstehung. An mehreren Stellen der vorliegenden Darstellung mußte von den Resultaten einer solchen Betrachtung bereits Gebrauch gemacht oder auf die Ergänzung der rein dioptrischen Beweisführung durch jene physikalische hingewiesen werden.

Für selbstleuchtende Objekte ist eine solche Theorie des physischen Abbildungsprozesses auf bekannten Grundlagen und nach bekannten Verfahrungs-

weisen unschwer zu erbringen, zumal durch die Arbeiten von SCHWERD, AIRY, ANDRÉ, H. STRUVE, LOMMEL u. a. alle wichtigen Fragen im wesentlichen bereits gelöst sind.

Die Abbildung von Objekten jedoch, welche nicht selbst Erreger von Lichtwellen sind, sondern nur das von anderen Lichtquellen auf sie gestrahlte Licht ihrer natürlichen Beschaffenheit entsprechend modifiziert weiterstrahlen und dadurch mittelbar leuchtend werden, ist nicht nach denselben und auch nicht nach gleich einfachen Normen zu bestimmen. Die Feststellung der Gesetze, denen eine derartige Abbildung unterliegt, bildet den Inhalt desjenigen, was spezieller als die „ABBEsche Theorie“ bezeichnet wird und in den allgemeinsten Grundzügen durch die Veröffentlichungen ihres Urhebers[1] DIPPELS[2] sowie einiger anderer (DE CASTELARNAU, HEURCK, DALLINGER)[3] auch schon bekannt geworden ist.

Es war ursprünglich meine Absicht, an dieser Stelle eine genauere Darlegung auch dieser Theorie zu geben. Ich bemerkte jedoch bald, daß mich die konsequente Ausführung dieses Planes zur Wiedergabe ziemlich weitläufiger vorbereitender Betrachtungen auf einem Gebiete zwingen würde, welches man füglich als „allgemeine Diffraktionstheorie“ bezeichnen könnte. Infolgedessen würde, wie ich sah, eine einigermaßen erschöpfende Darstellung mehr Raum und mehr Zeit in Anspruch nehmen, als ich ihr jetzt widmen konnte. Um die Herausgabe des zum Teil seit langer Zeit gedruckt vorliegenden Teiles des Buches nicht noch länger — ja auf unbestimmte Zeit — hinauszuschieben oder umgekehrt bloß um der äußeren Fertigstellung willen die Darstellung jener Theorien hastig abzufassen, und entsprechend unvollständig werden zu lassen, entschloß ich mich in Übereinstimmung mit dem Herrn Verleger, jenen jetzt für sich herausgeben und diese später als besonderes Bändchen folgen zu lassen. Zu diesem Entschluß trug noch der Umstand bei, daß Herr Professor ABBE die Absicht ausgesprochen hatte, in der nächsten Zeit seine Untersuchungen auf dem Gebiete der allgemeinen Diffraktionstheorie selbst darzustellen. Eine solche — an sich schon wünschenswerte — Veröffentlichung würde mir aber natürlich die Lösung meiner besonderen Aufgabe wesentlich erleichtern und mir auch ermöglichen, meine Darstellung unbeschadet der Strenge viel übersichtlicher zu gestalten. Ich hoffe, sie binnen Jahresfrist abgeschlossen zu haben.

Schließlich seien mir noch ein paar Bemerkungen gestattet über den Anteil, den Herr Professor ABBE an der vorliegenden Darstellung hat, und denjenigen, welchen ich selbst an ihr beanspruchen darf.

Wie schon aus dem Voranstehenden hervorgeht und die Lektüre des Buches jedem noch deutlicher zeigen wird, ist der Inhalt desselben in seinen wesentlichen Grundlagen das geistige Eigentum ABBES. Der Darstellung seiner Untersuchungen und Anschauungen über das Wesen und die Wirkung der optischen Instrumente war dieses Buch ja von vornherein gewidmet. Was jedoch diese Darstellung selbst betrifft, so brachten es die Verhältnisse mit sich, daß ich trotz stetem persönlichen Verkehr mit diesem meinem verehrten Lehrer und Freunde kaum mehr als den allgemeinen Plan und Gang derselben mit ihm besprechen konnte, die Ausführung im einzelnen aber mir allein oblag und ihm noch heute kaum zu Gesicht gekommen ist. Ich befinde mich also in der Lage, daß ich jedes Verdienst um den Inhalt des Dargestellten durchaus ablehnen, die Verantwortung für die Richtigkeit und angemessene Form ganz auf mich nehmen muß.

---

[1] Beiträge zur Theorie des Mikroskops u. s. w., M. SCHULTZES Arch. f. mikr. Anat. **9**. 438. 1873, und einige Aufsätze im Journ. of the R. Micr. Soc., daselbst auch solche von CRISP, STEPHENSON u. a. — [2] Handbuch der allgemeinen Mikroskopie. Braunschweig 1882. p. 89 ff. — [3] Des ersteren Vision microscopia, Madrid 1885, der anderen beiden Handbücher über das Mikroskop.

Daß einige Kapitel, wie das I., III., VI., IX., und manche Teile in anderen auch inhaltlich nicht auf ABBE zurückzuführen sind, sondern die Untersuchungen anderer Forscher wiedergeben, wird der Kundige sofort bemerken und braucht daher kaum hervorgehoben zu werden. In dem VI. Kapitel über „Prismen und Prismensysteme" habe ich einige von mir selbst gelegentlich angestellte Untersuchungen mitgeteilt, durch welche, wie mir schien, dieser Gegenstand nach einigen Richtungen hin vervollständigt wird und er denjenigen Zusammenhang enthält, der ihm früher wohl fehlte.

Wenn das Büchlein andere anregen sollte, zur Lösung der in ihm behandelten Probleme ihrerseits beizutragen, so hat es seinen wesentlichen Zweck erfüllt.

Jena, im März 1893.

S. Czapski.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die Hoffnung, der ich in dem Schlußsatze des Vorworts zur ersten Auflage Ausdruck gegeben habe, hat sich im reichsten Maße erfüllt. Zahlreiche Untersuchungen haben an die in meinem Buche mitgeteilten Ergebnisse angeknüpft; vor allem ist die darin niedergelegte Auffassung von dem Wesen der Wirkung und der sich darauf gründenden Konstruktion optischer Instrumente in immer weiteren Kreisen anerkannt und angenommen worden.

Als daher die erste Auflage des WINKELMANNschen Handbuchs der Physik, für welche meine „Theorie der optischen Instrumente" als Beitrag geschrieben war, durch eine neue ersetzt werden sollte, schien es mir erwünscht, auch diese meine Beiträge nochmals als selbständiges Werk erscheinen zu lassen —, eine Auffassung, der sich der neue Herr Verleger bereitwilligst anschloß. Leider mußte ich aber die Absicht, die Bearbeitung selbst vorzunehmen, bald aufgeben. Bei meiner starken beruflichen Inanspruchnahme würden entweder diese meine Berufspflichten oder meine Gesundheit oder die Qualität der geleisteten Arbeit mehr oder minder gelitten haben. Ich habe mich daher nach kurzem Besinnen entschlossen, die Bearbeitung der neuen Ausgabe im wesentlichen anderen Kräften zu überlassen.

Es war ein glücklicher Umstand für mich, daß fast zur gleichen Zeit wie diese Arbeit die ausführliche Bearbeitung meiner „Theorie" von einigen wissenschaftlichen Mitarbeitern des Zeißwerkes in Angriff genommen war.[1] Dadurch waren mehrere dieser Herren zu dieser Zeit wieder ganz besonders in diesen Gedankengängen heimisch geworden und konnten dem Hauptbearbeiter meines Werkes behilflich sein. Als solcher trat Herr O. EPPENSTEIN in die Lücke, dem ich auch an dieser Stelle zunächst für seine Bereitwilligkeit zur Übernahme der Arbeit, dann aber vor allem für die Sorgfalt und das Verständnis, mit der er sie zu Ende geführt hat, meinen alleraufrichtigsten und herzlichsten Dank auszusprechen, mich gedrungen fühle.

Ich glaube mich zu dem Urteil berechtigt, daß die neue Auflage durch diese Bearbeitung ganz wesentlich im Sinne der Berichtigung und Vervollständigung gewonnen hat. Es war vielleicht ein besonders günstiger Umstand, daß Herr O. EPPENSTEIN durch die von ihm vorzunehmende Arbeit gewissermaßen erst in die Theorie der optischen Instrumente sich selbst einzuführen hatte; er hatte

[1] Die Theorie der optischen Instrumente, bearbeitet von wissenschaftlichen Mitarbeitern an der optischen Werkstätte von CARL ZEISS. I. Bd. Die Bilderzeugung in optischen Instrumenten vom Standpunkte der geometrischen Optik, bearbeitet von P. CULMANN, S. CZAPSKI, A. KÖNIG, F. LÖWE, M. v. ROHR, H. SIEDENTOPF, E. WANDERSLEB. Herausgeg. von M. v. ROHR. Berlin, Jul. Springer, 1904. XXI u. 587 S. ℳ 18.—.

dadurch ein besonders feines Gefühl für die Schwierigkeiten, die der unbefangene Leser bei der ersten Lektüre findet.

Andererseits standen Herrn O. EPPENSTEIN kundige Berater zur Seite, namentlich in den Herren A. KÖHLER, A. KÖNIG, M. v. ROHR, denen ebenfalls mein lebhafter Dank gebührt. Herr M. v. ROHR übernahm die Bearbeitung einiger Kapitel, in denen er zum Teil die Ergebnisse seiner eigenen jüngsten Untersuchungen zum ersten Male veröffentlicht, so VIII a, Das Sehen, und IX, Das photographische Objektiv, sowie X, Die Brillen. Neben den außerordentlich zahlreichen Zusätzen und Ergänzungen innerhalb des alten Rahmens hat Herr O. EPPENSTEIN ebenfalls einige Kapitel neu geschrieben, so VIII B, Die Blende als Mittel zur flächenhaften Darstellung eines Raumes und XIV, Die Beleuchtungssysteme, worin er u. a. die Ergebnisse der neueren Arbeiten von M. v. ROHR wiedergibt.

Namentlich in den in Kapitel VIII B wiedergegebenen, hauptsächlich von M. v. ROHR herrührenden Untersuchungen erblicke ich eine wertvolle Weiterführung der ABBEschen Theorie der Strahlenbegrenzung, durch die sie zum Teil erst ihre rechte Bedeutung für die Lehre von der Abbildung durch optische Instrumente erhält. In ABBEs eigenen Ausführungen wenigstens tritt nicht genügend deutlich hervor, daß allen Instrumenten gemeinsam die Beschränkung auf eine variable oder feste, gekrümmte oder ebene Bildfläche ist — bei den Projektionssystemen ist dies der auffangende Schirm (Mattscheibe, photographische Platte), bei den zur Unterstützung des Sehens bestimmten die Netzhaut des Auges. Da die Objekte ihrerseits aber mit seltenen Ausnahmen auch nicht angenähert nur als flächenhaft ausgedehnt betrachtet werden können, so bildet die Feststellung, wie solche körperliche Objekte bei der Abbildung durch optische Instrumente auf einer im Bildraume angebrachten Fläche wiedergegeben werden, den unerläßlichen Schlußstein der Lehre von der Abbildung überhaupt. Zu diesem hat M. v. ROHR schon 1896 den Weg gefunden in der sehr glücklichen Einführung der sogenannten Einstellebene (E.-E.), einer im Objektraume befindlichen Ebene (oder sonstigen Fläche) der die physische Bildebene (Schirm-, Mattscheibenebene) (M.-E.) in bezug auf das vorliegende System optisch konjugiert ist und in der jeder Punkt des abgebildeten Objekts durch die Spur des von der Mitte der Eintrittspupille nach ihm gezogenen Vektors repräsentiert ist. Das wirkliche Bild ist nach der Feststellung M. v. ROHRs also das nach den gewöhnlichen Gesetzen für die Abbildung von Ebenen (Flächen) ermittelbare optische Bild dieses in der Einstellungsebene konstruierbaren Urbildes (von M. v. ROHR das objektseitige Abbild genannt). Auf diesem Wege erledigt sich in überraschend einfacher Weise die z. B. in der Photogrammetrie so wichtige Frage nach der Perspektive, des weiteren unter Berücksichtigung der Größe der E.-P. die nach der Tiefenschärfe, und es kann leicht der Einfluß der Grundeigenschaften eines Systems (im wesentlichen Lage seiner E.-P.) auf die Gestalt des Bildes geschieden werden von dem Einfluß seiner individuellen Eigenschaften (der Abbildungsfehler insbesondere Verzeichnung und Bildverkrümmung, aber auch der fundamentaleren wie Brennweite und angulare Vergrößerung der Hauptstrahlen — Tangentenverhältnis).

Ich selbst habe mich auf die Durchsicht des EPPENSTEINschen Textes zu den ersten Kapiteln beschränken müssen und habe, seinem Wunsche folgend, nur den letzten, die Fernrohre behandelnden Abschnitt neu geschrieben.

Wiewohl diese sich relativ eng an die vor 11 Jahren erschienene Ausgabe anlehnende Bearbeitung schon mit Rücksicht auf ihren Zusammenhang mit dem WINKELMANNschen Handbuch der Physik bei weitem nicht so in die Tiefe gehen konnte wie das oben erwähnte Sammelwerk, so glaube ich doch, daß sein abermaliges Erscheinen manchen Lesern erwünscht sein wird. Denn viele werden das Bedürfnis nach so eingehender Behandlung der fraglichen Probleme nicht

empfinden und dafür Wert legen auf die größere Vollständigkeit, die das hier vorliegende Werk gegenüber jenem bisher nur zum Teil erschienenen (etwa der Hälfte — bis p. 260 — dieses entsprechend) aufweist. Daneben kann es vielleicht auch in seiner jetzigen Gestalt immer noch eine größere Einheitlichkeit in Anlage und Ausführung für sich beanspruchen. Ich glaubte, das Verhältnis der beiden Werke zu einander durch eine kleine Veränderung im Titel zum Ausdruck bringen zu sollen, indem ich es als „Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente" bezeichnete und kann zum Schlusse nur nochmals den im Jahre 1893 ausgesprochenen Wunsch wiederholen.

Jena, im September 1904.

S. Czapski.

Artikelverzeichnis nebst Inhaltsangabe.

I. Geometrische Optik.

Berechtigung einer geometrischen Optik.

Die Gesamtheit der uns bekannten Erscheinungen des Lichtes hat zu verschiedenen „Hypothesen über die Natur des Lichtes“ geführt. Andere Gebiete der Physik, die Mechanik, der Elektromagnetismus, liefern uns zu den optischen Vorgängen Analogieen, an denen sich diese Vorgänge wie an Modellen verfolgen lassen, und die zugleich die Zahl der optischen Tatsachen in einer geringeren Anzahl von hypothetischen Grundannahmen zusammenfassen.

Der Aufbau der Optik ist aber ein derartiger, daß man zwar mit Vorteil von den erwähnten Hypothesen Gebrauch macht, wenn man alle Lichterscheinungen möglichst kurz zusammenfassen will; daß aber einige wenige optische Grundgesetze bereits gestatten, in einem großen Gebiete von optischen Vorgängen den wichtigsten Teil der Erscheinung zu erklären. Und dieses Gebiet umfaßt gerade solche Vorgänge in großer Zahl, welche sich im gewöhnlichen Leben, besonders aber in der praktischen Anwendung häufig darbieten.

Diese optischen Grundgesetze sind die folgenden:

1. Das Gesetz der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes in einem homogenen Mittel; 2. das Gesetz der Unabhängigkeit der Teile eines Lichtbündels von einander; 3. das Gesetz der regelmäßigen Zurückwerfung (Spiegelung, Reflexion) und 4. das Gesetz der regelmäßigen Brechung (Refraktion) des Lichtes.

Alle vier Gesetze beziehen sich nur auf die Richtung der Lichtbewegung, also eine rein geometrische Eigenschaft derselben. Die Anwendung dieser Gesetze auf die in der Natur sich darbietenden oder künstlich herstellbaren Kombinationen bildet den Gegenstand der „geometrischen Optik“.

Die sogen. geometrische Optik erstreckt sich jedoch nicht auf alle Erscheinungen des Lichtes, soweit in ihnen bloß Richtungsänderungen in Frage sind, sondern sie beschränkt sich auf diejenigen Fälle, in welchen die wirkenden Medien homogen (in allen Punkten gleichartig) und isotrop, unkristallinisch (in allen Richtungen gleichwirkend) sind.

Wenn nun aber auch die genannten Gesetze genügen, um auf ihnen ein sehr vollständiges System aufzubauen, d. h. ein solches, welches die beobachtbaren Erscheinungen sehr annähernd wiedergibt, und gestattet, noch nicht beobachtete Erscheinungen richtig vorauszusagen, so werden wir doch einer tieferen Untersuchung der „Natur des Lichtes“ dann nicht entraten können, wenn es sich darum handelt, die Grenze des hier ins Auge gefaßten beschränkteren

Untersuchungsgebietes abzustecken, d. h. diejenigen Vorgänge und diejenigen Seiten dieser Vorgänge auszusondern, bei denen die Behandlungsweise der geometrischen Optik nicht ausreicht. Es hat öfters zu Irrtümern geführt, daß man die Gesetze der geometrischen Optik über diejenigen Grenzen hinaus, in welchen sie durch die Erfahrung bestätigt oder durch die strengere Theorie gestützt waren, anwandte. Namentlich eine vollständige Theorie der optischen Instrumente und der metereologisch-optischen Erscheinungen läßt sich nur durch Rückgreifen auf die Begriffe der Undulationstheorie gewinnen; und es wird in jedem Falle gut sein, sich zu vergewissern, wie weit die aus den einfachen Vorstellungen gezogenen Folgerungen in der strengeren Theorie noch eine Stütze finden, wenn man die geometrische Optik als physikalische Disziplin oder um ihrer praktischen Anwendungen willen und nicht als ein bloßes Übungsfeld der Mathematik behandeln will.

Diesem Standpunkte gemäß sollen auch im folgenden außer den allgemeinen Beziehungen, welche aus den Grundgesetzen abgeleitet worden sind, nur solche Konsequenzen derselben behandelt werden, welche entweder zum Verständnis wichtiger Naturerscheinungen oder dem der optischen Instrumente nötig sind.

Das **Gesetz der Ausbreitung des Lichtes in von einander unabhängigen geraden Strahlen** ist ebensowenig, als eines der anderen Grundgesetze der Physik, aus einzelnen, eigens hierzu angestellten Beobachtungen geschlossen worden, noch ist es durch solche überhaupt streng beweisbar. Es nimmt seine Gewißheit gerade so wie die Grundgesetze anderer physikalischer Disziplinen, aus der Übereinstimmung der aus ihm gezogenen Folgerungen mit der Erfahrung. Überall im gewöhnlichen Leben, und in aller Strenge in der praktischen Astronomie und Geodäsie, wird auf die unbedingte Gültigkeit dieses Gesetzes gebaut und wird umgekehrt die Geradlinigkeit einer Punktreihe aus der Tatsache der Bewegung des Lichtes in ihr gefolgert (Visieren, Schattenphänomene) oder aus dem nicht geradlinigen Verlauf der Strahlen auf Inhomogenität des Mediums geschlossen, und stets haben sich die hieraus weiter gezogenen Schlüsse mit der ursprünglichen Annahme vereinen lassen. Diese zahllosen, zum Teil so kritischen Bestätigungen des Gesetzes haben demselben eine Sicherheit und allgemeine Annahme verschafft, wie kaum einem anderen Naturgesetze.

Trotzdem ist, wie seit über 200 Jahren (Grimaldi 1665, Newton 1704) wohlbekannt ist, das Gesetz nicht unbedingt, und in der gewöhnlich ausgesprochenen Form überhaupt nicht richtig.

Wenn man daran geht, es einer möglichst strengen Prüfung durch das Experiment zu unterziehen; wenn man, um es als Elementargesetz nachzuweisen, möglichst mit den elementaren Bestandteilen des Lichtes, den „Strahlen" selbst zu operieren versucht, also durch Schirme mit sehr engen Öffnungen aus einem größeren Lichtbündel solche „Strahlen" heraushebt und ihren Weg verfolgt, so bemerkt man, daß die Ausbreitungsrichtung des Lichtes desto unbestimmter, vieldeutiger, und damit die Existenz isoliert darstellbarer „Lichtstrahlen" überhaupt desto zweifelhafter wird, je mehr man sie zu erreichen strebt. Denn je enger man die fragliche Öffnung macht, desto weiter breitet sich das durch sie getretene Licht, statt in einer einzigen Richtung weiterzugehen, in ein Büschel von in verschiedenen Richtungen variabler Helligkeit aus; einen je kleineren Schirm man in den Weg eines Lichtbündels stellt, desto weniger ist der auf einem gegenübergestellten Schirm entworfene Schatten dem schattenwerfenden Körper geometrisch ähnlich, desto mehr tritt an die Stelle dessen, was wir als Schatten zu bezeichnen gewohnt sind, eine ganz andere Erscheinung. Wir brauchen uns bei einer näheren Beschreibung solcher Versuche nicht aufzuhalten; denn wir gelangen auf diesem Wege zu nichts anderem, als zu dem, was als ein besonderes, wichtiges Erscheinungsgebiet der Optik Diffraktion, Beugung des Lichtes genannt und eingehend studiert worden ist.

Trotzdem hiernach das Gesetz der Ausbreitung des Lichtes in Strahlen nur eingeschränkte Gültigkeit hat, verliert es doch kaum an Bedeutung, auch auf dem Boden der strengeren Theorie des Lichtes, welche die oben erwähnten Erscheinungen völlig zu erklären vermag. Jene Theorie[1] zeigt vielmehr, übereinstimmend mit der Erfahrung, daß bis zu einem erheblichen Grade der Annäherung in den gewöhnlich vorkommenden Fällen, d. h. überall da, wo wir es mit Lichtbüscheln von endlichem Querschnitt zu tun haben, diese Büschel sich in vielen Beziehungen so verhalten, als seien sie aus einzelnen Strahlen zusammengesetzt, welche sich unabhängig voneinander in geraden Linien fortsetzen. Nur in den, meist ziemlich subtilen, Fällen, welche in der Lehre von der Interferenz und Beugung des Lichtes betrachtet werden, sind die Ausnahmen von dieser Regel wahrzunehmen, wiewohl sie in aller Strenge niemals gilt.

Auch an den Grenzen von Büscheln endlichen Querschnitts verhält sich das Licht abweichend von den Grundgesetzen der geometrischen Optik; aber alsdann ist die Menge des abweichenden Lichtes verschwindend gegen die des, in unserem Sinne, regulären, kann also gegenüber jener für die meisten Zwecke vernachlässigt werden.

Die anderen Grundgesetze treffen, wie die strenge Theorie des Lichtes und sorgfältige experimentelle Prüfung zeigen, bis zu demselben Grade der Annäherung zu, wie die beiden ersten, d. h. in allen Fällen, wo und insoweit, als man gemäß den vorliegenden äußeren Bedingungen berechtigt ist, überhaupt von „Strahlen" zu sprechen. Hiervon weiter unten mehr.

Wiewohl also die angenommenen Grundgesetze der geometrischen Optik nicht unbedingt richtig sind, so verliert doch diese Disziplin nicht ihre Berechtigung; vielmehr hat sie eine solche formale immer noch, auch in dem strengeren Systeme der Wissenschaft, als Unterdisziplin, welche gestattet, aus wesentlich einfacheren und der gemeinen Erfahrung zugänglicheren Annahmen als die strenge Theorie, einen großen und praktisch sehr wichtigen Teil von deren Resultaten abzuleiten, mit wesentlich geringeren mathematischen Hilfsmitteln, als jene benötigt und doch mit einer für sehr viele Fälle hinreichenden Annäherung an die Wirklichkeit[2].

Eine gleiche didaktische und methodische Berechtigung, wie die Loslösung der geometrischen Optik von der physikalischen Lehre des Lichtes hat dann innerhalb dieser noch die weitere Scheidung in phoronomische Optik (Undulationstheorie) und dynamische Optik (Theorie des Äthers).

---

[1] S. z. B. G. KIRCHHOFF, Zur Theorie der Lichtstrahlen. Sitzber. Berl. Ak. 1882. p. 641; WIED. Ann. **18.** 663. 1883. — [2] Es braucht wohl kaum daran erinnert zu werden, daß dies nur ein Beispiel des allgemeinen wissenschaftlichen Verfahrens ist. Die Wissenschaft muß vereinfachen, schematisieren, um überhaupt an die Vorgänge heranzukommen (vgl. E. MACH, Prinzipien der Wärmelehre. 1896. p. 452). Sie darf das tun, weil es sich für sie um Zahlen handelt und stets je nach dem Zwecke der Untersuchung eine gewisse Größenordnung vernachlässigt werden kann. Den Gegenstand unserer Gesetze bilden immer Abstraktionen. Wir trennen die einzelnen Disziplinen, obwohl es keine rein mechanischen, thermischen u. s. w. Vorgänge gibt. Wir betrachten Körper als ein- und zweidimensional; bald Weltkörper als Punkte, bald ihre Oberfläche als Ebene; wir sprechen von starren Punktverbindungen, idealen Flüssigkeiten und Gasen. Zahlreiche elektrische Vorgänge erledigen wir sehr gut mit der alten Theorie der elektrischen Fluida, weil Erscheinungen, die zu der neueren elektromagnetischen Theorie geführt haben, dort eine untergeordnete Rolle spielen. So ist in noch größerer Ähnlichkeit mit dem vorliegenden Falle die Elektrodynamik AMPÈRES auf die Annahme von Elementarwirkungen gegründet, die ebensowenig zu realisieren sind wie die „Lichtstrahlen". Aber wiewohl Strom-„elemente" und deren Wirkung aufeinander niemals beobachtet worden sind, so ist die Einführung ihres Begriffs und die Annahme eines Wirkungsgesetzes von solchen dennoch äußerst fruchtbar gewesen, insofern sie gestattet, die Wirkung endlicher geschlossener Ströme aufeinander mit einer ebenfalls in vielen Fällen sehr weitreichenden Annäherung an die beobachtbare Wirklichkeit zu berechnen.

Physikalische Veränderungen des Lichtes in einem Medium.

Innerhalb seines Mediums kann das Licht verschiedene Modifikationen erfahren. Stets geht ein Teil des Lichtes als solches verloren und wird in andere Energieformen — Wärme, Elektrizität, chemische Energie — verwandelt, absorbiert. Oft ändert das Licht auch nur seine Art, Farbe, innerhalb des neuen Mittels, und bietet dann die Erscheinungen der Fluoreszenz dar. Je nachdem durch eine Schicht von gegebener Dicke ein größerer oder geringerer Teil des auf sie gefallenen Lichtes hindurchgelassen wird, nennt man den Körper mehr oder weniger „durchsichtig“. Ein Mittel wird für verschiedene Farben verschiedene Absorption und daher auch verschiedenen Grad der Durchsichtigkeit besitzen.

Wenn das Medium, in welchem sich das Licht bewegt, vollkommen homogen ist, so kann man durch hinreichend dünne Schichten desselben andere Objekte, wenn auch in mehr oder minder verringerter Helligkeit, so doch in vollkommen unverminderter Schärfe sehen. Medien, welche in homogener Masse Partikeln anderer optischer Eigenschaft zerstreut enthalten, wie dies z. B. bei der Milch, dem Blute, dem Porzellan, der mit flüssigen Wasserteilchen erfüllten atmosphärischen Luft der Fall ist, heißen trübe Medien. Die in ihnen vorhandenen Partikeln verursachen eine innere diffuse Reflexion, deren Natur nur nach den Vorstellungen der physikalischen Lichttheorie näher definierbar ist. Im durchgehenden Lichte lassen diese trüben Medien die äußeren Gegenstände nur unscharf erkennen, weshalb sie auch durchscheinend genannt werden.

Es braucht wohl kaum daran erinnert zu werden, daß es in der Natur absolut durchsichtige Medien nicht gibt, sondern nur ein gradueller Unterschied der Trübheit vorhanden ist, welcher allerdings so groß ist, daß er zu einer Verschiedenheit der allgemeinen Bezeichnung vollauf berechtigt. Ebenso ist bekannt, daß es in der Natur keine ganz undurchsichtigen Mittel gibt, sondern in hinreichend dünnen Schichten alle Medien durchsichtig oder wenigstens durchscheinend werden.

Entsprechend dem Zwecke und Charakter der geometrischen Optik wird aber von allen Eigenschaften des Lichtes, welche nicht zu Änderungen geometrischer Verhältnisse Anlaß geben, in dem Vortrag derselben abgesehen. Also wird auch keine Rücksicht darauf genommen, ob das Licht stark oder schwach ist. Wir berücksichtigen nur die Intensitätsänderungen gegebener Lichtbüschel, soweit sie allein durch die Änderung der geometrischen Verhältnisse bedingt werden. Daher werden in dem Folgenden alle Medien, welche das Licht trifft, als vollkommen durchsichtig angenommen, oder vielmehr es wird das Verhalten des Lichtes an ihnen nur insoweit, als es von jener Eigenschaft bedingt ist, untersucht.

Ebensowenig macht man einen Unterschied, ob das Licht von einem selbstleuchtenden oder diffus strahlenden Körper ausgeht, oder von Brennpunkten, die erst durch besondere optische Veranstaltungen aus jenen hervorgegangen sind; ferner ob das Licht natürliches oder in irgend einem Polarisationszustande befindliches ist. Hingegen liegt es ganz im Sinne der geometrischen Optik, wenn sie als eine Hilfsdisziplin der physikalischen Optik vorgetragen wird, nicht ohne weiteres stets den Schnittpunkt irgend welcher „Strahlen“ verschiedenen Ursprungs als „Brennpunkt“ des betreffenden Büschels aufzufassen, sondern als solchen im allgemeinen nur den Vereinigungspunkt kohärenter Strahlen gelten zu lassen, d. h. von Strahlen, welche ursprünglich von ein und demselben leuchtenden Punkte ausgingen; oder — wie die Definition des Lichtstrahles in der Ausdrucksweise der Wellentheorie lautet — nur solche, welche Normalen derselben Wellenfläche sind, was wir schon hier betonen wollen.

Verhalten des Lichtes an der Grenze zweier verschiedener Medien.

Solange sich das Licht in einem (homogenen) Mittel bewegt, tut es dies also, mit den angegebenen Einschränkungen, in geradlinigen Strahlen. Gelangt es an die Grenze des Mittels, d. h. an ein solches von anderer optischer Beschaffenheit, so spaltet es sich in zwei Teile, die sich von der getroffenen Stelle der Grenzfläche aus mit nahezu plötzlich veränderter Richtung fortbewegen:

a) Ein Teil des Lichtes bleibt im ersten Medium — zurückgeworfenes, reflektiertes Licht.

b) Der übrige Teil des Lichtes geht in das zweite Medium über und pflanzt sich zunächst in ihm fort — gebrochenes Licht.

Eine genauere Untersuchung zeigt allerdings, daß diese scharfe Scheidung niemals eintritt. Auch der Teil des Lichtes, welcher in das erste Mittel zurückkehrt, war vorher bis zu einer gewissen, sehr geringen Tiefe in das zweite Mittel eingedrungen. Die natürlichen Farben der Körper haben in der bei dieser Gelegenheit vor sich gegangenen selektiven Absorption des Lichtes ihren Entstehungsgrund. In welchem Maße und bis zu welcher Tiefe ein solches Eindringen des sogen. reflektierten Lichtes stattfindet, hängt außer von der Natur der aneinandergrenzenden Mittel, auch noch in hohem Grade von der Beschaffenheit der Grenzfläche ab; z. B. davon, ob der zweite Körper in festem oder etwa pulverisiertem Zustande vorliegt, ob seine Oberfläche im ersteren Falle rauh oder poliert ist.

Auf die hier in Frage stehenden Vorgänge kann nur in der physikalischen Theorie des Lichtes näher eingegangen werden.

Die Richtung des reflektierten Lichtes hängt nach dem dritten Grundgesetz der geometrischen Optik in einer bald näher anzugebenden Weise nur von der Neigung des einfallenden Lichtstrahls gegen das von ihm getroffene Element der Grenzfläche ab. Und in der Tat, wenn diese Fläche so regelmäßig und so vollkommen glatt (poliert) ist, als die Technik dies zu leisten vermag, so findet die Bewegung des Lichtes fast ausschließlich in den jenem Gesetze entsprechenden Richtungen statt. Die Reflexion an solchen Flächen heißt daher regelmäßige Reflexion.

Je mehr die Trennungsfläche unregelmäßig ist, in der Art, daß ihre Elemente schon auf kleinem Gebiete oft und stark ihre Richtung ändern, je mehr die Fläche rauh (matt) ist, desto weniger findet jenes Grundgesetz auf die Reflexion des Lichtes an ihr Anwendung. Die Anordnung der Elemente ist bei solchen Flächen wohl nie näher, d. h. nie anders als nach ihren Mittelwerten angebbar, sodaß für eine Berechnung ihrer Wirkung nach dem Reflexionsgesetz schon die nötige Unterlage fehlt. Es ist dann aber auch die Größe der verschiedentlich wirkenden Flächenstücke eine so geringe, daß die Regeln der geometrischen Optik, wie oben hervorgehoben, überhaupt nicht ohne weiteres auf das Verhalten des Lichtes an ihnen anwendbar sind. Endlich wird in einem solchen Falle, wie leicht ersichtlich, das in eine geringe Tiefe des zweiten Mittels eingedrungene Licht mit wirksam sein müssen und die Erscheinung merklich beeinflussen. Von dem, z. B. auf eine ebene Fläche in einer Richtung auffallenden Lichte werden dann Teile, in stetig variierender Intensität, nach allen Richtungen zerstreut — diffuse Reflexion.

Gerade durch den Umstand, daß eine diffus reflektierende Fläche sich in ihren kleinsten Teilen verschieden gegen das Licht verhält, werden uns diese, und damit die Fläche selbst, als diskrete Ausgangspunkte von Lichtbewegungen sichtbar, während durch Reflexion an vollkommen glatten Flächen — wie wir später sehen werden — nur Bilder der äußeren, ihrerseits entweder selbst leuchtenden oder diffus reflektierenden Gegenstände entstehen, die reflektierenden Flächen selbst aber durchaus unsichtbar bleiben. In der Wirklichkeit wird diese Unsichtbarkeit freilich meist durch die unvermeidlichen Kratz- oder Sprungstellen, Stäubchen u. dergl. mehr oder minder aufgehoben. Denn in der Wirklichkeit gibt es natürlich keine Grenzflächen, die dem einen oder dem anderen Falle

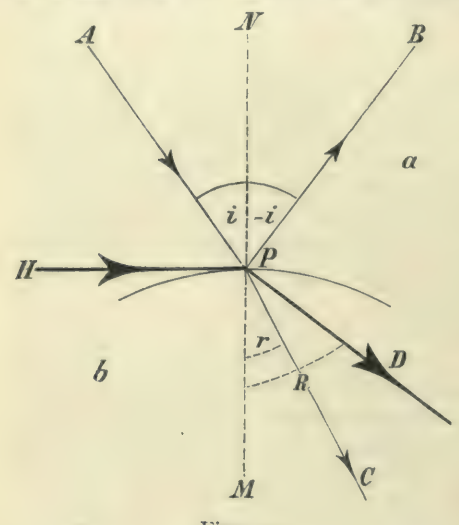
vollkommen entsprechen, sodaß wir es immer nur mit einer mehr oder minder großen Annäherung an das im Idealfalle stattfindende Verhalten zu tun haben.

In bezug auf das gebrochene Licht gelten zum Teil dieselben Bemerkungen, wie sie in bezug auf das reflektierte eben gemacht wurden. Wenn die Grenzfläche der beiden Medien glatt ist, so hängt die Richtung des gebrochenen Lichtes gemäß dem bald anzugebenden vierten Grundgesetz der geometrischen Optik nur von der Richtung des einfallenden Strahles gegen das getroffene Flächenelement und der Natur (optischen Dichte) der beiden aneinandergrenzenden Medien ab. Ist die Trennungsfläche aber matt, rauh, so wird das in das zweite Medium eindringende Licht diffus gebrochen, in ganz analoger Weise, wie das in das erste Medium zurücktretende Licht diffus reflektiert wird.

Im folgenden werden stets absolut glatte Grenzflächen vorausgesetzt.

Grundgesetze der Reflexion und Brechung.

Die Richtung, welche der regelmäßig zurückgeworfene und der ebenso gebrochene Teil des Lichtes im Verhältnis zu dem einfallenden einschlagen, wird durch die folgenden Gesetze bestimmt (drittes und viertes Grundgesetz der geometrischen Optik).



Figur 1.
Reflexion und Brechung eines Strahles. Totalreflexion.

Definitionen. Der spitze Winkel, welchen der einfallende Strahl mit der im Einfallspunkte auf der Trennungsfläche der beiden Medien errichteten Normalen — der Einfallsnormalen — bildet, heißt der Einfalls-, Incidenzwinkel. Der spitze Winkel, welchen der reflektierte bezw. gebrochene Strahl mit derselben Normalen bildet, heißt der Reflexions- bezw. Brechungswinkel. Die Ebene, in welcher der einfallende Strahl und die Normale liegen, heißt die Einfallsebene. Es gilt dann als gemeinsame Regel:

Der reflektierte und der gebrochene Strahl liegen in der Einfallsebene und auf der entgegengesetzten Seite des Einfallslotes, wie der einfallende Strahl; und im besondern:

Grundgesetz der Reflexion: Der Reflexionswinkel ist für alle Medien, in und an welchen die Reflexion statthaben mag, stets gleich dem Einfallswinkel

$$\sphericalangle APN = BPN = i \quad .$$

Grundgesetz der Brechung: Der Sinus des Brechungswinkels steht zu dem Sinus des Einfallswinkels in einem Verhältnis, welches nur von der Natur der beiden aneinandergrenzenden Medien a und b und der Art (Wellenlänge) des wirksamen Lichtes, aber nicht von der Größe des Einfallswinkels abhängig ist:

$$\sin CPM / \sin APN = \sin r / \sin i = n_{a,b} = \text{const.}$$

Die Verhältniszahl $n_{a,b}$ heißt der Brechungsindex des Mediums a gegen das Medium b für die betreffende Lichtart.

Über die erfahrungsmäßige Begründung dieser Grundgesetze gilt das oben Gesagte.

Die *Ableitung* derselben aus den Voraussetzungen der Undulationstheorie wurde zuerst von HUYGENS[1] gegeben, später von FRESNEL schärfer formuliert[2].

Zur Demonstration des Reflexions- und Brechungsgesetzes sind vielfach Apparate konstruiert worden[3].

Die genaueste *Bestätigung* hat das Reflexionsgesetz durch astronomische Beobachtungen erfahren, bei welchen die Höhe eines Sternes einerseits direkt durch Einstellung auf ihn mit dem Meridianinstrument, dessen horizontale Lage mit der Libelle ermittelt wird, andererseits indirekt durch Messung der Tiefe seines Spiegelbildes in einem Quecksilberhorizont bestimmt wird. Die auf diese Art beobachtete Tiefe wird immer genau der Höhe gleich gefunden, bei jedem Betrage der letzteren. Dergleichen Messungen sind einer sehr großen Genauigkeit fähig, sodaß sie eine ebenso genaue Prüfung der Konsequenzen des fraglichen Gesetzes bilden.

Das Brechungsgesetz wird am schärfsten auf die Probe gestellt durch Bestimmungen der Brechungsverhältnisse selber unter verschiedenen Umständen (Einfallswinkeln) (s. das betreffende Kapitel) und durch die Übereinstimmung der Wirkung der unter seiner Annahme berechneten optischen Konstruktionen, wenn dieselben exakt ausgeführt sind, mit der Rechnung.

In bezug auf letzteres Gesetz hat die Erfahrung weiterhin zu erkennen gegeben, daß — was bei der Reflexion eo ipso statt hat — der einfallende und der gebrochene Strahl stets miteinander vertauscht werden können, sodaß, wenn irgendwo ein unter dem Winkel i im Medium a einfallender Strahl unter dem Winkel r in das Medium b gebrochen wird, derselbe unter dem Einfallswinkel r im Medium b einfallend genau unter dem Winkel i in das Medium a gebrochen würde. Mit anderen Worten: wenn $n_{ab} = \sin r/\sin i$ der Brechungsexponent des Mediums a gegen das Medium b ist, so ist $n_{ba} = \sin i/\sin r = 1/n_{ab}$ der Brechungsexponent des Mediums b gegen das Medium a; also $n_{ab} = 1/n_{ba}$.

Wir schließen hieraus: wenn ein Strahl nach irgend welchen Reflexionen und Brechungen so auf eine Fläche fällt, daß er an ihr senkrecht reflektiert wird, so durchläuft er genau seinen vorherigen Weg, nur in umgekehrter Richtung — **Prinzip der Umkehrbarkeit der Strahlenwege.**

Und endlich hat die Messung zahlreicher Brechungsverhältnisse gezeigt, daß das Brechungsverhältnis n_{ab} eines Mediums a gegen b vollständig bestimmt ist, wenn die Brechungsverhältnisse n_{ac}, n_{bc} der Medien a und b gegen irgend ein anderes Medium c bekannt sind, und zwar, daß $n_{ab} = \frac{n_{ac}}{n_{bc}}$. Der relative Brechungsexponent eines Mediums a gegen das Medium b ist also gleich dem Verhältnis der relativen Brechungsexponenten der Medien a und b gegen ein drittes Medium c. Hierdurch wird die Zahl der möglichen Brechungsexponenten, welche sonst gleich der Zahl der Kombinationen aller Medien miteinander wäre, in eindeutiger Weise auf eine einzige Reihe zurückgeführt, nämlich auf die der Brechungsexponenten aller Medien gegen ein einziges. Als das letztere wird vornehmlich der leere Raum genommen. Die Brechungsverhältnisse gegen den leeren Raum heißen darum *absolute*, oder Brechungsindizes schlechthin. Das Vakuum selbst hat gemäß dieser Bestimmung den Brechungsindex 1; die bekannten durchsichtigen Medien haben alle Brechungsindizes > 1; nur einige Metalle, in Prismen von sehr geringer Dicke untersucht (KUNDT[4]), haben Indizes < 1 ergeben.

[1] CHR. HUYGENS, Traité de la lumière. Leiden 1690. p. 21 u. 33. — [2] A. J. FRESNEL, Oeuvres compl. I. div. loc. S. VERDET-EXNER, Wellentheorie des Lichtes **1.** 142 u. G. KIRCHHOFF, l. c. — [3] S. u. a. J. TYNDALL, Das Licht p. 12 u. 17. F. WEINHOLD, Physikalische Demonstr., Ztschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. an verschiedenen Stellen. — [4] A. KUNDT, WIED. Ann. **34.** 469. 1888.

Vermöge dieser Beziehungen läßt sich die Gleichung, welche das Brechungsgesetz ausspricht, in einer symmetrischen Form schreiben, welche wir künftig oft anwenden werden. Wir haben $\sin r = n_{ab} \cdot \sin i$. Da nun $n_{ab} = n_a / n_b$ ist, wenn wir mit n_a, n_b die Brechungsexponenten der Medien a und b gegen den leeren Raum bezeichnen, so wird

$$n_a \cdot \sin i = n_b \cdot \sin r = I \quad ,$$

oder das Produkt aus Brechungsexponent und Sinus des Winkels (Strahl-Normale) ändert sich bei je einer Brechung nicht, bleibt durchweg konstant. Wir wollen dieses Produkt die „optische Invariante" nennen.

Man erkennt ferner, daß die Reflexion durch dieselbe Gleichung wie die Brechung dargestellt wird, indem für sie nur $n_a : n_b$ den speziellen Wert -1 erhält. Wir werden daher in dem Folgenden oft nur die Probleme der Brechung direkt behandeln und das für die Reflexion geltende Resultat ohne weiteres aus dem für den Fall der Brechung gewonnenen durch die Substitution $n_a : n_b = -1$ ableiten.

Dispersion des Lichtes. Wie schon bemerkt, hängt die durch Brechung herbeigeführte Richtungsänderung des Lichtes an der Grenze zweier Medien, also der relative Brechungsexponent derselben (und auch der absolute) nicht nur von der Beschaffenheit dieser Medien ab (für welche er umgekehrt ein wesentliches Charakteristikum ist), sondern auch von der Art (Farbe, Wellenlänge, λ) des wirksamen Lichtes; n ist eine Funktion von λ. Uns genügt diese von Newton zuerst erfahrungsmäßig festgestellte Tatsache an sich.

Wie eine solche Verschiedenheit der Brechungsexponenten für verschiedene Farben in Erscheinung treten muß, können wir auf Grund des bisher Abgeleiteten schon angeben. Denn ist der Brechungsexponent eines Mediums gegen den leeren Raum (oder auch gegen ein anderes Medium) für eine gewisse Farbe $= n$, so gilt für diese $\sin i = n \cdot \sin r$. Ist der Brechungsexponent für eine benachbarte Farbe (Wellenlänge) $= n + dn$, so wird ein Strahl von der betreffenden Farbe, welcher unter demselben Winkel i einfällt, wie der erste, und unter einem Winkel $r + dr$ gebrochen werden mag, auch eine optische Invariante besitzen:

$$\sin i = (n + dn) \sin (r + dr) \quad ,$$

woraus folgt, daß

$$n \cdot \cos r \cdot dr + \sin r \cdot dn = 0$$

und die Abweichung der beiden gebrochenen Strahlen

$$dr = -(dn/n) \operatorname{tg} r$$

ist.

Unter demselben Winkel einfallende Strahlen verschiedener Wellenlänge werden also schon durch eine einzige Brechung in verschiedene Richtungen gelenkt. Newton schloß umgekehrt aus der ungleichen Ablenkung verschiedener Farben durch Prismen auf die verschiedene Brechbarkeit des verschieden farbigen Lichtes und auf die Zusammensetzung des weißen Sonnenlichtes aus verschiedener Farbe. Die Art der Auffindung dieses Faktums durch Newton (im Jahre 1666) gilt noch heute für ein Muster induktiver Forschung und die von ihm gegebene Darstellung seiner Untersuchung für eins der lesenswertesten Dokumente der älteren Physik[1].

Es mag hier noch bemerkt werden, daß der Brechungsexponent der Medien im allgemeinen desto größer ist, je kleiner die Wellenlänge des betreffenden Lichtes ist, daß er also im sichtbaren Teile des Spektrums von dem roten Ende

[1] S. Letter to Oldenburg dd. Cambridge Feb. 10, 1671 (abgedruckt in Tait, Light Edinb. 1884. p. 78 ff.) und Opticks, London 1704 (3. ed. 1721). Book I, Prop. 1—7. Deutsch z. B. in Ostwalds „Klassikern der exakten Wissenschaften", Nr. 96.

nach dem blauen hin stetig wächst (normale Dispersion). Doch gibt es eine Klasse von Körpern, welche eine Ausnahme von dieser Regel bilden, in welchen also Teile des Spektrums den umgekehrten Zusammenhang zwischen Brechungsexponent und Wellenlänge aufweisen. Man nennt diese Art von Dispersion darum **anomale**.

Man glaubte früher, daß die Größe des Brechungsexponenten stets Hand in Hand ginge mit der mechanischen Dichte der Körper. Wenn sich nun auch dieser Zusammenhang nach den späteren Untersuchungen als keineswegs durchgängig erwiesen hat, so findet er doch sehr oft statt, und man hat den einmal eingeführten Begriff der „optischen Dichte" zur Abkürzung der Ausdrucksweise beibehalten. Der Ausdruck, ein Medium sei „optisch dichter" als ein anderes, soll daher nichts weiter besagen, als daß es einen größeren Brechungsexponenten als jenes hat.

Totalreflexion. Wir haben die Beziehung zwischen Brechungs- und Einfallswinkel durch die Gleichung ausgedrückt $n_a \cdot \sin i = n_b \cdot \sin r$. Wenn $n_a < n_b$, also $n_{ab} < 1$ ist, so bestimmt sich gemäß dieser Gleichung zu jedem Einfallswinkel i der Brechungswinkel r. Da der größte Einfallswinkel $i_{\max} = J = \pi/2$ ist, so ist der größte Brechungswinkel unter diesen Umständen bestimmt durch die Gleichung $\sin (r_{\max} = R) = n_a/n_b$. Allen einfallenden Strahlen entsprechen also gebrochene, die in einem Kegel von der Halböffnung arc $(\sin = n_a/n_b)$ enthalten sind (vgl. Figur 1). Betrachten wir umgekehrt den Übergang des Lichtes aus dem Medium b in das Medium a, oder, was dasselbe ist, nehmen wir an, es sei $n_a > n_b$, also $n_{ab} > 1$, dann gibt es aus der Gleichung $n_a \cdot \sin i = n_b \cdot \sin r$ reelle Brechungswinkel r nur zu Einfallswinkeln i, deren Sinus kleiner ist als n_b/n_a oder kleiner als $1/n_{ab}$, entsprechend dem größten möglichen Brechungswinkel $r = \frac{\pi}{2}$. Strahlen, welche unter einem größeren Winkel i einfallen, als dem dieser Gleichung entsprechenden, können gar nicht mehr gebrochen werden, sondern alles eingefallene Licht wird in das erste Medium reflektiert. Wenn auch genaue Untersuchungen gezeigt haben, daß auch hier das Licht zum Teil in das zweite Medium eindringt, so geschieht dies doch nur bis zu sehr geringer Tiefe, und auch dieser Teil des Lichtes kehrt seine Bewegungsrichtung schließlich um. Man nennt diese Art von Reflexion daher Totalreflexion und den Einfallswinkel, von welchem an dieselbe beginnt, welcher also der Gleichung $\sin J = n_b/n_a = 1/n_{ab} = n_{ba}$ genügt, den „kritischen Winkel" oder Winkel der Totalreflexion [1].

Beiläufig mag bemerkt werden, daß bei durchsichtigen Medien die relative Menge des reflektierten Lichtes überhaupt mit dem Einfallswinkel wächst, sodaß sie von dem, senkrechter Inzidenz entsprechenden Minimum bis zur Totalreflexion stetig wächst.

Der Winkel der Totalreflexion hängt nur von den Brechungsexponenten der beiden aneinander grenzenden Medien ab. Er ist daher auch im allgemeinen von der Wellenlänge, Farbe des betrachteten Lichtes abhängig. Der Winkel der Totalreflexion in einem Medium, welches an das Vakuum grenzt, bestimmt in einfachster Weise dessen absoluten Brechungsexponenten: $\sin J = 1/n$.

Hilfssätze. Aus dem Reflexions- und Brechungsgesetze lassen sich einige Hilfssätze ableiten, welche uns in der Folge manchmal nützlich sein werden, und die wir daher hier nach HEATH [2]) voranstellen.

In bezug auf die Reflexionen folgt aus deren Gesetz:

1. daß der einfallende und der reflektierte Strahl gleiche Winkel auch mit

---

[1] JOH. KEPLER, Dioptrice. Wien 1611. Prop. XIII. p. 4; rechtwinkliges Reflexionsprisma ibid. Prop. XVIII, p. 7. — [2] R. S. HEATH, A Treat. on Geom. Opt. 2. Aufl. Cambridge 1895. p. 13. 14. 21; 1. Aufl. übersetzt von KANTHACK, Berlin 1894. p. 12. 14. 21.

jeder durch den Einfallspunkt gehenden zur Einfallsnormalen senkrechten Geraden bilden, und

2. daß die Projektionen des einfallenden und zurückgeworfenen Strahles auf irgend eine durch die Einfallsnormale gehende Ebene ebenfalls das Reflexionsgesetz befolgen. Der Beweis dieser Sätze liegt auf der Hand.

Wir wollen daher nur die entsprechenden, für die Brechung geltenden Sätze beweisen, aus welchen sich die ersteren ja auch ergeben, wenn $n_a = -n_b$ oder $n = -n'$ gesetzt wird. Hier gilt:

1. Die Cosinus der Winkel, welche einfallender und gebrochener Strahl mit irgend einer durch den Fußpunkt der Einfallsnormalen zu dieser senkrechten, d. h. in der Tangentialebene der brechenden Fläche gelegenen Geraden bilden, stehen ebenfalls im umgekehrten Verhältnis der Brechungsexponenten.

2. In demselben Verhältnis stehen die Sinus der Winkel, welche jene Strahlen mit einer durch die Normale gelegten Ebene bilden.

3. Für die Projektionen des einfallenden und des gebrochenen Strahles auf eine durch die Normale gelegte Ebene gilt das Brechungsgesetz mit einem Brechungsindex, welcher von der Neigung der Strahlen gegen jene Ebene abhängt.

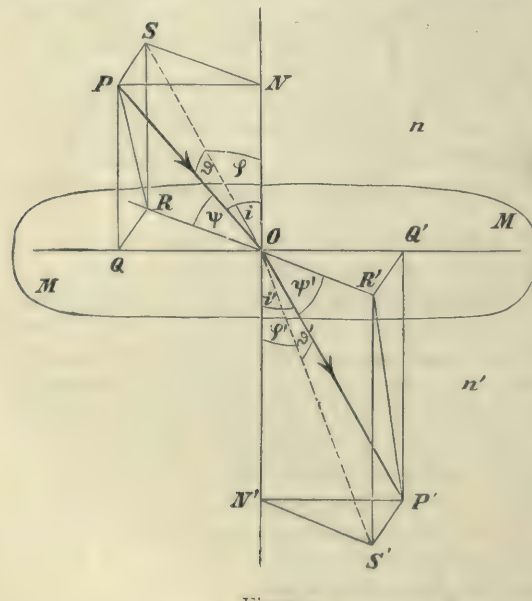
Sei, zum Beweise dessen, ON (Figur 2) die Einfallsnormale, MM die brechende Ebene oder Tangentialebene der brechenden Fläche in O, PO der einfallende, OP' der gebrochene Strahl, $NQQ'N'$ die Einfallsebene. Dann gilt

$$n \cdot \sin(PON = i) = n' \cdot \sin(P'ON' = i') \quad ;$$

daher auch

$$n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - i = POQ\right) = n' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - i' = P'OQ'\right) \quad .$$

Mache ich die Länge von OP und OP' proportional zu n und n', so ist hiernach, wenn Q und Q' die Fußpunkte der von P und P' auf die Ebene MM gefällten Lote sind, $OQ = OQ'$. Ziehe ich nun durch O in der Ebene MM irgend eine andere Gerade als QQ', ROR', und fälle von P und P' Senkrechte auf sie, nach R und R', so sind die Verbindungslinien QR und $Q'R'$ auch senkrecht auf ROR'. Daher auch $OR = OR'$. Es ist aber $OR = OP \cdot \cos POR$; $OR' = OP' \cdot \cos P'OR'$, folglich in der Tat $\cos POR : \cos P'OR' = n' : n$ (1. Satz).



Figur 2.

Denke ich mir nun durch ON und die (beliebige) Gerade RR' eine Ebene gelegt und von den wie vorher bestimmten Punkten P und P' Senkrechte auf diese Ebene gefällt, nach S und S', so ist $PS = QR$ und $P'S' = Q'R'$, also auch $PS = P'S'$, da ja $QR = Q'R'$. Aber $PS = OP \cdot \sin POS$; $PS' = OP \cdot \sin P'OS'$, folglich $\sin POS : \sin P'OS' = OP' : OP = n' : n$ (2. Satz).

Endlich ist $SO \cdot \sin SON = SN = S'O \sin S'ON' = S'N'$. Aber $SO = PO \cdot \cos POS$; $S'O = P'O \cos P'OS'$, folglich $n \cdot \sin SON \cdot \cos SOP = n' \cdot \sin S'ON' \cdot \cos S'OP'$ oder $\sin SON : \sin S'ON' = n' \cdot \cos S'OP' : n \cos SOP$ (3. Satz).

Bei der Bezeichnung der Figur gilt also, neben der Fundamentalgleichung,

$$n \cdot \sin i = n' \cdot \sin i' \quad \text{oder} \quad \sin i : \sin i' = n' : n$$

noch

$$\cos \psi : \cos \psi' = n' : n \quad ;$$

$$\sin \vartheta : \sin \vartheta' = n' : n$$

und

$$\sin \varphi : \sin \varphi' = \frac{n'}{n} (\cos \vartheta' : \cos \vartheta) = n' \cos \vartheta' : n \cos \vartheta \quad .$$

Charakteristisch für die Brechung — im Gegensatze zur Reflexion – ist folgende Eigenschaft: Die durch Brechung bewirkte Ablenkung eines Strahles von der Einfallsrichtung wächst mit zunehmendem Einfallswinkel immer schneller — während sie bei der Reflexion proportional mit dem wachsenden Einfallswinkel abnimmt (stets $= \pi - 2i$).

In der Tat folgt aus $n \cdot \sin i = n' \cdot \sin i'$ zunächst $di/\text{tg}\, i = di' \,\text{tg}\, i'$. Ist nun $n' > n$, so ist $i' < i$, daher auch $\text{tg}\, i' < \text{tg}\, i$ und, da im selben Verhältnis stehend, $di' < di$. Die Ablenkung γ ist aber $= i - i'$. Diese nimmt also, da $d(i - i') > 0$ ist, mit i jedenfalls zu.

Des Näheren ist

$$\frac{di - di'}{di} = \frac{d\gamma}{di} = 1 - \frac{\text{tg}\, i'}{\text{tg}\, i} \quad , \qquad \text{also} \quad \frac{d^2\gamma}{di^2} = -\frac{d}{di}\left(\frac{\text{tg}\, i'}{\text{tg}\, i}\right) \quad .$$

Nun nimmt aber $\text{tg}\, i'/\text{tg}\, i$ mit i ab; denn

$$\frac{d}{di}\left(\frac{\text{tg}\, i'}{\text{tg}\, i}\right) = \frac{(\text{tg}\, i : \cos^2 i')(di' : di) - (\text{tg}\, i' : \cos^2 i)}{\text{tg}^2\, i} = \frac{\text{tg}\, i'}{\text{tg}^2\, i}\left(\frac{1}{\cos^2 i'} - \frac{1}{\cos^2 i}\right) \quad ;$$

und der Klammerinhalt ist negativ, also $\frac{d^2\gamma}{di^2}$ positiv; d. h. $\frac{d\gamma}{di}$ nimmt mit wachsendem i (oder i') zu, die durch Brechung bewirkte Ablenkung wächst immer schneller.

Wenn $n' < n$, so erfolgt die Ablenkung nach der anderen Seite des Strahles (von der Normalen weg); im übrigen bleiben alle Schlußfolgerungen dieselben.

Einen eleganten rein geometrischen Beweis dieses nützlichen Satzes hat Tait gegeben (Light, p. 90), s. auch Heath, übersetzt von Kanthack, p. 23.

In den weiteren Ausführungen bedienen wir uns der folgenden

Definitionen.

Das von irgend einer — gleichgültig ob selbst- oder indirekt leuchtenden — Fläche sich ausbreitende Licht denken wir uns zusammengesetzt aus den Anteilen, die von je einem Element der Fläche ausgehen. Das von einem solchen Flächenelement ausgehende Licht bildet ein physikalisches Lichtbüschel.

In der geometrischen Optik bildet man die Fiktion, daß das Licht von den einzelnen Punkten einer Fläche ausgehe. Dieser Punkt heißt dann der Brennpunkt des Lichtbüschels oder kurzweg der leuchtende Punkt. Wenn die Winkelöffnung und der Querschnitt des Büschels verschwindend klein ist, so nennt man das Büschel ein Elementarbüschel. (Wo nicht die entgegengesetzte Annahme ausdrücklich gemacht ist, denken wir uns die Form des Elementarbüschels als die eines geraden Kegels bezw. Zylinders). Die Büschel denkt man sich als Aggregate von Lichtstrahlen, welche letztere als mathematische gerade Linien behandelt werden.

Achse oder Hauptstrahl des Büschels heißt derjenige Strahl, der der durch

den Brennpunkt gehenden Schwerpunktslinie des Büschels — dieses als homogenen Körper gedacht — entspricht; also bei zylindrischen und konischen Büscheln die geometrische Achse, Symmetrielinie des Kegels bezw. Zylinders. Die Achse ist der Repräsentant der Richtung des Büschels. In einem Elementarbüschel kann jeder Strahl als seine Achse angesehen werden.

Ein Büschel heißt konvergent oder divergent, je nachdem wir es an einer Stelle betrachten, die im Sinne der gedachten Lichtbewegung vor oder hinter dem Vereinigungspunkte der Strahlen, dem Brennpunkte, liegt. Der Grad der Kon- oder Divergenz von Büscheln wird durch ihren Öffnungswinkel, bei Elementarbüscheln durch das Verhältnis ihrer Öffnungswinkel, in der Ebene oder im Raume, gemessen.

Wenn wir die Strahlen eines in irgend einem Mittel verlaufenden Büschels bis zu seinem Brennpunkt verfolgen können, ohne die Grenzfläche eines anderen Mittels zu überschreiten, so heißt der Brennpunkt reell; wird bei der Verlängerung der Strahlen bis zum Brennpunkt, ob sie denselben nun erreichen oder nicht, eine solche Grenzfläche überschritten, so heißt der Brennpunkt virtuell.

Konvergente und divergente Büschel können beide Arten von Brennpunkten besitzen. Ursprünglich ist ein Büschel immer divergent und sein Brennpunkt reell. Durch die Wirkung der optischen Instrumente oder sonstige Reflexionen und Brechungen kann es in ein Büschel der anderen beiden Arten verwandelt werden.

Der Brennpunkt eines Büschels wird stets als „in demjenigen Mittel liegend" bezeichnet, in welchem tatsächlich die Strahlen verlaufen, deren reeller oder virtueller Vereinigungspunkt er ist, auch wenn dieser Vereinigungspunkt dem Orte nach in ein anderes Mittel fällt.

Der Unterschied zwischen reellen und virtuellen Brennpunkten wird nur wegen der praktischen Konsequenzen, die er mit sich bringt, festgehalten:

Virtuelle Brennpunkte geben nicht unmittelbar Bilder, z. B. auf einer Tafel, sondern müssen durch optische Hilfsmittel erst in reelle verwandelt werden (z. B. durch das Auge).

Wenn durch irgend welche optischen Vorrichtungen die von einem leuchtenden Punkte ausgegangenen Strahlen zum Teil wieder in einen Punkt vereinigt werden, so nennt man diesen das optische Bild des ursprünglichen oder Objektpunktes.

Vermöge der Umkehrbarkeit der Lichtwege (p. 7) können Objekt- und Bildpunkt ihre Funktion vertauschen, d. h. jeder Bildpunkt als Objekt Strahlen aussendend in den Richtungen, in welchen solche in ihm zur Vereinigung kamen, wird durch dieselbe optische Vorrichtung genau im vorherigen Objektpunkt abgebildet. Statt zu sagen, ein Punkt sei das Bild eines anderen, nennt man daher beide in bezug auf die betreffenden optischen Mittel „konjugierte" Punkte.

Was von einem einzelnen Punkte gilt, trifft auch auf mehrere und beliebig viele zu, welche ein mehr oder weniger ausgedehntes Objekt und Bild formieren.

Ein Unterschied zwischen einem selbstleuchtenden Objekt und einem optischen Bilde ist der, daß ersteres von allen Seiten, letzteres aber im allgemeinen nur innerhalb beschränkter Raumgebiete oder Richtungen sichtbar ist.

Man unterscheidet die Objektpunkte und ebenso die Bildpunkte als in bezug auf das optische Instrument reell oder virtuell, je nachdem sie, wenn man nur diese optische Vorrichtung, in bezug auf welche sie konjugiert sind, wirksam denkt, reelle oder virtuelle Brennpunkte der Büschel darstellen, deren Vereinigungspunkte sie sind.

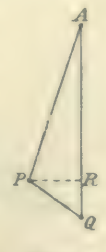
Reelle Objektpunkte sind daher stets die Brennpunkte divergenter, reelle Bildpunkte diejenigen konvergenter Büschel; für virtuelle Objekt- und Bildpunkte gilt das Umgekehrte.

Reelle oder virtuelle Objekt- (oder Bild-)punkte brauchen nicht reelle oder virtuelle Brennpunkte zu sein, wenn zu der optischen Vorrichtung, in bezug auf die sie konjugiert sind,

noch eine andere tritt. Z. B. kann ein reeller Bildpunkt eines Instruments zu einem virtuellen Brennpunkt werden, wenn hinter das Instrument ein anderes gesetzt wird, für das er virtueller Objektpunkt ist.

Allgemeine Theoreme über die Reflexion und Brechung.

Satz vom kürzesten Lichtweg. Wenn ein Lichtstrahl durch eine beliebige Anzahl von Reflexionen und Brechungen von einem Punkte A nach einem Punkte B gelangt, so ist die Summe der Produkte aus Brechungsexponent n je eines Mediums und der in ihm durchlaufenen Strecke l, also $\Sigma n l$, ein Grenzwert, d. h. sie weicht von der gleichen Summe für alle dem tatsächlichen Wege unendlich benachbarten höchstens um Glieder zweiter Ordnung ab. Es ist also $\delta \Sigma n l = 0$. Jenes Produkt wird „Lichtweg", „reduzierter Weg" oder „optische Länge" des Strahles genannt.



Figur 3.

Führe, um den Satz zunächst für eine einzelne Brechung oder Reflexion zu erweisen, der Weg eines das Brechungs- oder Reflexionsgesetz befolgenden Strahles von A über P (Figur 3) nach B. Sei Q ein P in der Grenzfläche (PQ) der beiden Medien so benachbarter Punkt, daß QP von der ersten Ordnung unendlich klein ist. Q braucht nicht in der Einfallsebene zu liegen.

Dann kann AQ zwar größer oder kleiner als AP sein, stets ist aber bis auf Größen zweiter Ordnung:

$$AQ = AP - PQ \cos APQ \quad ,$$

was ich sofort erhalte, wenn ich mit AP um A einen Kreis schlage, der AQ oder seine Verlängerung in R trifft, denn ich darf dann PR als $\perp AQ$ oder auch als $\perp AP$ betrachten.

Ebenso ist

$$\underline{BQ = BP - PQ \cos BPQ}$$

$$n AQ + n' BQ - n AP - n' BP = - PQ (n \cos APQ + n' \cos BPQ) \quad .$$

Nun ist aber nach S. 10 (1. Satz):

$$n : n' = \cos APQ : \cos BPQ' \quad ,$$

wenn Q' ein Punkt der über P hinaus verlängerten PQ ist, oder

$$= - \cos APQ : \cos BPQ \quad .$$

Daher verschwindet in obiger Gleichung der Klammerinhalt: folglich sind in der Tat die Lichtwege von A nach B über P und über Q bis auf Größen zweiter Ordnung einander gleich: $\delta (n AP + n' PB) = 0$.

Nach dem Prinzip der Superposition von Variationen können wir von der Gleichung $\delta \Sigma n l = 0$ für eine einzelne Reflexion und Brechung sofort Anwendung machen auf den Fall beliebig vieler. Bei stetiger Änderung des Brechungsexponenten folgt ebenso $\delta \int n \, dl = 0$.

(Der zweite und die höheren Differentiale können größer oder kleiner als Null oder auch gleich Null sein. Die gewöhnliche Fassung des Satzes, daß jene Summe ein Minimum sei, ist daher nicht korrekt, sondern nur historisch überkommen.)

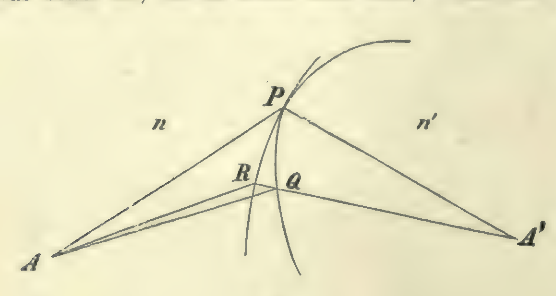
Für ebene Trennungsflächen ist der optische Weg immer ein Minimum, wie für die Reflexion schon HERO von Alexandrien, für die Brechung FERMAT zuerst bewiesen hat[1], wir wollen uns daher der Kürze wegen für den allgemeinen Fall desselben Ausdrucks bedienen.

---

[1] FERMAT, Litterae ad P. Mersennum contra Dioptricam Cartesianam. Paris 1667. CHR. HUYGENS, Traité de la lumière. Leyden 1690. p. 39.

Wichtig ist, daß auch die Umkehrung dieses Satzes gilt, nämlich, daß sich der Bedingung $\delta \Sigma n\, l = 0$ für den Weg eines Lichtstrahls zwischen zwei Punkten bei gegebenen reflektierenden und brechenden Flächen nur durch das Reflexions- und Brechungsgesetz genügen läßt. Wegen des Beweises sei auf HELMHOLTZ, Physiol. Optik, 1. Aufl., Leipzig 1867, p. 239, und Wissensch. Abh., Leipzig 1883, 2. 149, verwiesen.

Ob in einem speziellen Falle der Weg ein Minimum oder Maximum oder was sonst ist, davon kann man sich, wenn die Gestalt der Grenzfläche gegeben ist, folgendermaßen überzeugen. Sei PQ (Figur 4) ein Stück der Grenzfläche und PA' der nach dem Brechungsgesetz zu AP gehörige Strahl. Um zu erfahren, ob APA' ein kürzester oder ein längster Weg zwischen A und A' sei, denke ich mir die Fläche $n \cdot AP + n' PA' = \text{const.}$ konstruiert, die sogen. cartesische[1] Fläche (s. u.); PR sei ein Stück derselben. Diese Fläche muß die brechende in P jedenfalls berühren, weil dort für beide $\delta(n\, AP + n' \cdot PA') = 0$ ist. Ist nun die brechende Fläche in P nach dem dünneren Medium (n) zu stärker konvex als die cartesische, so ist für jene der Weg APA' ein Maximum, anderenfalls ein Minimum.



Figur 4.
Die brechende Fläche PQ und die sie in P berührende cartesische PR.

In der Tat, sei im ersteren Falle Q ein P unendlich benachbarter Punkt der brechenden Fläche, so ist der Lichtweg von A nach A' über Q, $[Q] = n \cdot A\, Q + n'\, Q\, A'$. Der über R durch die cartesische Fläche, $[R] = n\, A\, R + n'\, R\, Q + n'\, Q\, A'$, wenn R der Schnittpunkt von $A'\, Q$ mit der cartesischen Fläche ist. Also ist

$$[Q] - [R] = n(A\, Q - A\, R) - n'\, R\, Q \quad .$$

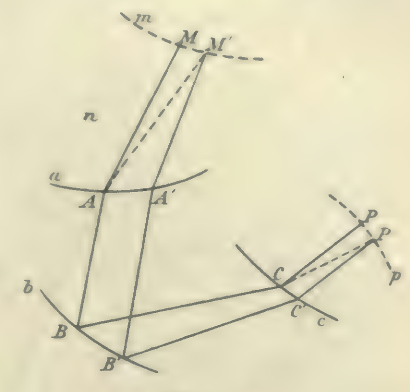
Nun ist $A\, Q - A\, R < R\, Q$ (Seiten eines Dreiecks), daher, wenn $n < n'$, a fortiori $n(A\, Q - A\, R) < n'\, R\, Q$, also der Weg über Q kleiner, als der über R. Letzterer ist aber gleich dem über P, folglich ist unter diesen Umständen der Weg über P ein Maximum. In ganz analoger Weise läßt sich erkennen, daß, wenn die brechende Fläche nach dem optisch dünneren Medium weniger konvex ist, also die cartesische, der Lichtweg über P ein Minimum ist.

Prinzip der schnellsten Ankunft. Nach den zuerst von FIZEAU und FOUCAULT angestellten, dann von MICHELSON genauer wiederholten Versuchen stehen die Brechungsexponenten zweier Medien im umgekehrten Verhältnis der Geschwindigkeiten der Lichtbewegung in ihnen, also $n/n' = v'/v$, oder allgemein $n = k/v$; $n' = k/v'$; $n'' = k/v''$ u. s. w. Unter Benützung dieser Beziehung geht die Gleichung $\delta \Sigma n\, l = 0$ über in $\delta \Sigma (l/v) = 0$. Da aber die Geschwindigkeit $v = l/t$ ist, wenn t die zur Durchlaufung der Strecke l vom Licht gebrauchte Zeit bedeutet, so wird schließlich $\delta \Sigma t = 0$, d. h. die Zeit, welche das Licht gebraucht, um von einem Punkte A mittels beliebig vieler Reflexionen und Brechungen nach einem anderen Punkte B zu gelangen, ist für den Weg, welchen der Strahl gemäß dem Reflexions- und Brechungsgesetz einschlägt, um unendlich kleine Größen höherer Ordnung verschieden von der für die diesem unendlich benachbarten Wege.

[1] Bisher meist aplanatische Fläche genannt; wir gebrauchen diesen Ausdruck für einen engeren, in der Dioptrik wichtigeren Begriff.

Unter Benützung dieses Satzes läßt sich der folgende wichtige

Satz von Malus beweisen. Derselbe lautet: Ein System von Strahlen, welches einmal senkrecht zu einer Fläche ist, bleibt dies auch nach beliebig vielen Reflexionen und Brechungen. Da die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen senkrecht stehen auf jeder Kugel um diesen Punkt als Mittelpunkt, so würde für solche der MALUSsche Satz besonders gelten.



Figur 5.

Nach der Wellentheorie drückt derselbe etwas Selbstverständliches aus, da gemäß dieser die Strahlen nichts anderes sind, als die Normalen zur Wellenfläche[1]. Vom Standpunkte der geometrischen Optik läßt sich der Satz folgendermaßen beweisen (nach RAYLEIGH)[2]. Seien MA, $M'A'$ . . . (Figur 8) Strahlen, welche auf der Fläche m bezüglich in M, M' normal stehen und in ihrem weiteren Verlauf an den Flächen a, b, c, bezüglich in A, A' . . . B, B' . . ., C, C', . . . Reflexionen oder Brechungen erfahren haben. Ich kann dann nach irgend einer dieser Reflexionen oder Brechungen, z. B. nach der an Fläche c stattgehabten, auf den betreffenden Strahlen jedenfalls Punkte P, P' . . . so bestimmen, daß die Summe der reduzierten Wege von M bis P, M' bis P' u. s. w. die gleiche wird. Die durch die Punkte P, P' . . . gehende Fläche ist dann die gesuchte Orthogonalfläche der Strahlen.

Verbinde ich zum Beweise dessen M' mit A und C mit P', so ist, wenn MM' und infolgedessen auch AA' und CC' von erster Ordnung unendlich klein sind, der Lichtweg von M' nach P' über ABC, oder $[M'ABCP']$, nur um unendlich kleine Größen zweiter oder höherer Ordnung verschieden von $[M'A'B'C'P']$. Laut Annahme ist aber $[M'A'B'C'P'] = [MABCP]$; daher, nach Subtraktion der gemeinsamen Wegstrecken, wenn der erste Brechungsexponent mit n, der letzte mit n' bezeichnet wird, im Grenzfalle $n \cdot MA + n' \cdot CP = n \cdot M'A + n' CP'$. Nach der Voraussetzung, daß die Strahlen ursprünglich auf m senkrecht stehen, ist aber $M'A = MA$ bis auf unendlich Kleine von wenigstens zweiter Ordnung, folglich auch ebenso nahe $CP' = CP$, und da auch PP' unendlich klein ist, steht CP auf p in P senkrecht, und ebenso die anderen Strahlen $C'P'$ u. s. w.

MALUS[3] selbst hat diesen Satz nur für eine einzige Brechung oder Reflexion ausgesprochen. Es war M. CH. DUPIN[4], der seine Allgemeinheit entdeckte. Er gab einen geometrischen Beweis für die Reflexion, der auf den Fall der Brechung zuerst von TIMMERMANS[5], sodann von GERGONNE[6] ausgedehnt wurde. Der letztere bewies auch den Satz[7]: Daß eine jede Anzahl von Brechungen und Spiegelungen ersetzt werden kann durch eine einzige Spiegelung, wenn die Strahlen zuletzt im Anfangsmedium, und durch eine Brechung, wenn sie in einem anderen verlaufen. Vgl. VERDET, Oeuvres V (Leç. d'opt. phys.), t. I. p. 9. 1861.

Analytische Beweise des MALUSschen Theorems s. bei HELMHOLTZ, l. supra cit. und HEATH, übersetzt von KANTHACK, l. c., p. 112, ausführlichere Untersuchung bei DARBOUX, Théorie gén. des surfaces. **2.** 275.

---

[1] Dies gilt nur für isotrope Medien. Wir haben oben die Isotropie aller betrachteten Medien vorausgesetzt. — [2] Lord RAYLEIGH, Encyclop. Brit. 9. ed. Art. Optics, **17.** 798; Collected Paps. — [3] MALUS, Journ. de l'Ec. Polyt. **14.** 1 u. 84. 1808. — [4] M. CH. DUPIN, Applic. de Géom. et de Méc. 4. mém. p. 187 und Ann. de chim. et de phys. (2) **5.** 1817. — [5] TIMMERMANS Corresp. math. et phys. des Pays-Bas **1.** 336. 1826. — [6] GERGONNE, Ann. de Math. XVI. p. 307. — [7] GERGONNE, ibid. XIV. p. 129.

Optische Länge zwischen konjugierten Brennpunkten. Aus dem Satze vom kürzesten Lichtweg können wir einen wichtigen Schluß ziehen; nämlich: wenn durch irgend welche Reflexionen und Brechungen alle in einem gegebenen Winkelraum enthaltenen von einem Punkt ausgehenden Strahlen wieder in einen Punkt (homozentrisch) vereinigt werden, so ist für sie die optische Länge vom Ausgangs- bis zum Vereinigungspunkt die gleiche. Denn in der Tat, weil dann von Strahl zu Strahl $\delta \Sigma n l = 0$ ist, so ist $\Sigma n l =$ const. innerhalb des betreffenden Winkelraums. (Ist der Schnittpunkt der Strahlen ein virtueller Brennpunkt, so muß die Länge l, welche von den Strahlen in Wirklichkeit nicht zurückgelegt wird, negativ bezeichnet werden.) Strahlen (Elementarwellen), welche von einem Punkte (Flächenelement) mit gleicher Phase ausgehen, kommen also bei homozentrischer Vereinigung im neuen Brennpunkt auch wieder mit gleicher Phase an. In solchen Vereinigungspunkten müssen sich die Strahlen also auch gemäß der Undulationstheorie verstärken, und es kommt daselbst zur Erzeugung eines sich in dem betreffenden Winkelraum selbst wie ein leuchtender Punkt verhaltenden Oszillationszentrums. Hierauf beruht die Möglichkeit einer Abbildung durch optische Mittel.

Nur die Wellentheorie gestattet eine genauere Untersuchung dieses Vorganges. Werden die Strahlen eines Büschels homozentrisch in einen Brennpunkt vereinigt, so sind in einem isotropen Medium die Wellenflächen konzentrische Kugeln um diesen Punkt. Die Wirkung einer optischen Vorrichtung, die einen Punkt in einen anderen abbildet, besteht also darin, die von dem ersteren ausgehenden Kugelwellen in andere Kugelwellen um den Bildpunkt zu verwandeln. Man kann demnach, wenn man den im Bildpunkte zustande kommenden Endeffekt berechnen will, die von dem Objektpunkte ausgehende Lichtwirkung durch diejenige ersetzen, die von einer der Kugelwellen um den Bildpunkt ausgeht. Diese Wellen sind aber niemals vollständige Kugelflächen und die Art der Begrenzung des wirksamen Stückes der Kugelfläche ist für den Vorgang wesentlich. In dem häufigsten Falle einer kreisförmigen Begrenzung ist also die Untersuchung des Abbildungsvorganges identisch mit der Untersuchung des Beugungseffektes einer kreisförmig begrenzten sphärischen Welle.

Solche Untersuchungen rühren von Airy und Schwerd her, welche den Beugungseffekt in der durch das Kugelzentrum senkrecht zur Büschelachse gelegten Ebene berechneten. Danach besteht dieser Effekt in einem hellen kreisrunden Scheibchen, das mit abwechselnd hellen und dunkeln Ringen von rasch abnehmender Intensität umgeben ist. Struve und Lommel gaben eine vollständige Theorie, die auch die Erscheinungen außerhalb dieser Ebene berücksichtigte; der letztere hat auch die Wirkung geradliniger Begrenzungen untersucht. Die gekennzeichnete Erscheinung ist der „Bildpunkt" der geometrischen Optik. Je größere Ausdehnung aber das wirksame Stück der Kugelwelle besitzt, desto rascher erfolgt der Intensitätsabfall von der Mitte aus; und desto mehr nähert sich die Erscheinung dem in der geometrischen Optik angenommenen Grenzfall. Die meisten praktischen Anwendungen nähern sich diesem Grenzfalle genügend, um die Behandlungsweise der geometrischen Optik zu rechtfertigen.

Abbe hat zuerst darauf hingewiesen, daß eine notwendige, aber keineswegs immer zutreffende Voraussetzung dieser Sätze die Kohärenz der vom Objektpunkte ausgehenden Strahlen oder Elementarwellen ist. Dies ist der häufigste und früher allgemein der Abbildungstheorie zugrunde gelegte Fall (primäre Abbildung).

Beim Mikroskop, wo bei der üblichsten Benutzungsweise (durchfallendes Licht) jene Voraussetzung in bezug auf das eigentliche Objekt nicht erfüllt ist, geht die von Abbe für diesen Fall entwickelte Abbildungstheorie zurück auf diejenigen Stellen, wo zweifellos eine primäre Abbildung stattfindet (die Licht-

quelle und deren Bilder) und leitet aus den sich dort ergebenden Erscheinungen erst indirekt diejenigen ab, die in der eigentlichen Bildebene stattfinden (Theorie der sekundären Abbildung). Es ergibt sich, daß auch in diesem Falle die tatsächlich zustande kommende Erscheinung meistens mit ziemlich weitgehender Annäherung durch die Betrachtungen der geometrischen Optik wiedergegeben wird. Im folgenden soll daher keine Rücksicht darauf genommen werden, ob der eine oder der andere Fall vorliegt.

Cartesische Flächen (s. auch S. 14). Die Aufgabe, eine Fläche so zu bestimmen, daß die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen sämtlich wieder in einen Punkt gebrochen (oder reflektiert werden, ist nach dem Voranstehenden mathematisch einfach so formulierbar, daß $nl + n'l'$ für alle Punkte der gesuchten Fläche denselben Wert haben solle, wenn l vom leuchtenden, l' vom Vereinigungspunkt aus gemessen wird. Die Lösung dieser von CARTESIUS behandelten Aufgabe[1] bietet keine besonderen Schwierigkeiten und ist an mehreren Stellen zu finden[2]. Da sie andererseits auch kein besonderes physikalisches oder praktisches Interesse besitzt, so begnügen wir uns mit der Anführung einiger Resultate und weisen nur darauf hin, daß in diesen Fällen für den reduzierten Weg des Lichtes zwischen den beiden Punkten, wie überhaupt stets bei homozentrischer Strahlenvereinigung auch der zweite und alle höheren Differentialquotienten des Ausdruckes Σnl verschwinden.

Im Falle einer Reflexion ist $l + l' =$ const. bekanntlich die Bipolargleichung eines Rotationsellipsoids, dessen Brennpunkte der leuchtende und der Vereinigungspunkt sind, wie auch aus der bekannten Eigenschaft eines solchen Ellipsoids geschlossen werden kann, daß die radii vectores gegen die Normale des betreffenden Flächenpunktes gleich geneigt sind, also dem Reflexionsgesetz genügen. Rückt der eine Punkt ins Unendliche, so wird die Fläche ein Rotationsparaboloid mit dem anderen Punkt als Brennpunkt und einer zu der Strahlenrichtung parallelen Achse.

Im Falle einer Brechung führt die Gleichung $nl + n'l' =$ const. auf die sogen. Cartesischen Ovale[3]. In dem Spezialfall, daß wieder der eine, z. B. der leuchtende Punkt im Unendlichen liegt, ist es eine Rotationsfläche zweiten Grades, deren einer Brennpunkt auch der der Strahlen ist. Für eine besondere andere, später anzugebende Lage der beiden Punkte zur Fläche ist dieselbe eine Kugel.

Ganz ähnlich sind die Ergebnisse, wenn man die Wiedervereinigung der Strahlen statt durch eine einzige Fläche, durch mehrere Flächen bewirken will.

Von den cartesischen Flächen kann man theoretisch Gebrauch machen, um für eine gegebene Lage zweier Punkte und gegebene Gestalt einer zwei Medien trennenden Fläche diejenigen Stellen der letzteren zu bestimmen, über die durch Reflexion oder Brechung ein Strahl von dem einen Punkte nach dem anderen gelangen kann. Je nachdem die beiden Punkte in demselben oder in verschiedenen Medien (auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Fläche) liegen, konstruiert man um sie die Schar der Flächen $l + l' =$ const. oder $nl + nl' =$ const. Jede Stelle der Trennungsfläche, welche von einer dieser aplanatischen Flächen berührt wird, hat die gesuchte Eigenschaft, weil für sie eben $\delta \Sigma nl = 0$ ist.

Das Problem der cartesischen Flächen ist im übrigen, wie schon bemerkt, von geringem praktischen Interesse. Die Untersuchung zeigt, daß die Kugel im allgemeinen keine cartesische Fläche ist; und weder bietet die Natur

---

[1] R. DESCARTES, Geometria. lib. II. p. 54. 1683. NEWTON, Principia. Book I. prop. 97. CHR. HUYGENS, Traité de la lumière. 1690. — [2] S. z. B. MEISEL, Geometrische Optik. Halle 1886. p. 148. — [3] Eine einfache Methode zur mechanischen Herstellung solcher Kurven siehe bei J. C. MAXWELL, Proc. of the Roy. Soc. of Edinburgh. II. April 1846 und Scient. Pap. Cambr. 1890. I. p. 1.

uns die anderen Arten cartesischer Flächen dar, noch können künstlich solche exakt genug hergestellt werden, außer mit sehr bedeutender Mühe und nur in Fällen, wo die Abweichung der cartesischen Fläche von der Kugel äußerst gering ist, wie bei den astronomischen Reflektoren. (Eine Ausnahme bilden die sogen. Scheinwerfer.) Wir sind praktisch meist auf die Anwendung sphärischer Flächen angewiesen und haben es bei Naturprodukten (z. B. den Augen) meist mit Rotationsflächen von schwer genau angebbarer Art zu tun. Bei der Reflexion und Brechung an diesen werden die von einem Punkte ausgehenden Strahlen im allgemeinen nicht wieder streng in einen Punkt (homozentrisch) vereinigt.

In Wirklichkeit werden aber auch an die optischen Instrumente viel weiter gehende Anforderungen als die Abbildung eines Punktes in einen anderen gestellt; und diese brauchen bei den kartesischen Flächen durchaus nicht besonders gut erfüllt zu sein.

Allgemeines optisches Strahlenbüschel; die charakteristische Funktion. Da als optisches Strahlenbüschel, wie in der Einleitung hervorgehoben, nur ein solches angesehen werden kann, welches in letzter Instanz auf einen selbstleuchtenden Punkt (Oszillationszentrum) zurückgeführt werden kann, so hat ein solches gemäß dem Satz von MALUS auch stets ein System von Orthogonalflächen.

Aus dem oben gelieferten Beweise des MALUSschen Satzes ergibt sich auch, daß die optische Weglänge zwischen zwei Normalflächen auf jedem Strahle dieselbe ist. Bezeichnen wir daher die optische Weglänge etwa von der ursprünglichen oder einer beliebig gegebenen festen Orthogonalfläche der betrachteten Strahlen bis zu einem beliebigen Punkte xyz, auf demjenigen Strahle des Büschels gemessen, der durch xyz hindurchgeht, also $\sum_0^{xyz} n\,l$ mit $V(xyz)$, so sind die Flächen

$$V(xyz) = \text{const.}$$

die sämtlichen Orthogonalflächen des gegebenen Strahlensystems.

Die optische Weglänge zwischen irgend zwei auf einem Strahle gelegenen Punkten wird dann durch die Differenz der Werte angegeben, die die Funktion V in ihnen hat. Sie spielt daher eine ähnliche Rolle, wie das Potential in der Lehre von den anziehenden Kräften, dessen Differenz für zwei verschiedene Punkte den Betrag der zwischen ihnen geleisteten Arbeit darstellt. Die Existenz dieser Funktion ergibt alle allgemeinen Sätze über optische Lichtbüschel, von den wir im folgenden einige, jedoch mit etwas anderen Hilfsmitteln (den Normaleneigenschaften) ableiten werden. Die Funktion V ist von HAMILTON[1] abgeleitet und charakteristische Funktion genannt worden.

HAMILTONS Ansätze beschränken sich nicht auf die von uns betrachteten Fälle, sondern gelten auch für kontinuierlich variable und anisotrope Medien. Für die anisotropen Medien verliert der MALUSsche Satz seine Gültigkeit[2], während das Prinzip des kürzesten Lichtweges und die Existenz der charakteristischen Funktion (die man im allgemeinen Falle aus diesem Prinzip ableitet) bestehen bleibt. Seine Methode führte HAMILTON zu der berühmten theoretischen Entdeckung der konischen Refraktion. Auf den Zusammenhang mit den Arbeiten HAMILTONS auf mechanischem Gebiete hat F. KLEIN hingewiesen (Vortrag auf der Naturforscherversammlung in Halle 1891).

Die Kenntnis der charakteristischen Funktion eines Büschels gestattet, zu irgend einem Punkte xyz die Richtung des durch ihn hindurchgehenden Strahles zu finden. Dieser ist die Normale zu der Wellenfläche, die den Punkt enthält, in diesem Punkte errichtet. Für seine Richtungskosinus $\alpha\beta\gamma$ gilt also

---

[1] W. R. HAMILTON, Trans. Irish. Acad. **15.** 69. 1828 (vorgetragen 1824); **16.** 1. 94. 1830 31; **17.** 1. 1837. Ein kurzer Bericht und ein Beispiel in POGG. Ann. **28.** 633. 1833; **29.** 324. 1834. — [2] SOPHUS LIE hat durch eine Erweiterung der Krümmungstheorie den MALUSschen Satz so verallgemeinert, daß dieser Satz auch in den ausgeschlossenen Fällen bestehen bleibt. Vgl. Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. Math. Phys. Cl. **48.** 130. 1896.

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial z}$$

und infolge der Bedeutung von V als optischer Weglänge:

$$n\alpha = \frac{\partial V}{\partial x} \quad , \qquad n\beta = \frac{\partial V}{\partial y} \quad , \qquad n\gamma = \frac{\partial V}{\partial z} \quad ,$$

woraus sich, weil $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = n^2$$

ergibt.

HAMILTON hat für diese Gleichung ein (nicht explicite hinzuschreibendes) Integral und eine Reihentwickelung desselben gegeben, die für die Punkte in der Umgebung eines beliebig angenommenen Büschelstrahles gilt; die Anwendung auf ein achsensymmetrisches System ergab Aberrationsformeln.

Nach der Wellentheorie sind diese Schlüsse durch die Anschauung unmittelbar gegeben. Die Kenntnis der charakteristischen Funktion bedeutet die Kenntnis des ganzen Verlaufs einer Welle. $V(x\,y\,z)$ ist die Lichtzeit (die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum gleich 1 gesetzt) als Funktion des Ortes; $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ sind die Komponenten des Reziproken der Normalengeschwindigkeit der Welle, die in dem Falle isotroper Mittel mit der Strahlengeschwindigkeit identisch ist.

An einer brechenden Fläche ändert sich V stetig. Sind V_1 und V_2 die beiden verschiedenen Formen der charakteristischen Funktion im ersten und zweiten Medium (die Reflexion bildet auch hier einen einfachen Spezialfall), so ist an der Grenzfläche, wie sich aus der Bedeutung ergibt,

$$V_2 - V_1 = 0$$

und diese Gleichung ist eine andere Form der Gleichung der Grenzfläche

$$u(x\,y\,z) = 0 \quad .$$

Die Funktion V_2, die den Verlauf des Büschels im zweiten Medium angibt, ist also, wenn V_1 und die Grenzfläche u gegeben ist, als die Lösung der partiellen Differentialgleichung zu finden, die für $u = 0$ in die gegebene Funktion V_1 übergeht, eine den Problemen der Potentialtheorie analoge, im allgemeinen unlösbare Aufgabe.

Die Differentialquotienten von V sind an der Grenzfläche unstetig, denn es ist dort

$$\frac{\partial (V_2 - V_1)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ,$$

$$\frac{\partial (V_2 - V_1)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad ,$$

$$\frac{\partial (V_2 - V_1)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} \quad .$$

Setzen wir

$$V_2(x'y'z') - V_1(x\,y\,z) = \sum_0^{x'y'z'} n\,l - \sum_0^{x\,y\,z} n\,l = \sum_{x\,y\,z}^{x'y'z'} n\,l = F(x\,y\,z\;x'y'z') \quad ,$$

wo $x'y'z'$ ein im zweiten Mittel, aber auf der Fortsetzung des Strahles durch $x\,y\,z$ liegender Punkt ist, so ist F eine Funktion, die dieselbe bleibt, solange die Fläche u und die

Brechungsquotienten der angrenzenden Medien unverändert bleiben, welches auch das einfallende und gebrochene Büschel, d. h. wie auch V_1 und V_2 beschaffen sein mögen. Denn da

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial V_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial V_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{\partial V_1}{\partial z}$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{\partial V_2}{\partial x'}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial V_2}{\partial y'}, \quad \frac{\partial F}{\partial z'} = \frac{\partial V_2}{\partial z'} .$$

so muß U in dem einen Mittel der Gleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{d z^2} = n^2 ,$$

im anderen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2} = n'^2$$

genügen und für gleichzeitiges Bestehen von

$$u(x\,y\,z) = 0$$

und

$$u(x'y'z') = 0$$

infolge der Bestimmung, daß $x\,y\,z$ und $x'y'z'$ auf demselben Strahle liegen, den Wert 0 annehmen.

Während also die Funktion V ein Büschel charakterisierte, das mit ihrer Hilfe vor und nach der Brechung durch die gegebene Fläche verfolgt werden konnte, so kennzeichnet die Funktion F die brechende Fläche und die angrenzenden Medien, oder „das optische System". Sie ist offenbar die optische Weglänge, die zwischen einem beliebigen Punkte $x\,y\,z$ und einem anderen $x'y'z'$ liegt, und da im allgemeinen von dem einen Punkte zum anderen nur ein wirklicher Lichtweg besteht (oder eine endliche Anzahl von Lichtwegen), so besitzt diese Lichtzeit als Funktion der Endpunkte einen bestimmten Wert (oder eine endliche Anzahl von Werten).

Die Funktion F ergibt die Richtung des Strahlenweges durch zwei beliebige Punkte $x\,y\,z$ und $x'y'z'$ in diesen Punkten als Funktion ihrer Koordinaten, denn wir erhalten nach dem oben Gesagten

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -n\alpha, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -n\beta, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -n\gamma,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = n'\alpha', \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = n'\beta', \quad \frac{\partial F}{\partial z'} = n'\gamma' .$$

Die ganze Schlußweise läßt sich leicht für beliebig viele brechende Flächen erweitern. Hier haben wir es nur mit den Eigenschaften der Büschel zu tun, die durch die Funktion V geliefert werden; und es soll nur auf den einfacheren Zusammenhang zwischen V und F hingewiesen werden, deren begriffliche Verschiedenheit in dem HERMANschen[1] Lehrbuche betont worden ist. Wir werden die Funktion F in der allgemeinen Theorie der optischen Systeme unter weiteren Voraussetzungen ableiten.

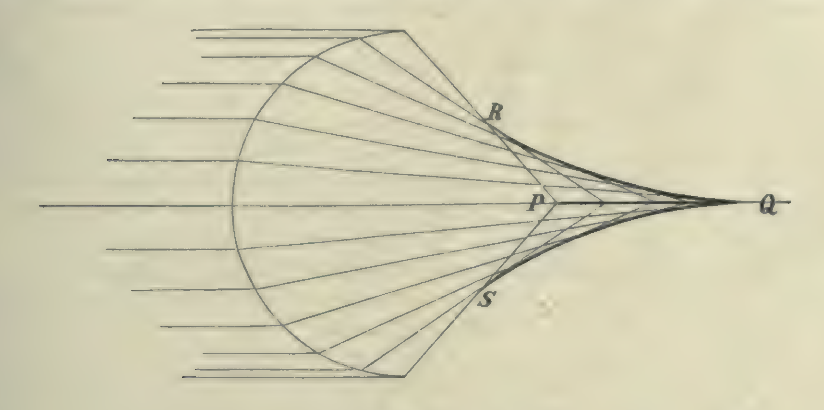
In der Anwendung sind die beiden Funktionen oft nicht unterschieden worden. HAMILTON legt im dritten Supplement zu seiner Abhandlung über Strahlensysteme die Funktion F zugrunde, geht aber bei Betrachtung der Brechung und Reflexion auf die Eigenschaften von V zurück, welches ja auch durch Spezialisierung aus F zu erhalten ist; andere Anwendungen der charakteristischen Funktion bei MAXWELL (Über die Brennlinien eines gebrochenen Büschels[2]), die Abhandlungen MAXWELLS zur allgemeinen Theorie der optischen Instrumente, v. HELMHOLTZ (Prismen), andere von LARMOR und HERMAN, sowie die der Funktion F verwandten zur Charakterisierung optischer Systeme benutzten Funktionen werden wir a. betr. O. besprechen.

Kaustiken (Brennflächen). Wir gehen wieder auf den Satz zurück, daß zu jedem optischen Strahlenbüschel ein System von Orthogonalflächen gehört. „Jedem optischen Büschel, wie auch immer es entstanden sei, werden daher die Eigenschaften zukommen, welche die Normalen stetig gekrümmter Flächen besitzen. Die Theorie der letzteren lehrt aber, daß, wenn wir uns durch einen beliebigen Strahl a eine Ebene gelegt denken, welche die Fläche in einer Kurve schneidet und diese Ebene um den Strahl drehen, die Kurve im allgemeinen im Schnittpunkte mit a

[1] A Treat. on geom. Optics. Cambridge 1900. p. 257. — [2] J. C. MAXWELL, London Math. Soc. IV. 1873; Coll. Pops. II. p. 332.

verschiedene Krümmung besitzt und daß die Ebene der größten Krümmung der Schnittkurve senkrecht steht auf der Ebene ihrer kleinsten Krümmung. Von den dem Strahl a unendlich nahen Normalen der Wellenfläche — welche also benachbarte Strahlen sind — schneiden daher diejenigen, deren Fußpunkte in der Linie größter oder kleinster Krümmung liegen, den Strahl a in dem Mittelpunkte bezüglich des größten oder kleinsten Krümmungskreises; die anderen dagegen schneiden den Strahl a gar nicht. Auf jedem Strahle gibt es also im allgemeinen zwei Brennpunkte, in denen er von benachbarten Strahlen geschnitten wird, welche Punkte den Mittelpunkten der größten und kleinsten Krümmung im Fußpunkte des Strahles der Wellenfläche entsprechen. Nur wenn die Krümmung der Wellenfläche in dem Fußpunkte des Strahles nach allen Richtungen gleich groß ist, wird der Strahl von allen, ihm unendlich benachbarten in einem Punkte geschnitten" (HELMHOLTZ).

Die Strahlen, deren Fußpunkte in einer Krümmungslinie der Wellenfläche liegen, schneiden einander bei endlicher Ausdehnung jener Linie sukzessive in



Figur 6.

Brechung eines parallelen Büschels an einer Kugel von höherem Index (Meridianschnitt).

verschiedenen Punkten. Sie sind daher die Einhüllenden einer Kurve, die aus lauter Brennpunkten unendlich benachbarter Strahlen gebildet ist. Dieselbe heißt daher Brennkurve oder Kaustik. Die aufeinander folgenden Krümmungslinien einer Wellenfläche geben ebenso viele Brennlinien, welche insgesamt eine Fläche, die Brennfläche des Strahlensystems, bilden. Da es zwei Scharen von Krümmungslinien gibt, so gibt es im allgemeinen zu jeder Orthogonalfläche auch zwei Brennflächen, und jeder Strahl ist gemeinsame Tangente beider Flächen.

Besonders einfach ist der Fall, wo die Wellenfläche eine Rotationsfläche ist. Die eine Schar von Krümmungslinien sind dann die Meridiankurven der Fläche und die ihnen entsprechende Kaustik ist eine Fläche, welche durch Rotation der Evolute der Meridiankurve um die Symmetrieachse entsteht. Die andere Schar von Krümmungslinien entspricht den Breitenkreisen der Erdkugel, d. h. es sind parallele Kreise, deren Mittelpunkte auf der Symmetrieachse liegen. Die zu ihnen gehörigen Normalen bilden je einen geraden Kreiskegel und schneiden die Achse je in einem Punkte. Die zweite Brennfläche ist daher reduziert auf ein Stück der Achse. Den Charakter einer solchen Brennfläche veranschaulicht Figur 6 im Meridianschnitt. Hier ist RQS die Erzeugende der einen Brennfläche; PQ die Gerade, in welche die andere Brennfläche hier degeneriert ist. (Die Figur stellt den Fall der Brechung eines parallelstrahligen Büschels an einer Kugel vom Index 1·5 dar.)

Mit der Aufgabe, die Gestalt der Kaustiken in besonderen Fällen zu bestimmen, wollen wir uns hier ebenfalls nicht weiter beschäftigen, da sich auch an diese mehr ein mathematisches, als ein physikalisches oder praktisches Interesse knüpft[1].

Bemerkt werden muß, daß Untersuchungen über die Intensität in den Punkten einer Kaustik und namentlich über die Intensitätsverteilung in Schnittebenen mit solchen, auf dem Boden der geometrischen Optik allein angestellt[2], einen sehr beschränkten Wert haben und meist ganz illusorisch sind. Denn die Brennpunkte, welche die Kaustik formieren, sind solche von unendlich dünnen Büscheln, würden also für sich allein (wegen des weitgehenden Diffraktionseffekts so schmaler Wellenzüge) fast gar nicht mehr den Regeln der geometrischen Optik folgen. In benachbarten Brennpunkten kommt aber das Licht mit stetig verschiedener Phase an und die Helligkeit sowohl in den Punkten der Kaustik selbst, als in denen einer Schnittebene hängt von den Phasen der sie treffenden Elementarwellen in hohem Grade ab. Wenn daher auch die nach den Reflexions- und Brechungsgesetzen berechnete Kaustik im großen und ganzen die Stellen hervorstechender Lichtkonzentration richtig angibt, insofern sie eben aus wirklichen Brennpunkten gebildet ist, so kann doch näheres über die Lichtverteilung eines optischen Büschels nur mit Hilfe der Undulationstheorie, nämlich des Interferenzprinzips, ermittelt werden. Eine auf dieser Grundlage stehende Untersuchung, wie sie zuerst AIRY[3] mit spezieller Rücksicht auf den Regenbogen geführt hat, gibt auch Rechenschaft von den in der Nähe jeder Kaustik beobachtbaren, lichtschwächeren Wiederholungen derselben (den überzähligen Bogen), für welche die geometrische Optik gar keine Erklärung zu liefern vermag; die neuere Literatur und Ergebnisse s. in der Einleitung des folgenden Kapitels.

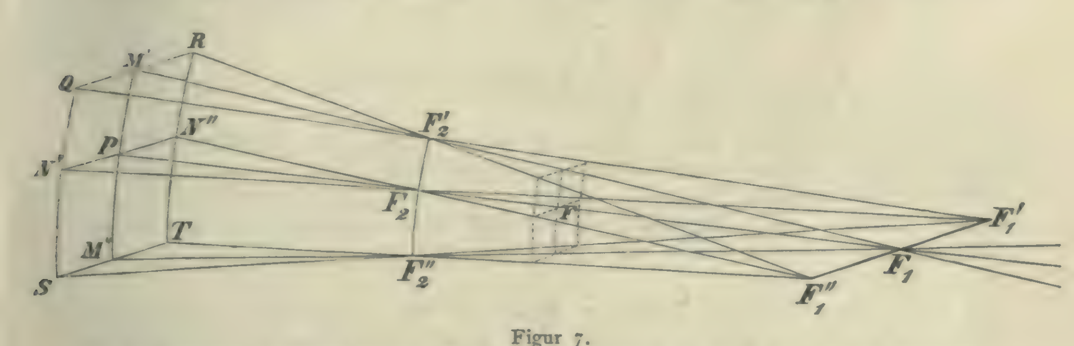
Allgemeine Konstitution eines unendlich dünnen, optischen Strahlenbüschels. Es wurde schon oben bemerkt, daß ein beliebiger Strahl des Büschels im allgemeinen nur von den in zwei bestimmten Ebenen ihm unendlich benachbarten Strahlen geschnitten wird, nämlich von den in der Ebene der größten und der kleinsten Krümmung der Orthogonalflächen gelegenen Nachbarstrahlen. Suchen wir eine nähere Vorstellung von der Lagenbeziehung der Strahlen, welche ein unendlich dünnes Büschel bilden, zu gewinnen. Denken wir uns zu diesem Zwecke durch einen Punkt P der Wellenfläche die Bögen größter und kleinster Krümmung gelegt, $M' M''$ und $N' N''$, welche aufeinander in P senkrecht stehen. Die Mittelpunkte dieser Bögen, also die Brennpunkte des durch P gehenden Strahles seien F_1 und F_2; wir wollen sie kurz ersten und zweiten Brennpunkt nennen. Den durch P gehenden Strahl bezeichnen wir als „Hauptstrahl“ des ganzen Büschels; derselbe ist zugleich Hauptstrahl der ebenen Partialbüschel $M' F_1 M''$ und $N' F_2 N''$. Die Bögen der größten und kleinsten Krümmung in einem P benachbarten Punkt, z. B. M', stehen ebenfalls aufeinander senkrecht. Es wird aber auch wegen der Kleinheit des betrachteten Elements der Wellen-

---

[1] Man findet die Literatur über Kaustiken ziemlich vollständig samt der über „Strahlenbüschel“ in E. VERDET, Die Wellentheorie des Lichtes, übersetzt von EXNER. Braunschweig 1881. **1.** 7 u. 8. Wir fügen zu dieser nur die Angabe einiger besonders wertvoller Abhandlungen, nämlich A. CAYLEY, Phil. Trans. 1857 u. 1867, und M. PASCH, CRELLES Journ. 1872. Außerdem kommen für diese Probleme die Lehrbücher der geometrischen Optik in Betracht, namentlich die von CODDINGTON, LOYD, MEISEL und HEATH. S. auch K. SCHELLBACH, Ztschr. f. d. phys. u. chem. Unter. **1.** 185. 283. 1888; **2.** 291. 1889; **4.** 129. 1891. Vortreffliche Zeichnungen in dessen und F. ENGELS Darstellender Optik, Halle 1878, wo aber stets nur auf den Meridianschnitt Rücksicht genommen ist. A. KIEFER, Progr. Thurg. Cantonsch. f. d. Jahr 1891/92. Frauenfeld 1892. H. BÖKLEN, Math. naturw. Mitteil. Tübingen III. 1890. Vgl. auch SALMON-FIEDLER, Höhere ebene Kurven. Leipzig 1882. — [2] S. z. B. S. FINSTERWALDER, Über Brennflächen und die räumliche Verteilung der Helligkeit bei Reflexion eines Lichtbündels an einer spiegelnden Fläche. Inaug.-Diss. Tübingen 1886. — [3] G. B. AIRY, Trans. Cambr. Soc. **6.** 379. 1838.

fläche, also des Bogens $M'P$, der Bogen $N'N''$ bis auf unendlich kleine Abweichungen parallel sein dem entsprechenden Bogen der zweiten Hauptkrümmung in M', QR, und der durch M' gehende Bogen der ersten Hauptkrümmung koinzidieren mit $M'M''$. Der Brennpunkt des ebenen Büschels $QM'R$ wird nun jedenfalls auf dem Hauptstrahl desselben liegen, d. i. auf dem durch M' gehenden Strahl. Dieser geht aber als Strahl des Büschels $M'M''$ durch F_1. Folglich verläuft das jetzt betrachtete ebene Büschel gänzlich in der Ebene QRF_1, und ebenso die durch andere zu $M'M''$ senkrechte Bögen gehenden Strahlen in den durch F_1 und diese Bögen gelegten Ebenen. Wo auch ihre Brennpukte F_2', F_2'' u. s. w. liegen mögen, es müssen alle diese Strahlenebenen, weil auf $F_1 M' M''$ senkrecht und durch F_1 gehend, sich in einer durch F_1 gehenden auf der Ebene $M'M''$ und daher auf dem Hauptstrahl PF_1 senkrechten Linie $F_1' F_1''$ schneiden. Wir nennen dieselbe die erste Brennlinie.

Genau dieselbe Betrachtung ist auf die zu $M'M''$ parallelen Bögen der ersten Hauptkrümmung QS, RT u. s. w. anwendbar. Die Hauptstrahlen dieser



Figur 7.
Ein optisches Elementarbüschel: $F_1' F_1 F_1''$ erste Brennlinie, $F_2' F_2 F_2''$ zweite Brennlinie.

ebenen Partialbüschel gehen, als Strahlen des Partialbüschels $N'PN''$, sämtlich durch den Brennpunkt dieses F_2. Alle diese ebenen Partialbüschel stehen außerdem auf der Ebene der zweiten Hauptkrümmung $F_2 N' N''$ senkrecht; sie schneiden sich also in einer auf $F_2 N' N''$ und damit auf dem Hauptstrahl PF_2 senkrechten Linie $F_2' F_2''$, welche wir zweite Brennlinie nennen wollen. Halten wir diese beiden Systeme ebener Partialbüschel zusammen, so ist klar, daß letztere Brennlinie nichts anderes repräsentiert, als die Brennpunkte der zuerst betrachteten ebenen Partialbüschel, und ebenso $F_1' F_1''$ die der jetzt betrachteten.

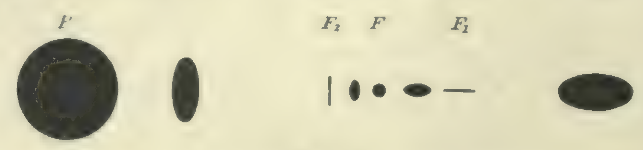
Wir haben also das Resultat: Die Gesamtheit der Strahlen eines unendlich dünnen optischen Büschels schneidet sich in zwei geraden Linien, den Brennlinien, welche in den beiden Brennpunkten des Hauptstrahles bezüglich auf diesem senkrecht stehen und in zueinander senkrechten Ebenen (den Hauptkrümmungsebenen der betreffenden Wellenfläche) liegen. In der durch den zweiten Brennpunkt gehenden Brennlinie liegen die Brennpunkte der zur ersten Hauptkrümmungsebene senkrechten ebenen Partialbüschel, d. h. derjenigen zweiter Art und umgekehrt (**Sturmscher Satz**)[1].

Man sieht, daß aus den beiden Brennlinien und dem Hauptstrahl das ganze Büschel konstruierbar ist. Man hat nur jeden Punkt der einen Brennlinie mit jedem der anderen zu verbinden und hierbei stets unendlich nahe dem Hauptstrahl zu bleiben.

[1] J. B. STURM, Journ. de Liouville **3**. 357. 1838; übersetzt in POGG. Ann. **65**. 116. 374. 1845; C. R. **20**. 554. 761. 1238. 1845.

Die Konstitution des Büschels ist aber auch bestimmt aus vier von seinen Strahlen, von denen nicht mehr als zwei durch je einen Punkt einer Brennlinie gehen.

Ebenen senkrecht zum Hauptstrahl schneiden das Büschel in Figuren von verschiedener Gestalt, je nach dem Ort des Schnittes und je nach der Begrenzung des Büschels auf der brechenden Fläche bezw. der Wellenfläche. An einer Stelle F zwischen den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 ist der Schnitt des Büschels u. s. w. ähnlich seiner anfänglichen Begrenzung (Stelle der geringsten Zerstreuung genannt); und zwar ist $FF_2 : F_1F = PF_2 : PF_1$. Figur 8 gibt die



Figur 8.
Die aufeinanderfolgenden Querschnitte eines unendlich dünnen optischen Büschels, das bei P kreisförmig begrenzt ist.

Formen an, die der Querschnitt eines ursprünglich kreisförmig begrenzten Büschels hintereinander annimmt.

Für die Herleitung des Vorstehenden war wesentlich die Annahme, daß die gleichnamigen Hauptkrümmungsebenen in benachbarten Punkten eines unendlich kleinen Flächenelements einander merklich parallel seien. Dies findet aber nicht streng, sondern im allgemeinen nur bis auf Abweichungen von der zweiten Ordnung statt. Daher gelten die abgeleiteten Beziehungen auch nur mit derselben Annäherung.

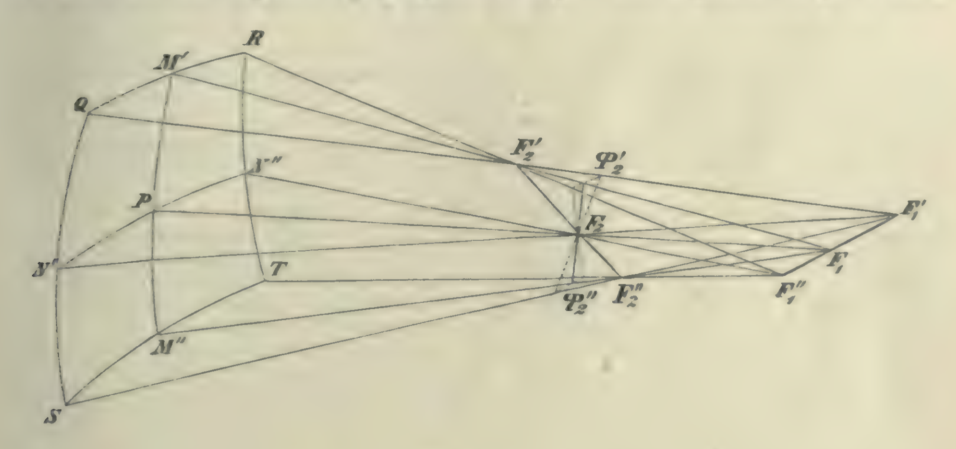
Geht man über diese hinaus, so kann man jeder Wellenfläche eine andere Fläche näher anschmiegen, als, wie vorhin implizite angenommen, den Scheitel eines elliptischen Paraboloids und es sind dann deren Hauptkrümmungen der Betrachtung zugrunde zu legen[1]. Die ebenen Partialbüschel, z. B. der ersten Hauptkrümmungen, schneiden dann die zum Hauptstrahl gehörige Ebene der zweiten sukzessive in verschiedenen Linien, welche in jener Ebene mit dem Hauptstrahl alle beliebigen Winkel einschließen können, und desgleichen im allgemeinen die Partialbüschel der zweiten Hauptkrümmung die Ebene der ersten Krümmung. Mit Berücksichtigung der Größen der zweiten Ordnung gehen durch die beiden Brennpunkte des Hauptstrahles also keine Brennlinien, sondern Brennflächenstücke. Im besonderen kann dann auch der Fall eintreten, daß diese Brennflächenstücke in Linien degenerieren, welche aber oft gegen den Hauptstrahl merklich anders als senkrecht geneigt sind, wofür gerade die Brechung eines homozentrischen Büschels an einer Rotationsfläche ein Beispiel gibt. Und wenn infolge der gegebenen Bedingungen ein Büschel von endlicher Dicke im wesentlichen dieselbe Konstitution hat, wie ein solches unendlich dünnes, — was sehr wohl der Fall sein kann — so werden die Abweichungen von dem vorhin statuierten auch der Beobachtung zugänglich werden können. Aber diese Überlegung kann den Sturmschen Satz als solchen natürlich nicht aufheben, da dieser Gültigkeit ja nur innerhalb der angezeigten Genauigkeitsgrenzen beansprucht.

Im allgemeinen ist ja die Strahlenvereinigung in den Brennpunkten bezw. Brennlinien selbst nur eine solche von erster Ordnung. Es können daher der Natur der Sache nach Sätze, welche sich auf die allgemeinen Eigenschaften

[1] A. Matthiessen, Münch. Sitzber. **13.** 44. 1883; Acta mathem. IV. **2.** 185. 1884, und Schlömilchs Ztschr. f. Math. u. Phys. 29. Supplbd. p. 86. 1884; **33.** 167. 1888; ferner A. Weingarten, Crelles Journ. **98.** 281. 1885 und A. Matthiessen, Ztschr. f. vergl. Augenheilk. **6.** 106. 1889. S. auch S. Czapski, Wied. Ann. **42.** 332. 1891.

optischer Strahlenbündel beziehen, keine Beziehung auf die Größen der zweiten Ordnung enthalten und umgekehrt Sätze, welche auf diese Größen Rücksicht nehmen, nicht ebenso allgemein sein, wie STURMsche Satz.

Daß auch in den Fällen, wo streng genommen, bis auf Abweichungen von höherer als der zweiter Ordnung spitzwinklig gegen den Hauptstrahl geneigte Brennlinien vorhanden sind, eine durch einen der Brennpunkte senkrecht zum Hauptstrahl gelegte Ebene mit dem Büschel nirgend einen Querschnitt von weniger als der zweiten Ordnung (im Vergleich mit der Breite des betrachteten Wellenflächenstückes) hat, also der STURMsche Satz richtig bleibt, zeigt eine einfache Überlegung (Figur 9). Ein z. B. durch F_2 gelegter senkrechter Querschnitt hat bei den in der Figur angenommenen besonders ungünstigen Verhältnissen seinen größten Querschnitt im Durchschnitt mit den äußersten ebenen Partialbüscheln QRF_2' und STF_2'' (bei rundlicher Begrenzung des Elements der Wellenfläche, an einer zwischen F_2 und Φ_2' gelegenen Stelle). Dieser Querschnitt q ist aber,



Figur 9.

Auch wenn mit Berücksichtigung höherer Ordnungen eine zum Hauptstrahl schiefe Brennlinie $F_2' F_2''$ auftritt, ergibt der zum Hauptstrahl senkrechte Schnitt $\Phi_2' \Phi_2''$ nur von der zweiten Ordnung unendlich kleine Breite des Büschels.

wenn wir $F_2 \Phi_2 = dr$, d. i. gleich der Differenz der zweiten Hauptkrümmungsradien in M und P und die mittlere Länge eines Hauptkrümmungsbogens zweiter Art wie $N' N'' = ds$ setzen $q = ds \cdot dr/r$ — also im allgemeinen unendlich klein gegen ds.

Das hier betrachtete unendlich dünne Strahlenbündel ist eine spezielle Art des allgemeinen geradlinigen Strahlenbüschels, welches nicht mehr die Eigenschaft hat, ein System von Orthogonalflächen zu besitzen. Ein solches wird in der Natur z. B. durch die irregulär in doppeltbrechenden Medien gebrochenen Strahlen repräsentiert. Die Eigenschaften dieses allgemeinen Büschels, deren Studium natürlich auch auf die des speziellen ein Licht wirft, insofern als es zeigt, welche von den Eigenschaften dieses letzteren auf seiner bloßen Geradlinigkeit, welche auf den besonderen Annahmen beruhen, hat besonders HAMILTON[1] studiert, dessen Methode oben bereits besprochen worden ist, nach ihm KUMMER[2], MÖBIUS[3], MEIBAUER[4] u. a. (s. die Literaturangaben in VERDET, l. c.).

[1] W. R. HAMILTON, l. c. — [2] E. E. KUMMER, CRELLEs Journ. **57**. 189. 1859; Berl. Monatsber. 1860. p. 969; Abh. Berl. Akad. d. Wissensch. 1866. — [3] A. F. MÖBIUS, Sitzber. Sächs. Akad. d. Wissensch. **14**. 1. 1862. — [4] R. MEIBAUER, Ztschr. f. Math. u. Phys. **8**. 369. 1863. Theorie der geradlinigen Strahlensysteme des Lichtes. Berlin 1864.

Nach den voranstehenden Festsetzungen kann als die Aufgabe der Dioptrik unendlich dünner Büschel, allgemein gefaßt, die ausgesprochen werden: wenn die Brechungsexponenten zweier Medien n und n', die Gestalt der sie trennenden Fläche $f(x, y, z) = 0$, die Richtung eines einfallenden Strahles und die Orte der Brennpunkte und Lagen der Brennlinien auf ihm gegeben ist, letztere drei Bestimmungsstücke auch für den gebrochenen bezw. reflektierten Strahl zu finden. CL. MAXWELL[1] und C. NEUMANN[2] haben allgemeine Lösungen dieser Aufgaben mitgeteilt unter der Annahme der Gültigkeit des STURMschen Satzes; MATTHIESSEN[3] ohne die letztere. Hier sei auf diese Darstellungen nur hingewiesen, die Aufgabe selbst werden wir später in einer Anzahl besonderer Fälle behandeln.

Historische Anmerkung. EUKLIDES (300 v. Chr.), dem Begründer der wissenschaftlichen Geometrie, ist auch die erste Grundlegung der geometrischen Optik zuzuschreiben. Er nimmt die Lichtstrahlen geradlinig an, aber, ebenso wie die griechischen Philosophen, als vom Auge ausgehend, und zwar in gleichen Entfernungen voneinander. Auf dieser Grundlage entwickelt er die Perspektive. In seiner „Katoptrik" folgert er das richtige Reflexionsgesetz ganz treffend aus der symmetrischen Gleichheit von Objekt und Bild bei ebenen Spiegeln HERO von Alexandrien 200 (?) v. Chr. leitete dasselbe Gesetz aus dem „Ökonomieprinzip" der Natur ab. Aber erst der Araber ALHAZEN (um 1100 n. Chr.) stellte fest, daß das Licht von den gesehenen Gegenständen ausgehe und bestimmte das Reflexionsgesetz näher durch die Feststellung, daß die Ebene, in welcher der einfallende und reflektierte Strahl verliefen, senkrecht auf der reflektierenden Ebene stünden. (ALHAZENI Opticae thesaurus libri VII; item VITTELLONIS libri X, Basel 1572). Die Anfänge der Lehre von der Brechung des Lichtes („Dioptrik" von KEPLER genannt, als Gegenstück zur „Katoptrik" des EUKLID) sind auf PTOLEMÄOS zurückzuführen (2. Jahrhundert n. Chr.), welcher Refraktionstafeln von anerkennenswerter Genauigkeit veröffentlichte. (GOVI, L'Ottica di Claudio Tolomeo, Turin 1885.) Nächst ihm wurde die geometrische Optik, nach fast tausendjährigem Stillstand, erst wieder von den Arabern zu studieren begonnen (ALHAZEN). Durch diese und die späteren, ROGER BACON, MAUROLYCUS, VITTELLO, PORTA und namentlich KEPLER wurden manche qualitative Eigenschaften der Reflexion und Brechung an gekrümmten Flächen gefunden, das Entstehen der Bilder im Auge, sowie die Ursache der Kurz- und Weitsichtigkeit angegeben, die sphärische Aberration entdeckt und die Grundzüge einer Theorie der Fernröhre geliefert. CARTESIUS hat dann neben wertvollen Spezialuntersuchungen, z. B. über Regenbögen, dem von WILLIBROD SNELLIUS (Anfang des 17. Jahrhunderts) gefundenen Brechungsgesetze die jetzt übliche bequemere Form gegeben (Dioptrice, enth. in Principia philosophiae. Amstelod. 1672) und NEWTON endlich erwies, daß der Brechungsindex caet. par. eine Funktion der Farbe sei. (Optics. London 1704.)

An einer auf neueren Forschungen beruhenden pragmatischen Geschichte der geom. Optik fehlt es. Sehr verdienstlich ist auch jetzt noch als Quellenwerk für die ältere Zeit WILDE, Geschichte der Optik. Berlin 1838—43.

Literatur. Neuere Gesamtdarstellungen der geometrischen Optik (der speziellen Katoptrik und Dioptrik und allgemeinen Theorie der optischen Instrumente): R. S. HEATH, A Treatise on Geometrical Optics. Cambridge 1887. 2. Aufl. 1895; Elementary Treatise, ibid. 1888. Eine Übersetzung des ersteren Werkes ins Deutsche von KANTHACK, Berlin 1894. Eine reichhaltige, aber mehr vom mathematischen Standpunkt aufgefaßte Darstellung. Dies gilt auch von L. A. HERMAN, A treatise on Geometrical optics. Cambridge 1900.

Eine durchaus elementare, dabei soweit tunlich auch in die eigentlich physikalischen und praktischen Fragen eindringende Darstellung der geometrischen Optik ist in der 9. Auflage von MÜLLER-POUILLETS Lehrbuch der Physik und Metereologie 2. Bd., 1. Abt., Braunschweig 1897 von O. LUMMER gegeben worden. Eine kurze Zusammenfassung des Wichtigsten enthält P. DRUDES Lehrbuch der Optik. Leipzig 1900. In Verbindung mit der reinen Undulationstheorie lieferte J. CLASSEN eine moderne Darstellung der wichtigsten Theorien der geometrischen Optik (ohne Eingehen auf die einzelnen Instrumente): Mathematische Optik. Leipzig 1901.

Unter den zahlreichen sonstigen Gesamtdarstellungen der geometrischen Optik (Katoptrik und Dioptrik) sind aus früherer Zeit als die bedeutendsten zu nennen:

R. SMITH, A compleat System of Opticks. 2 Bde. Cambridge 1738. Ein Teil dieses Werkes ist übersetzt („aus dem Englischen ins Deutsche und aus dem synthetischen Vortrage in den analytischen") von A. G. KÄSTNER, Vollständiger Lehrbegriff der Optik. Altenb. 1755. — L. EULER, Dioptrice. 3 Bde. Petrop. 1769—71. — J. HARRIS, A treatise of optics. London 1775. (Klare übersichtliche Darstellung der elem. Optik einschl. Aberration und des Sehens durch opt. Instrumente einschl. Auge). — G. S. KLÜGEL, Analytische Dioptrik. Leipzig 1778. (Auszug und Umarbeitung der EULERschen Dioptrik.) — J. F. W. HERSCHEL, Light. Encycl. Metrop. 1827, übersetzt von J. C. E. SCHMIDT, Stuttgart 1831. — H. CODDINGTON,

[1] J. C. MAXWELL, l. s. c. 1873. — [2] C. NEUMANN, Sitzber. Sächs. Akad. d. Wissensch. 1880. p. 42. — [3] A. MATTHIESSEN, Ztschr. f. Math. u. Phys. 33. 167. 1888.

Treatise on the refraction of light. London 1829. — H. LLOYD, Treatise on Light and Vision. London 1831. — R. POTTER, An Elementary Treatise on Optics London, pt. I, 1847 (3. Aufl. 1865), pt. II. 1851. — S. PARKINSON, A Treatise on Optics. London 1859. 4. Aufl. 1884. Die Literatur über die durch GAUSS angebahnte neue Richtung der Optik sowie die hervorragenderen Werke und Abhandlungen über besondere Gebiete werden betreffenden Orts angegeben werden.

Die ältere Literatur bis ca. 1830 ist ziemlich vollständig aufgeführt am Schlusse von LITTROWS Dioptrik, Wien 1830 und in der „Literatur der Optik" (o. O. u. J.) v. H. W. DOVE.

II. Die geometrische Theorie der optischen Abbildung.

(Nach den Universitätsvorlesungen von E. ABBE.)

Die verschiedenen Standpunkte für die Behandlung des Problems.

Mit dem im vorangehenden Kapitel Gegebenen ist dasjenige in der Lehre von der Spiegelung und Brechung des Lichtes, was ein unmittelbares physikalisches Interesse besitzt, ziemlich erschöpft. Der weitere Inhalt unserer Darstellung kann sich nunmehr nur noch auf die Anwendungen dieser Lehre beziehen. Diese begreifen einerseits die Erklärung gewisser — meist meteorischer — Naturerscheinungen in sich, andererseits liefern sie die Prinzipien für die Konstruktion oder das Verständnis der sogen. optischen Instrumente, die ihrerseits namentlich als Hilfsmittel der Forschung in- und außerhalb des physikalischen Gebietes eine große Bedeutung besitzen.

Wir wenden uns hier vornehmlich den letzteren zu.

Es handelt sich bei diesen in letzter Linie fast immer darum, daß durch Vermittelung von Reflexionen oder Brechungen (oder von Kombinationen beider) an geeignet geformten und zusammengestellten optischen Medien Bilder äußerer Gegenstände (oder Bilder solcher Bilder) hervorgebracht werden, und zwar besteht das Zustandekommen dieser Bilder stets darin, daß ein Teil der von je einem Punkte A des Gegenstandes ausgehenden Strahlen durch die Reflexionen und Brechungen, welche er erfährt, so modifiziert wird, daß er wieder nach einem Punkte, dem Bildpunkte A', konvergiert.

Man hat nun die Gesetze, welche zwischen den Bildern und ihren Objekten bestehen, bis in die neueste Zeit fast ausnahmslos in der Weise studiert, daß man die besonderen Fälle, in welchen eine Wiedervereinigung von homozentrisch divergierenden Strahlenbüscheln stattfindet, näher untersuchte, und nur auf Grund solcher spezieller Untersuchungen gelangte man schließlich durch Verallgemeinerung der gewonnenen Resultate zu gewissen allgemeineren Beziehungen. Auch GAUSS, dem der größte und wichtigste Fortschritt auf dem Wege solcher Verallgemeinerung der speziellen Theoreme zu verdanken ist, ging in seinen berühmten „Dioptrischen Untersuchungen"[1] von den besonderen Voraussetzungen zentrierter Kugelflächen, eines fadenförmigen achsialen Strahlen- und Abbildungsraumes, sowie von der Gültigkeit des Brechungsgesetzes selbst aus und ließ nur die bis dahin stets gemachte Einschränkung auf den Fall unendlich dünner in

[1] C. F. GAUSS, Dioptrische Untersuchungen. Göttingen 1841. Abh. Gött. Ges. d. Wiss. 1. 1838—43. Werke. 5. 243 1867.

Kontakt befindlicher Linsen, d. h. mit den Scheiteln koinzidierender sphärischer Flächen vollständig fallen. Ihn leitete ausgesprochener Maßen das Bestreben, die Gesetze der Abbildung durch beliebig zusammengesetzte Linsensysteme zurückzuführen auf gleich einfache Formen, wie sich bei einer einzelnen brechenden Fläche oder einer einzigen Linse verschwindender Dicke ergeben. Wiewohl er nun zeigte, daß in diesen Gesetzen die ursprünglichen Bestimmungsstücke des Systems (Radien, Dicken, Brechungsindizes) eine sehr beiläufige Rolle spielten, daß die Abbildung vielmehr von gewissen Konstanten viel allgemeinerer Art abhinge, so entging doch auch ihm anscheinend die Erkenntnis, daß alle Annahmen über die besondere Art der Verwirklichung einer optischen Abbildung den Kern der Frage, d. h. deren allgemeinen Gesetze überhaupt nicht tangieren. Es war aber schon damals bekannt und ist später noch öfters gezeigt worden, daß es noch andere Fälle dioptrischer Abbildung von sehr verschiedener Art gibt, wie: durch die Brechung (oder Reflexion) schiefer Büschel oder durch die Brechung achsialer Büschel an nicht zentrierten Systemen von Kugelflächen, auch durch Brechung von Büscheln beider Art an anderen als sphärischen Flächen, endlich auch durch eine Art von Strahlenvereinigung, die gar nicht mehr rein dioptrischer Natur ist[1]. In allen diesen Fällen konnte und mußte immer erst besonders gezeigt werden, daß auch sie schließlich zu ganz gleichartigen Größen- und Lagenbeziehungen zwischen Objekt und Bild führen, wie sie von GAUSS für den von ihm betrachteten Fall gefunden waren.

Wenn nichts anderes, so müßte diese Übereinstimmung in den allgemeinen Resultaten von Untersuchungen, die teilweise auf so verschiedener Basis angestellt waren, den Gedanken nahelegen, daß die gedachten Beziehungen überhaupt gar nicht von den besonderen Voraussetzungen abhängen, auf Grund deren sie jedesmal von neuem abgeleitet worden sind, sondern daß sie eine Folge sind der bereits erwähnten viel allgemeineren und rein geometrischen Voraussetzung, daß eine Abbildung durch Strahlen überhaupt stattfinde. Eine nähere Betrachtung zeigt, daß sich dies in der Tat so verhält.

MÖBIUS hat, wie es scheint, zuerst[2] darauf hingewiesen, daß die „achsiale" Abbildung durch eine einzelne brechende sphärische Fläche die Verhältnisse der kollinearen Verwandtschaft zum Ausdruck bringt, und daß infolgedessen alle Theoreme über die Wirkung auch beliebig zusammengesetzter Systeme brechender und spiegelnder Flächen nichts als eine einfache und direkte Abfolge dieser durch eine Brechung involvierten Beziehung von Objekt und Bild seien. Ihm sind in der Darstellung mehrere gefolgt[3], seine Theorie unter Zuhilfenahme der Betrachtungen der neueren Geometrie weiter ausbauend und begründend, ohne aber die Voraussetzung aufzugeben, welche auch er noch festgehalten hatte: daß zur Verwirklichung der kollinearen Beziehung eine gewisse Art der dioptrischen Wirkung nötig sei. Hiernach scheinen immer noch die gefundenen Gesetze optischer Bilder abhängig von den physikalischen Vorgängen, durch deren Vermittelung sie entstehen.

Nun hat ABBE, ohne Kenntnis der MÖBIUSschen Arbeit (seit Anfang der siebziger Jahre in seinen Universitätsvorlesungen) den letzten noch übrig bleibenden Schritt getan: bei der Ableitung der allgemeinen Gesetze der optischen Abbildung alle Voraussetzungen über die Verwirklichung der letzteren zunächst ganz beiseite zu lassen. Das einigermaßen überraschende Resultat dieser Untersuchung ist dies: daß alle die allgemeinen Sätze, welche die Lagen- und Größenverhältnisse optischer Bilder betreffen, sowie die dabei aufgestellten

[1] S. z. B. S. EXNER, PFLÜGERS Archiv f. d. ges. Physiol. **38.** 274. 1886. — [2] A. F. MÖBIUS, Sitzber. Sächs. Ges. d. Wiss. 1851. p. 8. — [3] F. LIPPICH, Mitt. d. naturw. Vers. Steiermark **2.** 1. 1871. A. BECK, Ztschr. f. Math. u. Phys. **18.** 588. 1873. H. HANKEL, Elemente der projektiven Geometrie. Leipzig 1875. p. 146.

Begriffe (der Brennweiten, Brennpunkte und sonstigen Kardinalelemente) gänzlich unabhängig sind von den physikalischen und geometrischen Bedingungen ihres Entstehens; daß sie nichts anderes sind, als der Ausdruck mathematisch notwendiger Beziehungen, die sich überall da vorfinden müssen, wo auf irgend eine Weise zwei Raumgebiete in solche Beziehungen zueinander treten, daß eine optische Abbildung des einen in das andere stattfindet.

Unter optischer Abbildung ist dabei wie oben eine Abbildung der Punkte vermittelst gerader Strahlen verstanden, also eine Abbildung, bei welcher jedem Punkte des einen Raumes ein und nur ein Punkt des anderen entspricht und der Strahlengruppe, welche durch den ersteren Punkt geht, im anderen Raume Strahlen entsprechen, die sämtlich durch den Bildpunkt gehen.

Diese beiden Merkmale sind ausreichend, um den Begriff einer bestimmten Art von Abbildung festzulegen, und es sind zugleich die einzigen wesentlichen Merkmale, durch welche die Abbildungsweise charakterisiert wird, welche durch Lichtstrahlen unter Vermittelung spiegelnder oder brechender Flächen irgendwann zustande kommt. Von den speziellen geometrischen und physikalischen Umständen der Abbildung hängt nichts weiter ab, als einerseits die numerischen Werte der Konstanten, welche in den allgemeinen Abbildungsgleichungen auftreten, und dort, mangels einer besonderen Voraussetzung, natürlich unbestimmt bleiben müssen; zweitens die Bestimmung darüber, in weichem begrenzten Raumgebiet, bezw. unter welchen sonstigen Einschränkungen der allgemeine Fall der Abbildung in dem betrachteten Sonderfall verwirklicht ist und drittens endlich die geometrische Lokalisierung der ineinander abgebildeten Räume und ihre Lagebeziehung gegen die Grenzen der angewandten physischen Mittel.

„Es scheint aber keineswegs überflüssig, diese Auffassung, d. h. diese Scheidung dessen, was schon aus dem allgemeinen Begriffe der optischen Abbildung folgt, und dessen, was erst Folge der speziellen dioptrischen Voraussetzungen ist, in der Theorie der optischen Instrumente möglichst streng durchzuführen. Denn für jede verständige Anwendung einer Lehre ist die richtige Bestimmung der zureichenden und notwendigen Voraussetzungen derselben ein wesentliches Erfordernis. Bei der üblichen Darstellungsweise aber wird diese Bestimmung zum mindesten außer acht gelassen, wenn nicht geradezu falsch getroffen. Hierdurch wird die theoretische Erörterung vieler konkreter Fragen in eine falsche Bahn gewiesen, und die zutreffende Anwendung der Theorie oft genug verhindert oder doch erschwert.“ Dies gilt z. B. namentlich in bezug auf die oft diskutierten Fragen, welche die Grenzen der Leistungsfähigkeit der optischen Werkzeuge (auch vom Standpunkte der geometrischen Optik aus) betreffen.

Abbe hat jedoch[1] in seiner Betrachtungsweise einen Vorgänger gehabt, der die Theorie der optischen Bilder ebenfalls schon ohne Voraussetzung einer bestimmten Verwirklichungsweise, aber allerdings mit einigen unnötigen Einschränkungen entwickelt hat, nämlich J. Cl. Maxwell. Es scheint, daß dessen Abhandlung On the general laws of optical instruments[2] in dem hier betrachteten Zusammenhange bisher nirgends genügend gewürdigt worden und ohne Einfluß geblieben ist; und daß ihre Bedeutung erst jetzt, wo die auch in ihr enthaltene Auffassungsweise bereits mit Nutzen durchgeführt ist, klar hervortritt.

Maxwell setzt allerdings bereits ein achsensymmetrisches Instrument voraus, untersucht aber die durch das Instrument vermittelte Abbildung, ohne auf dessen Einrichtung Rücksicht zu nehmen, und setzt nur voraus, daß die Punkte zweier achsensenkrechter Objektebenen in die Punkte zweier ebensolcher Bildebenen mittels gerader Strahlen abgebildet werden und eine Figur der Bildebene stets der entsprechenden der Objektebene ähnlich und ähnlich gelegen sei. Aus dieser Voraussetzung folgt in dem angenommenen Falle des symmetrischen Systems die Voraussetzung Abbes, daß der ganze Raum punktweise abgebildet werde,

[1] wie sich bei der Durchsicht älterer Literatur herausstellte. — [2] J. Cl. Maxwell, Phil. Mag. 1856; Quat. Journ. **2**. 233. 1858; Scient. Paps. Cambridge 1890. p. 271.

was Maxwell selbst nachweist, auch ergibt sich dieser Satz und seine Umkehrung aus unseren folgenden Betrachtungen. Freilich macht sich Maxwell nicht frei von einer speziellen Lagenbeziehung zwischen Objekt- und Bildraum. Seine Betrachtungen haben daher auch aus diesem Grunde nicht die Allgemeinheit der folgenden, sie sind z. B. nicht ohne weiteres auf die Abbildungen anwendbar, die bei schiefer Brechung in zwei zu einander senkrechten Ebenen entstehen.

Die allgemeinen Gesetze der optischen Abbildung.

Herleitung der Abbildungsgleichungen.

Nehmen wir also — unter Weglassung aller besonderen Voraussetzungen — an, daß eine „optische Abbildung" stattfinde, d. h. wie oben definiert, eine Abbildung eines Raumgebietes in ein anderes mittels geradliniger Strahlen in der Art, daß den durch den einen Punkt P des Raumes R (des Objektraumes) gehenden Strahlen, im Raume R' (dem Bildraum) Strahlen entsprechen, die sämtlich wieder durch einen Punkt P', das Bild des Punktes P, gehen. Aus dieser, der oberflächlichsten Erfahrung über die faktische Entstehung optischer Bilder zu entnehmenden Charakteristik der Abbildungsweise folgen dann alle weiteren wesentlichen Merkmale derselben.

1. Zunächst ist aus ihr zu schließen, daß die gedachte Abbildung eindeutig ist — da die Strahlen als geradlinige sich paarweise nur in je einem Punkte schneiden, also auch zu einem Objektpunkte geometrisch wie physisch nur einen konjugierten oder Bildpunkt zu Folge haben können.

2. Den Punkten auf einer geraden Linie in einem Raume entsprechen als Bilder Punkte im anderen Raume, die wieder auf einer Geraden liegen. Denn dem Strahle S, welcher durch die auf einer geraden Linie gelegenen Punkte $P_1\ P_2\ P_3$ hindurchgeht, entspricht laut Annahme ein Strahl S' im Bildraume, der nach unserer Grundannahme durch jeden der drei jenen $P_1\ P_2\ P_3$ konjugierten Punkte $P_1'\ P_2'\ P_3'$ hindurchgeht, und da der Strahl geradlinig ist, so liegen $P_1'\ P_2'\ P_3'$ auf einer geraden Linie. (Über die Punktfolge auf konjugierten Geraden ist hierdurch natürlich noch nichts bestimmt; dieselbe ergibt sich erst später.)

Dieses gegenseitige eindeutige Entsprechen von Punkten und Geraden bezeichnet die Geometrie bekanntlich als „Kollineation" oder „kollineare Verwandtschaft". Es ist also im vorangehenden bereits bewiesen, daß jede optische Abbildung die beiden Abbildungsräume in kollineare Verwandtschaft setzt.

Mit Hilfe der Betrachtungen der neueren Geometrie ergeben sich die Eigenschaften der optischen Abbildung hiernach sehr schnell. Da aber die uns mit in erster Reihe interessierenden Maßbeziehungen auf dem synthetischen Wege stets etwas umständlicher abzuleiten sind und im Interesse der Allgemeinverständlichkeit dieser sehr elementaren Beziehungen geben wir dem analytischen Wege in der Entwickelung derselben den Vorzug.

Da die Beziehung zwischen den beiden Räumen dem Gesagten zufolge eine vollständig gleichwertig-gegenseitige ist, so dient die Bezeichnung des einen als Objekt-, der anderen als Bildraum nur zur Erleichterung des Ausdruckes, ohne daß dem einen im Verhältnis zum anderen unter dem hier vertretenen Gesichtspunkte irgend welche ausgezeichneten Eigenschaften zukommen.

Zur Entwickelung der weiteren Eigenschaften der gedachten Abbildung bedienen wir uns am bequemsten einer dritten, ebenfalls unmittelbar aus 2. sich ergebenden Folgerung, nämlich

3. Einer Ebene E im Objektraum entspricht auch wieder eine Ebene E' im Bildraum. Denn die Ebene ist definiert durch zwei sich schneidende Gerade; zwei solchen a, b im einen Raum entsprechen aber nach 2. zwei ebensolche a', b' im anderen Raume. Jeder weiteren in der ersteren

Ebene enthaltenen Geraden c, die also die zuerst angenommenen beiden Geraden schneidet, entspricht nun im Bildraum eine Gerade c', welche nach der ursprünglichen Annahme den einen wie den anderen der beiden dort gelegenen Strahlen schneiden muß, welche also in dieselbe Ebene fällt.

Dieses Merkmal der Abbildung von Ebenen in Ebenen wollen wir also den analytischen Entwickelungen als fundamentales zugrunde legen. Aus ihm folgt sofort rückwärts die Abbildung von Geraden in Gerade und von Punkten in Punkte jeweilig als der Schnitte je zweier Ebenen und Geraden.

Nehmen wir, um den Zusammenhang der beiden Räume R und R' näher zu untersuchen, in ihnen je ein, zunächst beliebig orientiertes, rechtwinkliges Parallelkoordinatensystem an. Die Koordinaten eines Punktes P im einen, dem Objektraum, seien x, y, z; die seines konjugierten Punktes im Bildraum, P', seines Bildes, x', y', z'; dann ist die Beziehung zwischen den Punkten P und P' mathematisch formuliert, indem wir

$$
\begin{aligned}
x' &= \varphi(x, y, z) \\
y' &= \chi(x, y, z) \qquad (1) \\
z' &= \psi(x, y, z)
\end{aligned}
$$

setzen.

Die Beziehung der beiden Räume wäre (analytisch) bekannt, wenn die Funktionen φ, χ, ψ ermittelt wären. Von diesen Funktionen wissen wir nur, daß sie nach 1. **stetig und eindeutig** sind.

Einer Ebene E' im Bildraum, die durch die Gleichung

$$A' x' + B' y' + C' z' + D' = 0 \qquad (2)$$

bestimmt ist, entspricht ferner nach 3. eine Ebene E im Objektraum, deren Gleichung wir analog

$$A x + B y + C z + D = 0 \qquad (3)$$

schreiben können.

Vermöge (1) entspricht aber der durch (2) bestimmten Ebene des Bildraums im Objektraum das geometrische Gebilde

$$\Psi(x, y, z) = A' \varphi(x, y, z) + B' \chi(x, y, z) + C' \psi(x, y, z) + D' = 0 \quad . \qquad (4)$$

Da $\Psi(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer mit E identischen Ebene sein soll, so muß $\Psi(x, y, z)$ für alle durch (3) definierten Punkte — und nur für diese — verschwinden. Es muß sich daher Ψ identisch umformen lassen in die Gestalt

$$\Psi(x, y, z) = (A x + B y + C z + D) \Phi(x, y, z) \quad , \qquad (5)$$

wobei man über Φ folgende Aussagen machen kann:

a) Φ darf nie $= \infty$ werden für Wertsysteme (x, y, z), welche die Gleichung (3) erfüllen — damit nicht für Punkte der Ebene (3) $\Psi \gtrless 0$ werde, d. h. der Fall eintrete, daß zu einem Punkte der Ebene (2) kein entsprechender Punkt durch die Gleichung $\Psi = 0$ festgelegt werde — was gegen die Grundannahme eines durchgängigen Entsprechens der beiden Ebenen wäre.

b) Φ darf nie $= 0$ werden, wenn Gleichung (3) nicht erfüllt ist, weil dies bedeuten würde, daß es Punkte in der Ebene $\Psi = 0$ gäbe, die mit Punkten außerhalb der Ebene E koinzidierten — was gegen die Annahme der eindeutigen Abbildung von Ebenen in Ebenen wäre.

c) Φ darf $= 0$ werden, wenn $A x + B y + C z = \infty$ ist, denn den unendlich fernen Punkten der Objektebene brauchen nicht notwendig unendlich ferne Punkte der Bildebene zu entsprechen; zu einer Annahme hierüber ist bis jetzt noch keine Handhabe gegeben, und es hängt von dem besonderen Werte des sich dann darbietenden Terms $0 \cdot \infty$ ab, ob es der Fall ist oder nicht.

d) Φ dürfte auch $= 0$ werden, wenn $A x + B y + C z + D = 0$ ist; dieser

Faktor könnte ja noch in Φ enthalten sein. Man kann hier noch nicht sagen, wie oft er in Ψ vorhanden ist.

Unter diesen Einschränkungen für die Werte der Funktion Φ ergibt die Identität der Gleichungen (4) und (5)

$$(6)\qquad A'\left(\frac{\varphi}{\Phi}\right) + B'\left(\frac{\chi}{\Phi}\right) + C'\left(\frac{\psi}{\Phi}\right) + D'\left(\frac{1}{\Phi}\right) = Ax + By + Cz + D \quad .$$

Die linke Seite von (6) kann aber nur dann identisch auf einen linearen Ausdruck führen, wenn die Faktoren $A'\,B'\,C'$ und D' selbst lineare Formen sind, also wenn

$$(7)\qquad \begin{array}{l|l}
\dfrac{\varphi}{\Phi} = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 & \text{oder } \varphi = \dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{a x + b y + c z + d} = x' \\[2ex]
\dfrac{\chi}{\Phi} = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 & \chi = \dfrac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{a x + b y + c z + d} = y' \\[2ex]
\dfrac{\psi}{\Phi} = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 & \psi = \dfrac{a_2 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{a x + b y + c z + d} = z' \\[2ex]
\dfrac{1}{\Phi} = a x + b y + c z + d & \text{und } \Phi = \dfrac{1}{a x + b y + c z + d} \quad .
\end{array}$$

Hiermit sind aber die gesuchten Funktionen φ, χ und ψ, welche den gestellten Bedingungen genügen, gefunden. Man überzeugt sich leicht, daß dies bei Φ auch der Fall ist[1]. Es sind Quotienten linearer Ausdrücke mit gleichem Nenner. Die Abbildung ist also aus den gemachten Voraussetzungen in der Tat analytisch vollständig bestimmt und zwar durch 16 oder — wenn man überall mit d dividiert — durch 15 Koeffizienten. Wir wollen uns diese Division durch d vorgenommen denken, für die neuen, d mal kleineren, Koeffizienten aber die vorige Bezeichnung beibehalten.

Wir haben nun die geometrischen Eigenschaften der so bestimmten Abbildung zu entwickeln und werden dieselben dann sogleich benützen, um durch entsprechende Wahl der Koordinatensysteme in den beiden Räumen die Zahl der Koeffizienten der Abbildung zu reduzieren und so die Ausdrücke für φ, χ und ψ erheblich zu vereinfachen.

Reduktion der Abbildungsgleichungen auf die einfachsten Grundformen.

Wir betrachten zu diesem Zwecke zunächst die

a) Beziehungen zwischen den Örtern konjugierter Ebenen. Gemäß den Gleichungen (7) entspricht die Ebene E' des Bildraumes, deren Gleichung (2) $A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0$ ist, im Objektraum dem Gebilde

---

[1] Eine Ausnahme von der Bedingung a) bilden die Schnitte der Ebene $ax + by + cz + d = 0$ mit der Ebene E.

Diese Schwierigkeit wird in der Anmerkung auf folgender Seite erledigt.

Ferner kann zwar Φ im allgemeinen nur in dem mit c) bezeichneten Falle verschwinden. Aber es kann auch $= 0$ werden, ohne daß $Ax + By + Cz = \infty$ wird, wenn z. B. $x = \infty$, y und z endlich gewählt wird, gleichzeitig aber $A = 0$ ist. Dann ist jedoch dieser Punkt, welcher der gemeinsame unendlich ferne Punkt aller der x-Achse parallelen Geraden ist, auch ein Punkt der in diesem Falle zur x Achse parallelen Ebene E. Es tritt also dann der mit d) bezeichnete Fall ein, daß beide Faktoren von Ψ verschwinden.

Ebenso erledigt sich der Fall, daß zwei Koordinaten, z. B. x und y, unendlich werden und die diesen entsprechenden Koeffizienten, A und B, in der Gleichung für E verschwinden. Alle Punkte mit diesen Koordinaten liegen auf der allen Ebenen $z = \text{const.}$ gemeinsamen unendlich fernen Geraden und E gehört dann zu diesen Ebenen, so daß diese Punkte nicht nur Φ, sondern auch den ersten Faktor der Gleichung (5) annullieren.

$$(8)\quad 0 = \frac{1}{ax + by + cz + 1}\,[(A'a_1 + B'a_2 + C'a_3 + D'a)x + (A'b_1 + B'b_2 + C'b_3 + D'b)y$$
$$+ (A'c_1 + B'c_2 + C'c_3 + D'c)z + A'd_1 + B'd_2 + C'd_3 + D'] \quad ,$$

dessen Gleichung wie verlangt von der Form

$$(9)\qquad 0 = \frac{Ax + By + Cz + D}{ax + by + cz + 1}$$

ist. Es ist also auch

$$(2)\ A'x' + B'y' + C'z' + D' \equiv \frac{Ax + By + Cz + D}{ax + by + cz + 1}\ (9) \quad .$$

Einem Nullwerden von (2) entspricht nun im allgemeinen ein Nullwerden des Zählers von (9), d. h. der Ebene E', deren Gleichung (2) ist, entspricht im allgemeinen im Objektraume die Ebene E, deren Gleichung $Ax + By + Cz + D = 0$ ist, worin die Koeffizienten — vermöge der Identität von (8) und (9) — mit denen der Abbildung und denen von E' verbunden sind durch die Gleichungen

$$(10)\qquad \begin{aligned} A &= A'a_1 + B'a_2 + C'a_3 + D'a \\ B &= A'b_1 + B'b_2 + C'b_3 + D'b \\ C &= A'c_1 + B'c_2 + C'c_3 + D'c \\ D &= A'd_1 + B'd_2 + C'd_3 + D' \quad . \end{aligned}$$

Endlichen Werten von x', y', z' entsprechen daher im allgemeinen auch endliche Werte von x, y, z und umgekehrt.

Man sieht aber aus der Form des Ausdrucks (9), daß es ein System von Werten x, y, z gibt, denen unendlich große Werte von x', y', z' entsprechen, nämlich diejenigen, welche der Gleichung

$$(11)\qquad ax + by + cz + 1 = 0$$

genügen, d. h. in einer gewissen Ebene F liegen. Das Bild dieser, im Endlichen gelegenen, Ebene F des Objektraumes liegt im Unendlichen. Die Abbildung erleidet daher an ihr eine Unstetigkeit und zwar ist dieses die **einzige Unstetigkeitsstelle jenes Raumes**[1].

Eine analoge Ebene existiert, wie schon aus der Gegenseitigkeit aller Beziehungen in den beiden Räumen folgt, auch im Bildraume. In der Tat, wenn $A = B = C = 0$ ist — was gewisse Beziehungen zwischen den wesentlichen Koeffizienten $\frac{A'}{D'}\,\frac{B'}{D'}$ und $\frac{C'}{D'}$ der Ebene E' und denen der Abbildung involviert, d. h. eine bestimmte Ebene F' determiniert — so kann das Nullwerden von (9) nur noch eintreten durch Unendlichwerden des Nenners, d. h. im allgemeinen durch Unendlichwerden von x, y, z. Der durch die Bedingungen $A = B = C = 0$ bestimmten Ebene F' des Bildraumes entspricht also die unendlich ferne im Objektraume; sie ist daher die Diskontinuitätsebene des Bildraumes. Diese in der Anwendung so wichtigen Ebenen — **Brennebenen** genannt — nehmen

[1] Eine Unsicherheit entsteht, wenn in (9) Zähler und Nenner zugleich verschwinden, was für die Schnittgeraden der Ebene E mit der Ebene F stattfindet. Dies sind Punkte von E, ohne daß durch sie die der Bildraumebene E' entsprechende Ebenengleichung im Objektraume erfüllt würde. Diese nur in dem analytischen Ausdruck vorhandene Schwierigkeit verschwindet, sobald wir uns auf die geometrische Stetigkeit dieser Raumbeziehungen stützen dürfen. Dann erkennt man sofort, daß dieser Geraden die unendlich ferne Gerade von E' entspricht. — Im besonderen kann die Ebene E einer der Koordinatenebenen des Bildraumes entsprechen, also durch das Nullwerden des Zählers von φ, χ oder ψ definiert sein.

daher auch vom rein geometrischen Gesichtspunkte eine ganz besondere Bedeutung in Anspruch.

Es gibt jedoch eine Art von Abbildung, bei welcher keine Unstetigkeit der Abbildung vorhanden ist: wenn nämlich $a = b = c = 0$ ist. In diesem singulären Fall der Abbildung, welcher in einer Klasse von optischen Instrumenten verwirklicht ist, entsprechen offenbar im Endlichen gelegene Ebenen des Bildraumes stets im Endlichen gelegenen Ebenen des Objektraumes und vice versa. Wir werden uns mit diesem Falle noch näher zu beschäftigen haben. Er heißt (aus später ersichtlichen Gründen) der Fall der **„teleskopischen“** Abbildung.

Wir wollen nun durch weitere Diskussion unserer Abbildungsgleichungen zweitens

b) die Beziehungen zwischen den Richtungen konjugierter Ebenen ableiten und aus diesen eine erste Vereinfachung jener Gleichungen gewinnen.

Orientierung der yz-Ebenen. Die Richtungskoeffizienten A, B, C einer Ebene E im Objektraume hängen, wie (10) zeigt, nicht nur von den Richtungskoeffizienten A', B', C' der konjugierten Ebene E' ab, sondern auch von deren Lagekoeffizient D'. Einer Parallelverschiebung von E' (welche bloß eine Änderung von D' involviert) entspricht daher im allgemeinen eine Verschiebung und gleichzeitige Richtungsänderung von E und umgekehrt. Dies ist nur dann nicht mehr der Fall, wenn A, B, C von D' unabhängig sind, also erstens, wenn $a = b = c = 0$ ist, d. h. in dem singulären Falle der teleskopischen Abbildung; alsdann entsprechen parallelen Ebenen im einen Raume überall parallele Ebenen im anderen; zweitens wenn in der Gleichung der Objektebene (8) auf andere Weise der den Faktor D' enthaltende Teil des Ausdrucks von x, y, z unabhängig wird, also wenn $(ax + by + cz + 1) = \text{const.}$ ist, d. h. wenn die Ebene im Objektraum der Diskontinuitätsebene F derselben parallel ist. Dieser Schar von parallelen Ebenen — und im allgemeinen nur dieser einen — im Objektraume entsprechen auch parallele im Bildraume.

Aus der Eindeutigkeit dieser und der Gleichwertigkeit aller Beziehungen zwischen den beiden Räumen folgt dann, daß jene Ebenen im Bildraume parallel der Diskontinuitätsebene F' desselben sind. Dies folgt aber auch direkt, wenn man die unter sich parallelen Ebenen des Bildraumes sucht, denen eine Schar unter sich paralleler Ebenen im Objektraume entspricht. Für letztere muß $A : B : C$ unabhängig von D' sein. Da nun $A = M + D'a$; $B = N + D'b$; $C = P + D'c$, so muß $M : N : P = a : b : c$ sein. Wir können daher setzen $A = a(K + D')$; $B = b(K + D')$; $C = c(K + D')$. Die Größen A, B, C dürfen jeden mit a, b, c proportionalen Wert annehmen, ohne mit der gestellten Bedingung in Widerspruch zu treten. Es kann also auch $K = -D'$ werden, daher $A = B = C = 0$. Die durch diese Bedingung bestimmte Ebene des Bildraumes ist nun, wie wir oben gesehen haben, in der Tat dessen Diskontinuitätsebene.

Ebenen, die der Diskontinuitätsebene des einen Raumes parallel sind, entsprechen also im anderen Raume Ebenen, die der Diskontinuitätsebene dieses parallel sind, und dies sind im allgemeinen die einzigen konjugierten Scharen von Parallelebenen.

Wir nehmen nun Ebenen, die den Unstetigkeitsebenen in den beiden Räumen parallel sind, zu Koordinatenebenen und zwar zu yz- bezw. $y'z'$-Ebene; die x- und x'-Achsen senkrecht dazu. Dann kann x' nur noch Funktion von x sein, also reduziert sich die Gleichung für x' in (7) auf

$$x' = \frac{a_1 x_1 + d_1}{ax + 1} \tag{7a}$$

und da alle drei Koordinaten notwendig gleichen Nenner haben, so vereinfachen sich auch diese in

$$y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{a x + 1}$$

$$z' = \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{a x + 1} \quad .$$

Wahl der Hauptachsen. Die Abszissenachsen x' und x selbst sind bisher noch nicht zueinander konjugiert (wenn $y = z = 0$, ist noch nicht $y' = z' = 0$). Um dies zu erreichen, suchen wir diejenigen zur x-Achse parallelen, d. h. zur Diskontinuitätsebene F senkrechten Geraden, deren Bilder im anderen Raume zur x'-Achse parallel, also zur F'-Ebene senkrecht sind. Seien die Koordinaten einer solchen Geraden im jetzigen System $y = y_0$ und $z = z_0$, so müssen die Koordinaten ihres Bildes, also

$$y_0' = \frac{a_2 x + b_2 y_0 + c_2 z_0 + d_2}{a x + 1} \quad ,$$

$$z_0' = \frac{a_3 x + b_3 y_0 + c_3 z_0 + d_3}{a x + 1}$$

von x unabhängig sein. Dies ist der Fall, wenn

$$\frac{b_2 y_0 + c_2 z_0 + d_2}{a_2} = \frac{1}{a}$$

und auch

$$\frac{b_3 y_0 + c_3 z_0 + d_3}{a_3} = \frac{1}{a} \quad .$$

Diese beiden linearen Gleichungen für y_0 und z_0 haben im allgemeinen nur eine Lösung. Es gibt also im allgemeinen auch nur je eine Gerade von der verlangten Eigenschaft. Wir nehmen diese charakteristischen Hauptachsen der Abbildung zur x- bezw. x'-Achse. Dann muß für $y = 0$ und $z = 0$ auch $y' = 0$ und $z' = 0$ sein, also im Zähler der Ausdrücke für y' und z' kein x enthaltendes und kein konstantes Glied mehr vorkommen. Demnach werden die Abbildungsgleichungen — unbeschadet ihrer Allgemeinheit — reduziert auf die Form

$$(7\,b) \qquad y' = \frac{b_2 y + c_2 z}{a x + 1} \qquad\qquad z' = \frac{b_3 y + c_3 z}{a x + 1} \quad .$$

Wahl der Nebenachsen. Zur weiteren Vereinfachung dieser benützen wir den Satz:

Es gibt in jedem Raume ein — und im allgemeinen nur ein — Paar von aufeinander senkrechten durch die Hauptachse gehenden (Meridian-)Ebenen, denen ebensolche im anderen Raume konjugiert sind.

In der Tat: Eine im Objektraume durch die x-Achse gelegte Ebene I bilde mit der x-y-Ebene (oder mit der y-Achse) den Winkel u, dessen trigonomterische Tangente $\operatorname{tg} u = \frac{z}{y} = m$ ist. Eine andere Meridianebene II bilde mit der x-y-Ebene den Winkel v. Wenn nun I und II senkrecht aufeinander stehen, so ist $\operatorname{tg} v = -\frac{1}{m}$. Das Bild von I bildet aber mit der y'-Achse den Winkel u', dessen Tangente nach den Abbildungsgleichungen sich darstellt als

$$\operatorname{tg} u' = \frac{z'}{y'} = \frac{b_3 y + c_3 m y}{b_2 y + c_2 m y} = \frac{b_3 + c_3 m}{b_2 + c_2 m} \quad .$$

Das Bild von II bildet mit y' den Winkel v', sodaß analog

$$\operatorname{tg} v' = \frac{b_3 - \frac{1}{m} c_3}{b_2 - \frac{1}{m} c_2}$$

ist. Soll $u' - v' = \pm \frac{\pi}{2}$ sein, so muß $\operatorname{tg} v' = - \frac{1}{\operatorname{tg} u'}$ sein, also

$$\left(m - \frac{1}{m}\right)(b_2 c_2 + b_3 c_3) = c_3^2 - b_3^2 + c_2^2 - b_2^2 \quad .$$

Diese Gleichung wird entweder durch die Koeffizienten der Abbildung selbst erfüllt, indem der Faktor von $m - \frac{1}{m}$ und die rechte Seite der Gleichung einzeln gleich Null sind, was auf $b_2^2 = c_3^2$, $b_3^2 = c_2^2$ führt und dann besteht sie eo ipso für jeden Wert von m und damit von u. Oder die Gleichung hat praktisch nur eine Lösung; denn wenn $m = r$ eine Lösung ist, so ist zwar $m = - \frac{1}{r}$ ebenfalls eine solche; dies führt aber bei uns auf die zugehörige Ebene II. Es gibt also im allgemeinen nur ein Paar Ebenen von der verlangten Eigenschaft im einen wie anderen Raume.

Diese Ebenen benützen wir abermals zur Orientierung unseres Koordinatensystems, indem wir die y- und z- bezw. y' und z'-Achsen in die durch sie in der yz- bezw. $y'z'$-Ebene fixierten Richtungen hineinverlegen und zwar natürlich derart, daß die $x'y'$-Ebene das Bild der xy-Ebene wird und die $x'z'$-Ebene das Bild der xz-Ebene. Es darf dann y' und z' außer von x nur von y bezw. z abhängen; es erhalten also die Abbildungsgleichungen schließlich die Form

$$\text{(7 c)} \qquad x' = \frac{a_1 x + d_1}{a x + 1} \quad ; \qquad y' = \frac{b_2 y}{a x + 1} \quad ; \qquad z' = \frac{c_3 z}{a x + 1} \quad .$$

Hauptformen der Abbildungsgleichungen.

Aus den allgemeinen Bedingungen der Transformation von Koordinatensystemen ist zu schließen, daß diese Gleichungen, welche noch fünf Konstanten enthalten, weiter reduzibel sein müssen. In der Tat haben wir noch über den bisher willkürlichen Anfangspunkt der x- und x'-Koordinatenzählung zu verfügen. Hierfür bieten sich zwei Festsetzungen als besonders einfach, charakteristisch und für die Anwendung wichtig dar.

1. Zu Anfangsebenen werden die Unstetigkeitsebenen F und F' gewählt. Dann werden die Abbildungsgleichungen, wie man leicht erkennt, von der Form

$$\text{(12)} \qquad x' = \frac{\mathfrak{a}}{x} \quad , \qquad y' = \frac{\mathfrak{b}\, y}{x} \quad , \qquad z' = \frac{\mathfrak{c}\, z}{x} \quad ,$$

worin $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gewisse mit den früheren in einfachem Zusammenhange stehende Konstanten sind.

2. Zu Nullebenen werden konjugierte Ebenen gewählt, die den Unstetigkeitsebenen parallel sind.

Die Form der Gleichungen in diesem Falle wird

$$(13)\qquad x' = \frac{a_1 x}{a x + 1} \quad , \quad y' = \frac{b_2 y}{a x + 1} \quad , \quad z' = \frac{c_3 z}{a x + 1} \quad ,$$

hierbei bleibt eine Konstante noch verfügbar für die spezielle Wahl der konjugierten Ebenen.

Der allgemeine hier behandelte Fall der Abbildung ist also charakterisiert durch mindestens drei Konstanten. Die Abbildung ist um die x-Achse nicht symmetrisch, während es die meisten realen Abbildungen sind. Die x-Achse unseres Koordinatensystems stellt sich als eine Hauptachse der Abbildung dar, die wie vorangehend bestimmten y- und z-Achsen als Nebenachsen derselben.

Im singulären Falle der teleskopischen Abbildung sind die drei Achsen gleichwertig. Auch in diesem Falle, in welchem parallelen Ebenen im einen Raume stets parallele im anderen entsprechen, gibt es im allgemeinen nur drei zueinander rechtwinklige Richtungen, welche als ebensolche abgebildet werden, was also zu einer bestimmten Wahl des Koordinatensystems führt[1]. Die Gleichungen (7) werden für teleskopische Abbildung, wenn die Koordinatensysteme in solche zwei konjugierte rechtwinklige Ecken gelegt werden, zu

$$(14)\qquad x' = p x \quad , \quad y' = q y \quad , \quad z' = r z \quad ,$$

wenn die Konstanten mit p, q, r bezeichnet werden.

Wir bemerken, daß sich diese Gleichungen auch aus den vorigen (13) für $a = 0$ (b und c sind bereits $= 0$) ergeben. Es ist also gestattet, die Gleichungen für die teleskopische Abbildung aus den für die allgemein geltenden, auf konjugierte Ebenen bezogenen herzuleiten, wenn man $a = 0$ setzt; (oder, da nach (13) die Abstände der Unstetigkeitsebenen von den y-z-Ebenen $-\frac{1}{a}$ und $\frac{a_1}{a}$ sind, wenn man die Unstetigkeitsebenen über alle Grenzen hinaus verschiebt). Wir werden später davon Gebrauch machen.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, nochmals darauf hinzuweisen, daß die Lagenbeziehung der beiden Abbildungsräume zu einander hier eine ganz willkürliche ist. Diese wird erst durch die speziellen Umstände der Abbildung gegeben.

Der geometrische Charakter der durch die Gleichungen (12) oder (13) und (14) bestimmten Abbildung ist ein in der Mathematik wohlbekannter; ihre Eigenschaften sind eingehend studiert. Eine Diskussion jener Gleichungen ergibt dieselben in einfachster Weise. Wir beschränken uns hier auf einige Hinweise.

Bei der durch (14) definierten teleskopischen Abbildung sind die beiden Räume nach der Bezeichnung der modernen Geometrie „affin“. Ein räumliches Gebilde des einen Raumes erscheint im anderen als eins gleicher Gattung, nur in den drei Dimensionen im allgemeinen verschieden vergrößert. In dem durch (12) bezw. (13) definierten Falle der allgemeineren Abbildung herrscht nur noch in jedem einzelnen zur x-Achse senkrechten Paar konjugierter Ebenen Affinität, aber für die verschiedenen Ebenenpaare sind die Affinitätskonstanten verschieden, nämlich von x abhängig.

---

[1] Man sieht das, wenn man mit (7) und $a = b = c = 0$ die Bedingungen sucht, daß drei Ebenen des Bildraumes und drei des Objektraumes je eine rechtwinklige Ecke bilden; und daß die letzteren die Bilder der ersteren sind. Man erhält dann so viel Gleichungen als Unbekannte. Die sechs Gleichungen für die Orthogonalität sind zwar vom zweiten Grade, dies bedeutet aber nur, daß man statt irgend dreier Richtungen $A\,B\,C$ auch entgegengesetzte, $-A$, $-B$ oder $-C$ erhält. Es gibt also praktisch nur ein Wertesystem, das den Bedingungen genügt.

Charakteristik der Abbildungen nach den Vorzeichen der Konstanten.

Bisher war der Richtungssinn noch unbestimmt, in dem wir die Koordinaten auf unseren nunmehr festgelegten Achsen messen. Dazu müssen wir physische Merkmale zu Hilfe nehmen. Wir legen der Diskussion die Gleichungen (12) zugrunde.

Wir wollen die x- und x'-Achse positiv rechnen in der Richtung der Lichtbewegung in den beiden Räumen. Dann ergibt sich eine Einteilung der Abbildungen in zwei Klassen, je nachdem $\mathfrak{a} < 0$ oder > 0 ist. Aus $\frac{dx'}{dx} = -\mathfrak{a}:x^2$ folgt, daß im ersteren Falle x' mit x wächst, oder das Bild sich in der Richtung der Lichtbewegung verschiebt, wenn das Objekt dies tut, im anderen Falle das Umgekehrte. Abbildungen der ersten Art ($\mathfrak{a}$ negativ) nennen wir „rechtläufig", solche mit positivem $\mathfrak{a}$ „rückläufig". Diese letzteren sind aber mit den gewöhnlichen Mitteln der Dioptrik, der Spiegelung und Brechung an den Grenzflächen homogener Mittel nicht herzustellen[1]. Wir behandeln daher im folgenden nur die rechtläufige Abbildung.

Bei dieser entspricht, wie die Gleichung $xx' = \mathfrak{a}$ erweist, stets der (in bezug auf x, von der Unstetigkeitsebene F an gerechnet) positive Teil des Objektraumes dem (in bezug auf x', von der Ebene F' an gerechnet) negativen Teil des Bildraumes; der negative Teil des Objektraumes dem positiven des Bildraumes.

Zur graphischen Darstellung dieser Beziehungen ist in Figur 10*a* als Objekt ein in der Objektachse liegender, die Brennebene durchsetzender Pfeil, in Figur 10*b* sein Bild (ohne Anspruch auf weitere Genauigkeit) gezeichnet.

Das Vorzeichen von $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{c}$ vermag für die Art der Abbildung nichts zu entscheiden, solange die Lagenbeziehung der beiden konjugierten Räume willkürlich und über die positiven y-, y'-, z- und z'-Richtungen keine Annahme gemacht ist.

Setzen wir jedoch fest (und diese Bestimmung ist die natürliche), daß im Objekt- und im Bildraum das Koordinatensystem gleichartig, z. B. in beiden Räumen „kanonisch" ist (d. h. daß, wenn die positive x-Achse nach Osten und die positive y-Achse nach Norden verläuft, die positive z-Achse nach dem Zenith gerichtet ist und daß dasselbe für die Achsen des Bildraumes gelte), so macht es einen Unterschied, ob $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ ein gleiches oder verschiedenes Vorzeichen haben.

Irgend drei den Koordinatenachsen parallele in einem Punkte sich schneidende Geraden bilden 2×4 Ecken; von diesen haben 2×2 die Eigenschaft, daß man sie so mit der Ecke der positiven Koordinatenachsen decken kann, daß jede der drei Geraden in diejenige Achse fällt, der sie ursprünglich parallel war; wir wollen sie deshalb kanonische, die anderen 2×2 Ecken akanonische Ecken nennen. Haben nun $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gleiches Vorzeichen, so werden, da

$$\frac{y'}{z'} = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}} \cdot \frac{y}{z},$$

kanonische Ecken in kanonische, haben sie verschiedenes Vorzeichen, so werden kanonische in akanonische abgebildet. Im ersten Falle ist das Bild einer Rechtsschraube um die x-Achse ebenfalls rechts um die x'-Achse gewunden, im zweiten

[1] Der bei der Spiegelung entstehende Schein einer rückläufigen Punktbeziehung hat in der ersten Auflage dieses Buches einen Irrtum veranlaßt, der durch eine gütige Mitteilung von Herrn Prof. Runge aufgeklärt worden ist.

Falle wird es links gewunden sein. Wir sprechen deshalb von einer **rechtwendigen** (gleiches Vorzeichen von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$) und einer **rückwendigen** Abbildung (verschiedenes Vorzeichen von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$). Bei der rechtwendigen Abbildung wird, wenn die Vergrößerung in allen Richtungen gleich und gleich 1 ist, das Bild dem Objekte kongruent, bei der rückwendigen wird es ihm symmetrisch gleich sein (wie die beiden Hände einander symmetrisch gleich sind).

Es mag hier vorausgenommen werden, daß Brechungen oder eine gerade Zahl von Spiegelungen oder eine Kombination von beiden eine rechtwendige Abbildung bewirken, während die rückwendige durch eine ungerade Zahl von Spiegelungen oder durch Kombination von Brechungen mit einer ungeraden Zahl von Spiegelungen entsteht.

Um nun die Abbildungen auch in Hinsicht auf die einzelnen Vorzeichen von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ untersuchen zu können, müssen wir für die jeweilige Festlegung der y- und y'-Achse wiederum durch die physischen Verhältnisse einen Anhalt gewinnen. Die positive z-Richtung würde dann schon bestimmt sein durch die Annahme zweier kanonischer Koordinatensysteme. Diese Verschiedenheit in der Behandlung der beiden Nebenachsen würde aber im weiteren besonders dann unbequem werden, wenn wir eine um die x-Achse symmetrische Abbildung voraussetzen. Wir ziehen es daher vor, die y- und z-Achse in **gleicher Weise zu behandeln** und setzen fest:

Wir wählen einen Objektstrahl in der x-y-Ebene, der die x-Achse hinter der Brennebene (mit positivem x) schneidet und bezeichnen die zur x-Achse senkrechte Komponente seiner Fortpflanzungsrichtung als positive Richtung der y-Achse. Dann soll die zur x'-Achse senkrechte Komponente der Fortpflanzungsrichtung des konjugierten Bildstrahles (der in der x'-y'-Ebene liegt) als positive Richtung der y'-Achse gelten[1].

Dasselbe bestimmen wir für die z- und z'-Achse.

Jetzt nehmen wir an, daß die **Abbildung um die x-Achse symmetrisch ist**, weil es die meisten wirklichen Abbildungen sind; setzen also $y = z$; und bei unserer völlig gleichartigen Bestimmungsweise der positiven y'- und z'-Richtung und der Symmetrie aller Verhältnisse um die x'-Achse erhalten wir auch $y' = z'$; oder stets $\mathfrak{b} = +\mathfrak{c}$.

Dadurch wird die Definition der recht- und rückwendigen Abbildung gewissermaßen umgekehrt, denn aus dem oben Ausgeführten ergibt sich, daß jetzt, wenn wir im Objektraum ein kanonisches Koordinatensystem haben, im Bildraum bei rechtwendiger Abbildung ebenfalls ein kanonisches, bei rückwendiger ein akanonisches System durch die oben gemachten Festsetzungen zugrunde gelegt worden ist. Damit ist der Unterschied der beiden Abbildungsarten aus den Gleichungen verschwunden, und in der durch die Abbildung nach obiger Regel bewirkten Veränderung des Koordinatensystems zu suchen[2].

Nun gilt, wenn man von den Achsenpunkten der beiden, zu unserer Definition benutzten Strahlen, auf diesen Strahlen um konjugierte Elemente fortschreitet, die Gleichung

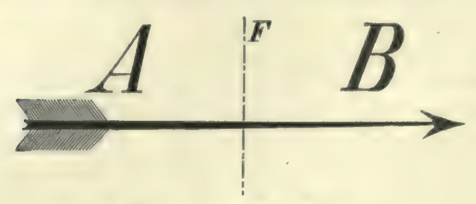
$$\frac{dy'}{dy} = \frac{\mathfrak{b}}{x}$$

(vgl. unten: Vergrößerung zur Achse geneigter Linien). Aus ihr folgt, daß bei positivem $\mathfrak{b}$ einem Fortrücken auf dem Objektstrahl nach wachsenden y eine Bewegung auf dem Bildstrahl nach wachsenden y' entspricht; oder bei der obigen

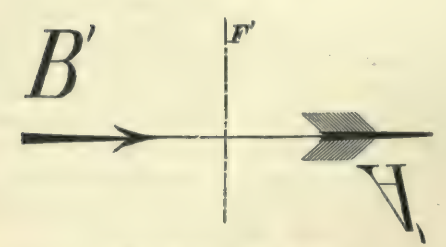
---

[1] Die Eindeutigkeit dieser Definition ergibt sich aus der Stetigkeit der Abbildung. —
[2] Wir müssen diesen Nachteil in Kauf nehmen, um im folgenden recht- und rückwendige Abbildung gleichartig behandeln zu können und dadurch weitläufigere Erörterungen zu vermeiden.

Festsetzung der positiven y und y': Daß wenn sich ein Objektpunkt auf unserem Strahle im Sinne der Lichtrichtung bewegt, der Bildpunkt dasselbe auf dem Bildstrahle tut, die Abbildung auf diesem Strahle eine „rechtläufige“ ist. Negatives $\mathfrak{b}$ ergäbe eine rückläufige Abbildung. Nun gilt aber, was wir oben für die Achse ausgesagt haben, für jeden anderen Strahl: In der gewöhnlichen geometrischen Optik werden Punktreihen stets rechtläufig abgebildet. Wir haben daher nur den Fall $\mathfrak{b} > 0$ zu betrachten.



Figur 10*a*. Ein Objekt.



Figur 10*b*. Sein Bild.

Die Art der optischen Abbildung veranschaulicht Figur 10 (schematisch, nicht in richtigen Verhältnissen) durch das Bild schrägliegender Lettern. Da $\mathfrak{b}$ immer positiv ist, so wird ein im Objektraum vor der Brennebene F liegendes positives y nach Gleichung (12) in ein hinter der Brennebene F' liegendes negatives y' verwandelt, ein im Objektraum hinter der Brennebene liegendes positives y in ein vor F' liegendes positives y'.

Die Vergrößerung.

Das Verhältnis konjugierter Strecken in den beiden Räumen heißt die „Vergrößerung“. Im speziellen heißt das Verhältnis von auf der Hauptachse gelegenen konjugierten Strecken **Longitudinal-, Achsial-** oder **Tiefenvergrößerung.**

Halten wir uns an die auf die Unstetigkeitsebenen bezogenen Abbildungsgleichungen (12), so ist das Verhältnis unendlich kleiner konjugierter Strecken

$$\frac{dx'}{dx} = \alpha = -\frac{\mathfrak{a}}{x^2} = -\frac{x'^2}{\mathfrak{a}} = -\frac{x'}{x} \quad . \tag{12a}$$

Dasselbe variiert, wie man sieht, mit x, bezw. x' selber. Nach dem oben Gesagten ist stets $\alpha > 0$.

Für endliche achsiale Strecken ist

$$\frac{x_2' - x_1'}{x_2 - x_1} = -\frac{\mathfrak{a}}{x_1 x_2} = -\frac{x_1' \cdot x_2'}{\mathfrak{a}} \quad .$$

Das Verhältnis von Strecken senkrecht zur x-Achse heißt **Lateralvergrößerung,** oder auch Vergrößerung schlechthin. Dasselbe variiert in dem allgemeinen Falle der dreiachsigen Abbildung von Azimut zu Azimut. Im Falle einer um die x-Achse symmetrischen Abbildung hatten wir $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ gesetzt, also y und z nicht weiter unterschieden. Jedes Paar zueinander senkrechter Meridianebenen wird dann in ebensolche abgebildet. Die Lateralvergrößerung, die wir mit β bezeichnen wollen, ist jetzt für jede zur x-Achse senkrechte Ebene konstant

$$\beta = \frac{dy'}{dy} = \frac{y'}{y} = \frac{\mathfrak{b}}{x} = \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right) x' \tag{12b}$$

unabhängig von y und y' selber.

Zur x-Achse senkrechte ebene Figuren werden also in ähnliche abgebildet.

Die Vergleichung von (12a) und (12b) zeigt, daß

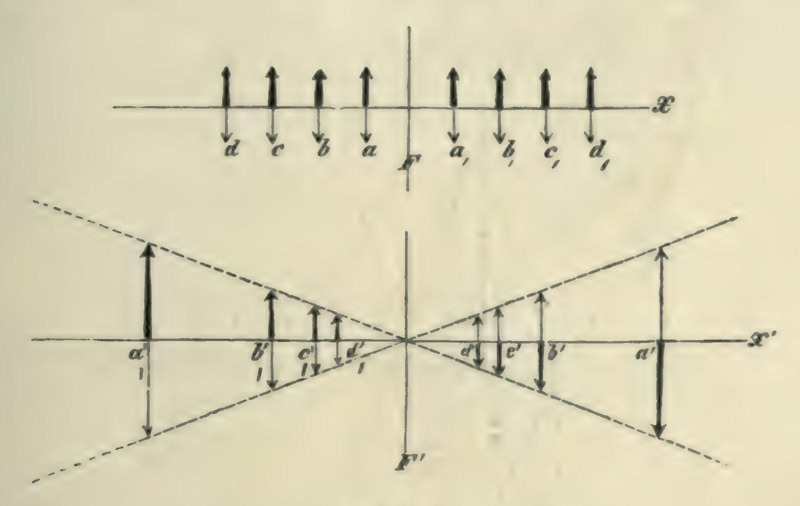
$$\beta^2 = -\left(\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}}\right)\cdot\alpha \quad .$$

Die Tiefenvergrößerung ist an jeder Stelle proportional dem Quadrat der Lateralvergrößerung[1], und es ist das Verhältnis

$$\frac{\beta^2}{\alpha} = -\frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}} \quad ,$$

also bei einer gegebenen Abbildung selbst für jede Stelle des Raumes konstant.

Die Tiefenvergrößerung ist proportional dem Quadrat des reziproken Objektabstandes von der F-Ebene oder dem direkten Quadrat des Bildabstandes von der F'-Ebene.



Figur 11.
Der Gang der Lateralvergrößerung.

Die Lateralvergrößerung ist einfach proportional dem reziproken Objektabstande von der F-Ebene oder dem direkten Bildabstande von der F'-Ebene. Beide können stets alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen. Den Zusammenhang der Lateralvergrößerung und Achsialvergrößerung untereinander und mit den Werten von x bezw. x' veranschaulicht man sich am besten durch folgende graphische Konstruktion (Figur 11).

Man zeichne eine Anzahl äquidistanter, gleich großer Ordinaten y, deren Endpunkte also auf einer zur x-Achse parallelen Geraden liegen. Die zugehörigen Werte von y' liegen auf einer durch den Punkt $x = 0$ gehenden, d. h. die x'-Achse in F' schneidenden Geraden und liegen desto näher aneinander, je näher sie an F' kommen.

Umgekehrt entsprechen einer Schar von äquidistanten y', deren Spitzen auf einer unter einem gewissen Winkel gegen x' geneigten durch F' gehenden Geraden liegen, im Objektraum gleich große y, die desto näher aneinander stehen, je näher sie der Ebene F sind u. s. w. [Einem Kreise um den Brennpunkt im

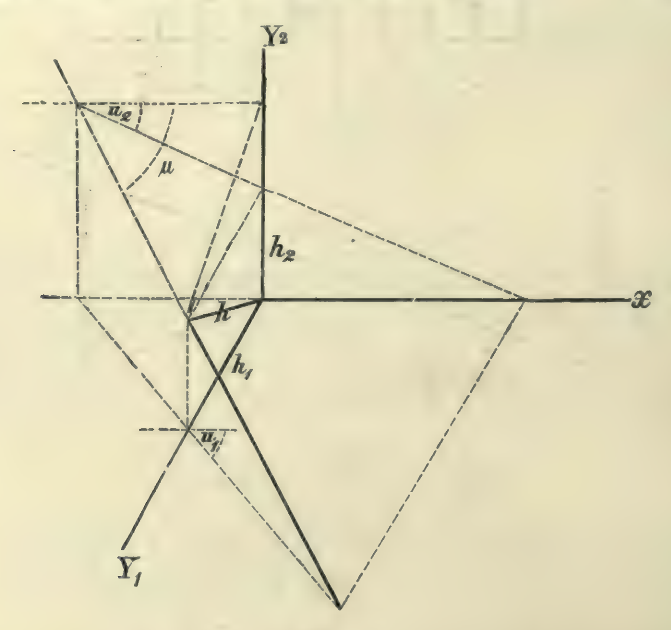
[1] Für die dioptrische Abbildung schon von TÖPLER bemerkt, POGG. Ann. **142**. 232. 1871.

einen Raume entspricht eine Hyperbel im anderen. Einer Schar konzentrischer Kreise vom Radius r eine Schar von Hyperbeln von konstanter Nebenachse b, und verschiedener Hauptachse $\left.\frac{a}{r}\right)$.

Das Hervorstechendste und Wichtigste bei solchen Konstruktionen ist der anschauliche Hinweis auf die Bedeutung der Brennebenen. Dieselben teilen die betreffenden Räume in zwei symmetrische Hälften, welche auf eine ganz gleichartige Weise abgebildet werden, d. h. einander paarweise entsprechen; in welcher Weise, wissen wir aus den oben gemachten, durch Figur 10 veranschaulichten Auseinandersetzungen; es ist auch in Figur 11 dementsprechend angegeben.

Gegenseitiges Entsprechen von Geraden und Büscheln.

Von besonderer Wichtigkeit ist das Verhältnis von konjugierten Geraden in den beiden Räumen, da jede Gerade ja auch als Strahl aufgefaßt werden kann, die Abbildung von Geraden ineinander daher den eigentlichen Prozeß, das Zustandekommen der Abbildung der Punkte näher erläutert.



Figur 12.
Ein windschief gegen die Achse einfallender Strahl und seine Projektionen.

Sei ein beliebiger gegen die x-Achse windschiefer Strahl durch seine Projektionen auf zwei zueinander senkrechte Meridianebenen 1 und 2 gegeben. Die Gleichung der einen Projektion sei

$$y_1 = h_1 + x \cdot \operatorname{tg} u_1 \quad ,$$

die der andern

$$y_2 = h_2 + x \cdot \operatorname{tg} u_2 \quad ,$$

u_1 und u_2 sind darin die Winkel der Spuren des Strahles in XY_1- und XY_2-Ebenen gegen die x-Achse; h_1 und h_2 die Höhen, in welchen diese Spuren die Unstetigkeits(Y_1-Y_2)-Ebene F schneiden (Figur 12). Die Winkel u_1 und u_2 werden

gemessen durch eine Drehung, die die Spur des Strahles in die positive x-Achse gelangen läßt. Als positiv gilt dabei in jeder der beiden Ebenen der Sinn einer Drehung von 90^0, die die positive Seitenachse in die positive x-Achse überführt.

Der Strahl selbst bildet dann mit der x-Achse einen Winkel u, der bestimmt ist durch die Gleichung

$$\mathrm{tg}^2\, u = \mathrm{tg}\, u_1{}^2 + \mathrm{tg}\, u^2_2 \quad ;$$

er schneidet die Unstetigkeitsebene in der Entfernung $h = \sqrt{h_1{}^2 + h_2{}^2}$ von der x-Achse.

Das Bild dieser Geraden, also der dem einfallenden konjugierte Strahl, sei ebenfalls bestimmt durch die Gleichungen seiner Projektionen auf zwei zueinander senkrechte Meridianebenen und zwar auf diejenigen, welche selbst die Bilder der im Objektraum angenommenen 1 und 2 sind; die x' seien von der Ebene F' an gezählt. Diese Gleichungen seien

$$y_1' = h_1' + x' \cdot \mathrm{tg}\, u_1' \quad ,$$
$$y_2' = h_2' + x' \cdot \mathrm{tg}\, u_2' \quad ,$$

— wo h_1', h_2' und u_1', u_2' analoge Bedeutung haben, wie oben. Nun sind aber die Spuren des Strahles im Bildraum auch selbst wieder die Bilder der Spuren des Strahles im Objektraum. Die Gleichungen der letzteren liefern daher die Gleichungen der Spuren im Bildraum vermöge der Abbildungsgleichungen (12) in der Form:

$$y_1' = \left(\frac{\mathfrak{b}}{x}\right)(h_1 + x\, \mathrm{tg}\, u_1) = \mathfrak{b}\, \mathrm{tg}\, u_1 + \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} h_1 x' \quad ,$$

und

$$y_2' = \left(\frac{\mathfrak{b}}{x}\right)(h_2 + x\, \mathrm{tg}\, u_2) = \mathfrak{b} \cdot \mathrm{tg}\, u_2 + \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} h_2 x' \quad .$$

Der Vergleich mit den voranstehenden ergibt, daß

$$h_1' = \mathfrak{b} \cdot \mathrm{tg}\, u_1 \quad , \qquad h_2' = \mathfrak{b} \cdot \mathrm{tg}\, u_2 \quad ,$$
$$\mathrm{tg}\, u_1' = \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right) h_1 \quad , \qquad \mathrm{tg}\, u_2' = \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right) h_2$$

ist. Der Neigungswinkel u', den das Bild des ursprünglichen Strahles mit der x'-Achse einschließt, dessen Vorzeichen ebenso wie das von u bestimmt wird, ist nun bestimmt durch die Gleichung

$$\mathrm{tg}\, u'^2 = \mathrm{tg}\, u_1'^2 + \mathrm{tg}\, u_2'^2 \quad .$$

Die Entfernung von der x'-Achse, in welcher der Strahl die F'-Ebene schneidet ist gegeben durch $h' = \sqrt{h_1^{2'} + h_2^{2'}}$.

Tragen wir hierin die oben gefundenen Werte für h_1', h_2', u_1', u_2' ein, so wird

$$\mathrm{tg}\, u^{2'} = \left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right)^2 (h_1{}^2 + h_2{}^2) \quad ,$$

woraus folgt

$$\mathrm{tg}\, u' = \pm \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} h \quad .$$

Diese Gleichung $\mathrm{tg}\, u' = \pm \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} h$ besagt, daß Strahlen, welche im Objektraum die Unstetigkeitsebene in gleicher Entfernung h von der Hauptachse schneiden, im Bildraum konjugiert sind Strahlen, die denselben Winkel u' mit der Hauptachse derselben einschließen. Im speziellen sind nun Strahlen, die

durch denselben Punkt der Unstetigkeitsebene im Objektraum gehen, ja konjugiert Strahlen, die durch einen Punkt der unendlich fernen Ebene gehen, die also einander parallel sind; obige Gleichung gibt den Zusammenhang an zwischen der Schnitthöhe des einfallenden Strahles in der Unstetigkeitsebene des Objektraumes und dem Neigungswinkel des austretenden Strahles gegen die Hauptachse im Bildraum an.

Wir haben ferner

$$h'^2 = h_1'^2 + h_2'^2 = \mathfrak{b}^2(\mathrm{tg}^2 u_1 + \mathrm{tg}^2 u_2) = \mathfrak{b}^2 \mathrm{tg}^2 u \quad ,$$

also

$$h' = \pm \mathfrak{b} \cdot \mathrm{tg}\, u \quad .$$

Dies besagt, daß den Strahlen, die im Objektraum gleiche Winkel u mit der x-Achse bilden, im Bildraum Strahlen entsprechen, welche die Unstetigkeitsebene desselben in gleicher Entfernung h' von der x-Achse schneiden. Strahlen, die im Objektraum nicht nur gleiche Winkel mit der x-Achse bilden, sondern auch untereinander parallel sind, gehen durch einen Punkt der unendlich fernen Ebene. Dieser ist die Unstetigkeitsebene des Bildraumes konjugiert. Die Bilder dieser Strahlen gehen daher sämtlich durch einen und denselben Punkt dieser Ebene und obige Gleichung gibt die Beziehung zwischen dem Winkel, den ein einfallender Strahl mit der Hauptachse des Objektraumes bildet und der Entfernung von der Hauptachse des Bildraumes, in welcher der konjugierte austretende Strahl die Brennebene dieses Raumes schneidet.

Schneidet der Strahl die x-Achse und legen wir eine der Koordinatenebenen durch ihn, sodaß also etwa $u = u_1$, $h = h_1$ ist, so verschwindei die Unsicherheit des Vorzeichens und es ist

$$\mathrm{tg}\, u' = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} h \quad ,$$

$$h' = \mathfrak{b}\, \mathrm{tg}\, u \quad .$$

Diese Sätze geben eine neue wichtige Eigenschaft der Unstetigkeitsebene an und ebenso erhalten die Konstanten der Abbildung eine weitere Bedeutung. Es ist nämlich $\mathfrak{b} = \frac{h'}{\mathrm{tg}\, u}$ das Verhältnis der Höhe, in welcher ein Strahl im Bildraum dessen Unstetigkeitsebene schneidet, zur trigonometrischen Tangente des Neigungswinkels, den sein konjugierter Strahl im Objektraum mit dessen Hauptachse einschließt. $\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right) = \frac{h}{\mathrm{tg}\, u'}$ ist umgekehrt das Verhältnis der Höhe, in welcher ein Strahl im Objektraum die Unstetigkeitsebene schneidet zur trigonometrischen Tangente des Winkels, unter dem sein konjugierter Strahl im Bildraum gegen dessen Hauptachse geneigt ist.

Die Brennweiten. Es sind also, wie hieraus — und auch schon aus den Abbildungsgleichungen selbst — geschlossen werden muß, die Konstanten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht gleichwertig, $\mathfrak{b}$ eine Länge, $\mathfrak{a}$ das Quadrat einer solchen. Es ist daher schon aus diesem Grunde vorteilhaft, diese Konstanten durch die oben sich darbietenden gleichartigen $\mathfrak{b}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ zu ersetzen. Wir wollen $\mathfrak{b} = f$, $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = f'$ setzen. Die Größen f und f', welche in der Theorie der optischen Instrumente als Charakteristika für die Abbildung angenommen sind, heißen die Brennweiten — aus Gründen, die sich aus dem historischen Entwickelungsgang der geometrischen Optik ergaben, mit dem Wesen der Sache aber eigentlich nicht sehr nahe zusammenhängen. Ihre Definition ergibt sich sachgemäß nur aus den Gleichungen

$$(15) \qquad f = \frac{h'}{\mathrm{tg}\, u} \quad , \qquad f = \frac{h}{\mathrm{tg}\, u'} \quad ;$$

ihr Zusammenhang mit den Eigenschaften der durch sie charakterisierten Abbildung aus den Gleichungen, die nunmehr an die Stelle der früheren treten, nämlich

$$x' = \frac{f \cdot f'}{x} \quad \text{oder} \quad x x' = f \cdot f' \quad , \tag{15a}$$

$$y' = \left(\frac{f}{x}\right) y = \left(\frac{x'}{f'}\right) y \tag{15b}$$

oder

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'} \quad . \tag{15c}$$

Nach dem über die Vorzeichen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Gesagten folgt, daß f und f' bei allen uns vorkommenden Fällen verschiedenes Vorzeichen haben, und **zwar, daß f stets positiv, f' stets negativ ist.**

Der Anschauung am nächsten kommt und praktisch am besten anwendbar ist die sich aus den obigen Bestimmungsgleichungen ohne weiteres ergebende Definition der Brennweiten von GAUSS.

Die erste Brennweite (die des Objektraumes) ist das Verhältnis der linearen Größe eines in der Brennebene des Bildraumes gelegenen Bildes zur scheinbaren (angularen) Größe seines unendlich entfernten Objekts und analog: die zweite Brennebene ist gleich dem Verhältnis der linearen Größe eines in der Brennebene des Objektraumes gelegenen Objekts zur scheinbaren Größe seines unendlich entfernten Bildes.

Das Konvergenzverhältnis. Kehren wir zu der Betrachtung der Abbildung einer Geraden in eine andere zurück und beschränken wir uns auf den Fall, daß die Objektgerade in einer Meridianebene liegt, also die Achse schneidet, dann liegt ihr Bild in einer Meridianebene des Bildraumes; nennen wir nun wieder u und u' die Winkel, x und x' die Abszissen, unter welchen die x-Achse im Objekt- und Bildraum geschnitten wird, h bezw. h' die Schnitthöhen in den Unstetigkeitsebenen, dann ist, wie ersichtlich (vgl. Figur 12)

$$h = -x \operatorname{tg} u \qquad h' = -x' \cdot \operatorname{tg} u' \quad .$$

Es war aber

$$h = f' \cdot \operatorname{tg} u' \qquad h' = f \cdot \operatorname{tg} u \quad .$$

Es folgt hieraus das Verhältnis der Tangenten konjugierter Strahlachsenwinkel in jeder Meridianebene

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = -\frac{x}{f'} = -\frac{f}{x'} \quad ,$$

also unabhängig von u bezw. u', d. h. dieses Verhältnis ist konstant für das Paar konjugierter Achsenschnittpunkte, dessen Abszissen x und x' sind.

Wir bezeichnen dieses für die Theorie der optischen Systeme ebenfalls sehr wichtige Verhältnis der Tangenten konjugierter Strahlachsenwinkel als das Konvergenzverhältnis oder die Angularvergrößerung.

Anmerkung. Gegenüber manchen Darstellungen, die von der Betrachtung der speziellen dioptrischen Abbildung ausgehen und diese dann verallgemeinern, mag hervorgehoben werden: 1. Daß, wie oben von selbst ersichtlich, es das Verhältnis der Tangenten und nicht der Sinus ist, welches für konjugierte Achsenpunkte konstant ist. Für unendlich kleine Winkel fallen natürlich beide zusammen. 2. Daß infolgedessen das Verhältnis der Tangenten und ebenso anderer trigonometrischer Funktionen der Winkel, welche zwei Strahlen miteinander bilden, nicht mehr in gleich einfacher Weise bestimmbar ist, wie das der Strahlen gegen die Achse weder für Strahlen, die ihren Divergenzpunkt auf der Achse noch für solche, die ihn außerhalb derselben haben, sondern daß dieses Verhältnis von den Winkeln der einzelnen Strahlen gegen die Achse abhängt. Man kann daher nicht von einem Konvergenzverhältnis in konjugierten

Ebenen schlechthin sprechen, wie von einem Vergrößerungsverhältnis in solchen. Die vorangegangenen Entwickelungen beweisen vielmehr indirekt, daß die Konstanz des Konvergenzverhältnisses in konjugierten Ebenen im Widerspruch steht mit der Möglichkeit der Abbildung endlicher Räume durch homozentrische Strahlenvereinigung. Nur für sehr kleine Winkel u und u' kann man, unter Vernachlässigung von Größen, die dem Quadrat dieser Winkel proportional sind, das Konvergenzverhältnis der Winkel konjugierter Strahlen als konstant hinstellen für Divergenzpunkte innerhalb eines Paares konjugierter Ebenen.

Vergrößerung von zur Achse geneigten Linienelementen.

$$\operatorname{tg} u' = \frac{h}{f'} \quad ;$$

$$h = y - x \operatorname{tg} u \quad ;$$

$$\operatorname{tg} u' = \frac{dy'}{dx'} \quad ; \qquad \operatorname{tg} u = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{x}{f'}\left(\frac{y}{x} - \frac{dy}{dx}\right) \quad .$$

Figur 13.
Ein zur Achse schiefes Element $d\eta$ und sein Bild $d\eta'$.

Für Elemente, die die Achse schneiden, gilt:

$$y = 0 \quad ;$$

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{x}{f'} \cdot \frac{dy}{dx} \quad ;$$

$$\frac{dy'}{dy} = -\frac{dx'}{dx} \cdot \frac{x}{f'} = \frac{x'}{x} \cdot \frac{x}{f'} = \beta \quad .$$

In diesem Falle ist ferner:

$$\frac{d\eta'}{d\eta} = \frac{dy'}{dy} : \frac{\sin u'}{\sin u}$$

$$\frac{d\eta'}{d\eta} = \beta \frac{\sin u}{\sin u'} \quad . \tag{15}$$

Beziehungen zwischen den drei Vergrößerungen.

Die Vergleichung der Formeln, welche wir für β und γ hergeleitet haben, zeigt sofort den einfachen Zusammenhang, welcher zwischen diesen beiden Größen besteht, nämlich

$$\beta\gamma = \frac{y'}{y} \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = -\frac{f}{f'} \quad .$$

Das Produkt des Vergrößerungsverhältnisses in zwei konjugierten Ebenen und des Konvergenzverhältnisses der Strahlen in den Achsenpunkten dieser Ebenen ist konstant für eine gegebene Abbildung (gegebenes optisches System).

Da f und f' entgegengesetztes Vorzeichen haben, entspricht eine positive Vergrößerung positivem Konvergenzverhältnis und eine negative Vergrößerung negativem Konvergenzverhältnis, mit anderen Worten: stets werden aufrechte Bilder zustande gebracht, wenn die Strahlen durch den Achsenpunkt in Objekt und Bild gleichseitig gegen die Achse geneigt sind, umgekehrte Bilder, wenn sie entgegengesetzt geneigt sind.

Die bisher abgeleiteten, auf die Unstetigkeitsebenen in beiden Räumen bezogenen **Formeln** sind, in Kürze zusammengestellt:

Für *Brennpunktsabstände* konjugierter Achsenpunkte:

(I a) $$x \cdot x' = f \cdot f' \quad ,$$

für die *Tiefenvergrößerung*

(I b) $$\alpha = \frac{dx'}{dx} = -\frac{f \cdot f'}{x^2} = -\frac{x'}{x} \quad ,$$

für die *Lateralvergrößerung*

(I c) $$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x'}{f'} \quad ,$$

für das *Konvergenzverhältnis*

(I d) $$\gamma = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = -\frac{x}{f'} = -\frac{f}{x'} \quad .$$

(I)

Durch Kombination dieser miteinander erhalten wir:

(I a*) $$\frac{\alpha}{\beta^2} = -\frac{f'}{f}$$ (I b*) $$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{f'}{f} \cdot \beta = \frac{1}{\gamma}$$

(I c*) $$\beta \cdot \gamma = -\frac{f}{f'}$$ (I d*) $$\frac{\beta}{\gamma} = \alpha = -\frac{f}{f'} \frac{1}{\gamma^2} \quad ,$$

(I*)

daher auch noch

(I e*) $$\frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta} = 1 \quad .$$

Dieses sind die Beziehungen, welche für jede durch geradlinige Strahlen punktweise vermittelte Abbildung zweier Räume ineinander gelten.

Die Kardinalpunkte eines optischen Systems.

Wie diese Formeln aufs einfachste zeigen, können die Größen β und γ jeden Wert zwischen $+\infty$ und $-\infty$, α jeden Wert zwischen 0 und $+\infty$ annehmen, wenn x und x' beliebig variiert werden.

Einige von diesen Werten sind von ausgezeichneter Bedeutung, sei es für die Vereinfachung von später abzuleitenden Formeln, sei es für die praktische Beobachtung; es sind dies im besonderen die Stellen der Achse, wo

1. die Tiefenvergrößerung den Wert $+1$ hat. In jedem optischen System gibt es ein Paar Punkte, wo einer unendlich kleinen Verschiebung des Objekts auf der Achse eine gleichgroße und gleichgerichtete Verschiebung des Bildes entspricht. Es sind dies die „äußeren" und „inneren dioptrischen Punkte" LIPPICHS (l. c., p. 20), in denen $x = -x'$; von MATTHIESSEN (1881) „Haupt- oder Knotenpunkte äquipollenter Linsen in Luft" genannt.

2. Die Punkte der Achse, wo die Lateralvergrößerung $= +1$ und die, wo dieselbe $= -1$ ist, d. h. Objekt und Bild gleich groß und gleich oder verkehrt gelegen sind. Erstere sind von GAUSS[1] „Hauptpunkte", die durch

[1] C. F. GAUSS, Dioptr. Unters. p. 13. Bemerkt und hervorgehoben wurden sie schon von MÖBIUS, CRELLES Journ. **5**. 113. 1830, für einen spezielleren Fall (unendlich dünne Linsen).

sie gehenden zur Achse senkrechten Ebenen „Hauptebenen" genannt worden; letztere, von GRUNERT[1] und TÖPLER[2] hinzugefügt, analog als „Hauptpunkte bezw. Hauptebenen der zweiten Art" negative Hauptpunkte bezw. Hauptebenen bezeichnet.

3. Die Stellen der Achse, wo das Konvergenzverhältnis $= +1$ bezw. $= -1$ ist, d. h. Punkte von der Beschaffenheit, daß einem Strahl, der im Objektraume nach dem einen hinzielt, im Bildraume ein Strahl entspricht, der unter gleichem bezw. entgegengesetztem Winkel gegen die Achse von dem konjugierten Punkte ausgeht. Diese Punkte sind von LISTING[3] eingeführt und Knotenpunkte genannt, und zwar die letzteren von TÖPLER[2] wieder als negative Knotenpunkte von den ersteren unterschieden.

In der folgenden Tabelle sind die zusammengehörigen Werte von α, β, γ, x und x' aufgeführt. Dieselbe zeigt, daß die positiven Haupt- und Knotenpunkte im Objektraum den Brennpunkten stets folgen, im Bildraum stets vorhergehen; daß die negativen Haupt- und Knotenpunkte umgekehrt liegen; ferner ergibt sie, daß die Knotenpunkte zugleich diejenigen Stellen der Achse sind, in welchen $\alpha = \beta$ ist, d. h. in welchen eine zur Achse senkrechte unendlich dünne Schicht in allen drei Dimensionen ähnlich abgebildet wird; und daß in den Punkten, wo $\alpha = 1$ ist, $\beta = \pm\gamma$ ist.

α	β	γ	x	x'
$+1$	$\pm\sqrt{-\frac{f}{f'}}$	$\pm\sqrt{-\frac{f}{f'}}$	$\pm\sqrt{-f\cdot f'}$	$\mp\sqrt{-f\cdot f'}$
$-\frac{f'}{f}$	$+1$	$-\frac{f}{f'}$	$+f$	$+f'$
$-\frac{f'}{f}$	-1	$+\frac{f}{f'}$	$-f$	$-f'$
$-\frac{f}{f'}$	$-\frac{f}{f'}$	$+1$	$-f'$	$-f$
$-\frac{f}{f'}$	$+\frac{f}{f'}$	-1	$+f'$	$+f$

Außer diesen konjugierten Punktpaaren haben manche Autoren noch andere Paare von teils ebenfalls konjugierten, teils auch nur analog gelegenen Punkten eingeführt[4]. Wir finden unsererseits keinerlei Nutzen in der Anwendung derselben, wohl aber eine Verminderung der ohne sie bestehenden Übersichtlichkeit der Verhältnisse. Wir werden auch von den meisten der oben charakterisierten Punkte nur selten Anwendung zu machen haben. Hingegen werden wir später Veranlassung haben, weitere Punktpaare einzuführen und zu benützen, welche von

---

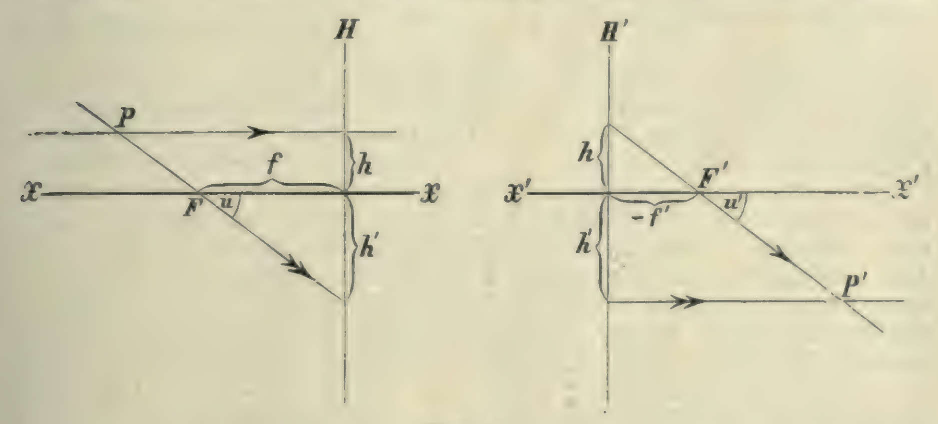
[1] GRUNERT, Arch. f. Math. u. Phys. **47.** 104. 1867. — [2] TÖPLER, l. c. — [3] J. B. LISTING, Beitrag zur physiol. Optik. Göttingen 1845. Art. Dioptrik des Auges in R. WAGNERS Handwörterbuch der Physiologie. Braunschweig 1853. **4.** 451. Die negativen Knotenpunkte („akzessorische Punkte") im Tagebl. der Naturf.-Vers. Göttingen 1860. — [4] Siehe L. MATTHIESSEN, Grundriß der Dioptrik geschichteter Linsensysteme. Leipzig 1877. Klin. Monatsbl. f. Augenheilkunde 1882; Centralztg. f. Opt. u. Mech. 1885; BERLIN-EVERSBUSCHS Zeitschr. f. vergleich. Augenheilk. **4.** 1887; DREWS, EXNERS Rep. de Phys. **25.** 707. 1889, wo die einschlägige Literatur teilweise zitiert wird, sehr vollständig bei HANS HEDERICH, Diss. Rostock 1892; die meisten sind aus bestimmten Verwirklichungsweisen der Abbildung abgeleitet, z. B. die symptotischen Punktepaare, in denen Objekt und Bild zusammenfallen (J. B. LISTING, POGG. Ann. **129.** 466. 1866; im Falle der teleskopischen Abbildung wandert ein symptotisches Punktepaar ins Unendliche; das andere heißt dann auch „Centrum der Abbildung", MAXWELL, l. c., später BRAVAIS, Ann. Chim. Phys. (4) **10.** 1867).

einem anderen Gesichtspunkte aus, als dem der allgemeinen Abbildung, ein Interesse und praktische Bedeutung haben.

Graphische Konstruktionen.

Jedes optische System ist, wie wir gesehen haben, durch vier Bestimmungsstücke vollständig bestimmt, nämlich durch die Orte der Brennebenen und die Werte der Brennweiten. Es wird auch durch zwei von den oben angeführten Paaren von Kardinalpunkten oder durch eins von diesen in Verbindung mit einem der soeben genannten Elemente eindeutig bestimmt, wie wir noch näher sehen werden. Die sogen. Kardinalpunkte bieten die Möglichkeit, auf graphischem Wege in sehr einfacher Weise zu einem Punkt oder Strahl den konjugierten Punkt oder Strahl zu ermitteln.

Diese Konstruktionen, welche vom geometrischen Gesichtspunkte aus ganz interessant sind, haben für uns eine untergeordnete Bedeutung. Dagegen besteht meistens die Gefahr, daß die nützlichsten Hilfslinien mit den wichtigsten wirksamen Strahlen verwechselt werden; z. B. die nach den Hauptpunkten zielenden Linien mit den später eingeführten „Hauptstrahlen". Es sei deshalb auf die reichhaltige einschlägige Literatur verwiesen[1] und hier nur die eine Aufgabe behandelt: „Zu einem Punkte P den konjugierten P' zu finden, wenn die Brennpunkte F, F' und Brennweiten f, f' gegeben sind" (Figur 14). Mit den Brennebenen und Brennweiten sind ja indirekt (gemäß der Tabelle auf voriger Seite) auch die beiden Paare von Hauptpunkten gegeben — indem man nur von F



Figur 14.
Konstruktion des Bildpunktes P' von P, wenn die Brennpunkte F und F' und die Brennweiten f und f' gegeben sind.

[1] Außer den bereits angeführten Abhandlungen von GAUSS, LISTING, LIPPICH, BECK und TÖPLER die meisten Darstellungen dieser sogen. GAUSSschen Theorie; insbesondere J. C. MAXWELL, On the general laws of optical instruments. Phil. Mag. 1856 und Quart. Journ. **2.** 233. 1858; Scient. Paps. **1.** 271. J. GAVARRET, Des images par réflexion et par réfraction. Paris 1866. C. NEUMANN, Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystems. Leipzig 1866. A. MARTIN, Interprétation géométrique et continuation de la théorie des lentilles de GAUSS. Thèses prés. à la Fac. des Sc. de Paris 1867; Ann. de Chim. et de Phys. (4) **10.** 1867. E. REUSCH, Konstruktionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystems. Leipzig 1870. G. FERRARIS, Die Fundamentaleigenschaften der dioptrischen Instrumente. Turin 1877; Übersetzung von LIPPICH. Leipzig 1879. F. KESSLER, Beiträge zur graphischen Dioptrik; Ztschr. f. Math. u. Phys. **29.** 1884. C. M. GARIEL, Études d'optique géométrique. Paris 1889. L. MATTHIESSEN, Bestimmung der Lage der Kollineationsebene und des Kollineationszentrums eines optischen Systems, Zentr.-Ztg. f. Opt. u. Mech. **14.** 1. 1893. R. S. COLE, Graphical Methods for lenses, Phil. Mag. **46.** 216. 1896.

aus beiderseits die Strecke f, von F' aus f' abzutragen hat, und ebenso die beiden Paare von Knotenpunkten — indem man von F aus beiderseits f', von F' aus f auf der Achse abträgt — und damit ist die Möglichkeit gegeben, gleich deren Eigenschaften zur Konstruktion mit zu benützen und umgekehrt. Denken wir uns auf diese Weise z. B. die (positiven) Hauptebenen H, H' gezeichnet, so lassen wir vom gegebenen Punkte P einen Strahl parallel zur x-Achse ausgehen; er schneidet die Hauptebene H in der Entfernung h. Der konjugierte Strahl schneidet dann die Hauptebene H' in derselben Höhe und geht durch den zweiten Brennpunkt F', ist also völlig bestimmt. Ein zweiter Strahl gehe von P durch F und schneide H in der Entfernung $h' (= f \cdot \operatorname{tg} u)$. Der konjugierte Strahl schneidet H' in gleicher Höhe und ist der Achse x' parallel, also ebenfalls bestimmt. P' liegt im Schnittpunkte dieser beiden Strahlen.

Die analogen Aufgaben werden meist in ähnlicher Weise gelöst.

Die Abbildungsgleichungen, bezogen auf konjugierte Punkte.

Wir haben zuletzt stets von den Gleichungen (12) Gebrauch gemacht, in welchen die Abszissen beider Räume von den Unstetigkeitsebenen derselben an gemessen sind. Schon um den singulären Fall der teleskopischen Abbildung behandeln zu können, aber auch aus andern praktischen Gründen wollen wir die vorher gewonnenen Resultate auch auf die Form (13) der Abbildungsgleichungen anwenden, in welchen die Abszissen von einem Paar konjugierter Punkte an gemessen sind.

Um nicht alle Betrachtungen in wenig veränderter Form noch einmal bei diesen Gleichungen (13) wiederholen zn müssen, gehen wir vielmehr von den schon eingeführten Beziehungen und Gleichungen aus und verschieben nur die Koordinatensysteme entsprechend in der Richtung der x-Achse. Seien die Abszissen eines Paares konjugierter Punkte — der neuen Anfangspunkte —, bezogen auf die Brennebenen, x_0 und x_0', die eines beliebigen anderen Paares, bezogen auf dieselben Ebenen, x und x', dann sind die Abszissen der letzteren, bezogen auf die ersteren als Anfangspunkte, $\xi = x - x_0$ und $\xi' = x' - x_0'$, und wir haben die Beziehungen zwischen diesen Größen und den Brennweiten

$$x_0 \cdot x_0' = f \cdot f'$$

und

$$x \cdot x' = f \cdot f'$$

oder

$$(x_0 + \xi)(x_0' + \xi') = f \cdot f' \quad ,$$

was unter Benützung der ersteren Gleichung übergeht in

$$x_0' \xi + x_0 \xi' + \xi \xi' = 0$$

oder

$$\frac{x_0'}{\xi'} + \frac{x_0}{\xi} + 1 = 0 \quad . \tag{II}$$

Diese Gleichung drückt die Abszissen der konjugierten Punkte, bezogen auf ein Grundpaar von solchen, durch die Entfernungen dieser Grundpunkte von den Brennebenen aus (bei HELMHOLTZ[1] und anderen umgekehrt durch die Abszissen der Brennebenen in bezug auf die Grundpunkte, daher die Verschiedenheit der Vorzeichen in dem konstanten Gliede hier und bei jenen).

Die Gleichung für die Vergrößerung wird ohne weiteres aus der früher abgeleiteten

[1] H. HELMHOLTZ, Handb. d. physiol. Optik. Hamburg u. Leipzig, 1. Aufl. von 1856 bis 1866, 2. Aufl. 1885—1896, § 9, u. Wissensch. Abhandl. Leipzig 1883. **2.** 94. 98.

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{x_0' + \xi'}{f'} = \frac{f}{x_0 + \xi} \quad ;$$

ebenso das Konvergenzverhältnis (II)

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = -\frac{x_0 + \xi}{f'} = -\frac{f}{x_0' + \xi'} \quad .$$

Um von den Abszissen der neuen Koordinatenanfangspunkte in bezug auf die Brennebenen ganz unabhängig zu werden, können wir statt derselben die Brennweiten f und f', und die in den Grundpunkten bestehende Vergrößerung $\beta_0 = \frac{x_0'}{f'} = \frac{f}{x_0}$ einführen. Es wird dann die Abszissengleichung:

$$\frac{f'}{\xi'}\beta_0 + \frac{f}{\xi}\frac{1}{\beta_0} + 1 = 0 \quad ,$$

die Ordinatengleichung (II*)

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f'\beta_0 + \xi'}{f'} = \frac{f\beta_0}{f + \xi\beta_0}$$

und das Konvergenzverhältnis

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = -\frac{(f + \xi\beta_0)}{f'\beta_0} = -\frac{f}{f'\beta_0 + \xi'} \quad .$$

Aus der Gleichung β folgt auch:

$$\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta_0} = \frac{\xi}{f}$$

$$\beta - \beta_0 = \frac{\xi'}{f'}$$

$$\frac{\xi}{\xi'} = -\frac{f}{f'}\beta\beta_0 \tag{16}$$

Diese Gleichungen erhalten eine besonders einfache Form, wenn man als Grundpunkte solche wählt, in denen β_0 einen geeigneten Wert hat. Die wichtigste derselben ist die auf die Hauptpunkte bezogene, in welchen $\beta_0 = +1$ ist: nämlich es wird dann

$$\frac{f'}{\xi'} + \frac{f}{\xi} + 1 = 0 \quad ,$$

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{f + \xi} = \frac{f' + \xi'}{f'} \quad , \qquad \text{(II**)}$$

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = -\frac{f'}{f' + \xi'} = -\frac{f + \xi}{f'} \quad .$$

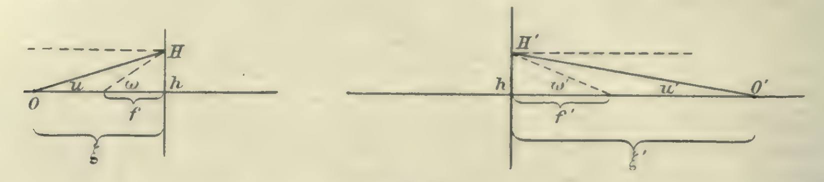
Gleichung (16) wird hier

$$\frac{\xi}{\xi'} = -\frac{f}{f'}\beta \quad . \tag{17}$$

Um Verwechselungen mit den von anderen Autoren, z. B. Helmholtz abgeleiteten Gleichungen zu vermeiden, sei nochmals daran erinnert, daß hier die Abszissen in beiden Räumen von den betreffenden Punkten in gleichem Sinne, nämlich in der Richtung der Lichtbewegung als positiv gerechnet sind.

Hieraus folgt eine oft gebrauchte Beziehung für die Konvergenzwinkel konjugierter Strahlen und die Brennweiten.

Seien OH und $H'O'$ zwei beliebige konjugierte Strahlen, die die Hauptebenen bei H und H' (in gleicher Höhe) schneiden. In derselben Höhe falle bei H ein achsenparalleler Strahl ein und trete bei H' ein solcher aus.



Figur 15.
Ein Paar konjugierter Strahlen von gleicher Einfallshöhe in der Hauptebene.

Dann ist

$$\frac{h}{\operatorname{tg}\omega'} = f' \quad , \qquad \frac{h}{\operatorname{tg}\omega} = f \quad ;$$

nun folgt aus (II**)

$$\frac{h}{\xi'} + \frac{f}{f'}\frac{h}{\xi} = -\frac{h}{f'} \quad ,$$

$$\operatorname{tg} u + \frac{f}{f'}\operatorname{tg} u = + \operatorname{tg}\omega'$$

und

$$\operatorname{tg} u' + \frac{f'}{f}\operatorname{tg} u = + \operatorname{tg}\omega$$

$$(18) \qquad f'\operatorname{tg} u' + f\operatorname{tg} u = + f'\operatorname{tg}\omega' = + f\operatorname{tg}\omega \quad ,$$

also für beliebige Strahlenpaare von gleicher Einfallshöhe in der Hauptebene konstant.

Bezieht man die Abszissen auf die negativen (Töplerschen) Hauptebenen, in welchen $\beta_0 = -1$ ist, so erhält man entsprechend

$$\frac{f'}{\xi'} + \frac{f}{\xi} - 1 = 0$$

und

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{f-\xi} = \frac{\xi' - f'}{f'} \text{ u. s. w.} \quad ,$$

also gleiche Ausdrücke wie Helmholtz für die positiven Hauptebenen erhält, indem er ξ' entgegengesetzt mißt wie ξ und die Vorzeichen der Brennweiten umgekehrt bestimmt, als wir es taten.

Ähnlich könnte man statt β_0 γ_0 einführen und einfache Gleichungen herleiten, welche auf die Knotenpunkte bezogen sind, in welchen $\gamma_0 = \pm 1$ ist. Doch haben solche Gleichungen nur in speziellen Fällen Wert.

Die Teleskopische Abbildung.

Die im letzten Abschnitt hergeleiteten Gleichungen behalten nach der Bemerkung auf S. 37 ihre Anwendbarkeit auch in dem Falle der teleskopischen Abbildung; das Charakteristische desselben war dort das Verschwinden von a; und da ein Vergleich von II* mit der Gleichung (13) S. 37 lehrt, daß $f = \frac{1}{a}$; $f' = -\frac{a_1}{a} \cdot \frac{1}{\beta_0^{\,2}}$ ist, besteht es jetzt darin, daß in ihm die Brennweiten beide

unendlich groß werden, aber konstantes endliches Verhältnis behalten.

Bringt man durch Division mit f bezw. f' die Gleichungen (II*) auf eine Form, in welcher teils $\frac{f'}{f}$ teils f oder f' allein als Faktoren bezw. Divisoren auftreten und setzt dann f und $f' = \infty$, so wird die Abszissengleichung

$$\frac{\xi'}{\xi} = -\beta_0^2 \left(\frac{f'}{f}\right) = \text{const}(\xi', \xi) \quad ,$$

ferner

$$\beta = \frac{y'}{y} = \beta_0 = \text{const}(\xi', \xi)$$

entsprechend den früher für diesen Fall abgeleiteten Gleichungen (14) S. 37.

Im Falle der teleskopischen Abbildung hat das Konvergenzverhältnis γ eine besondere praktische Bedeutung: denn bei der Abbildung eines unendlich entfernten Objekts in ein unendlich entferntes Bild kann man ja nur noch von diesem, d. i. der **Angularvergrößerung**, reden.

Gemäß den allgemein gültigen Gleichungen (I*) ist $\gamma = -\frac{f}{f'}\frac{1}{\beta_0}$, also ebenfalls konstant $= \gamma_0$.

Durch den Wert dieser Angularvergrößerung ausgedrückt, wird demnach das Verhältnis konjugierter Abszissen, gemessen von einem Paare konjugierter Punkte an,

$$\frac{\xi'}{\xi} = -\frac{f}{f'}\frac{1}{\gamma_0^2} = \frac{d\xi'}{d\xi} = \alpha_0$$

und das Verhältnis konjugierter Ordinaten

$$\text{(III)} \qquad \frac{y'}{y} = -\frac{f}{f'}\frac{1}{\gamma_0} = \beta_0 \quad .$$

Die Gesetze der Kombination optischer Systeme.

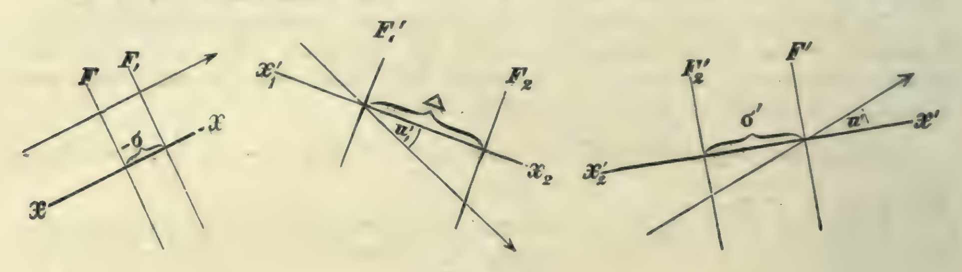
Der Bildraum einer gegebenen ersten Abbildung kann Objektraum einer zweiten sein u. s. f. Den Effekt dieser zwei (oder mehr) sukzessiven Abbildungen kann man als eine einzige Abbildung auffassen, deren Bestimmungsstücke der Lage und Richtung bezw. Größe nach von den Bestimmungsstücken der einzelnen Abbildungen und deren gegenseitiger Lage abhängen. Dies ist ein praktisch sehr wichtiges Moment. Denn physisch wird eine Abbildung fast stets durch eine Reihe sukzessiver Einzelabbildungen vermittelt. Die Gesamtheit der physikalischen Agentien, durch welche die von den Punkten eines Objektraumes divergierenden Lichtstrahlen in Punkten des Bildraumes vereinigt werden und so das zustande bringen, was wir eine „optische Abbildung“ genannt haben, heißt das „optische“ oder „abbildende System“. Das optische System ist der reale Träger der Abbildung, und die Bestimmungsstücke, welche wir bisher vom rein geometrischen Standpunkte aus einer „Abbildung“ zusprachen, können wir in konkreterer Ausdrucksweise dem optischen System zuerteilen, welches die Abbildung zustande bringt. Ein optisches System ist fast stets zusammengesetzt aus Partialsystemen, die jedes für sich ebenfalls eine Abbildung herbeiführen. Wenn wir studiert haben, wie sich die Abbildung des Gesamtsystems aus den Abbildungskonstanten und der gegenseitigen Lage der Partialsysteme berechnet, so wird es weiterhin genügen, die speziellen Abbildungsweisen der letzten Elementarsysteme zu studieren, in die man ein gegebenes zerlegen kann, um mit Hilfe jener vorher erhaltenen

Kombinationsgesetze die Wirkung eines beliebig zusammengesetzten Systems vollständig behandeln zu können.

Die Zusammensetzung zweier Abbildungen (zweier optischer Systeme).

a) Zusammensetzung zweier endlicher Abbildungen zu einer endlichen.

Machen wir die beschränkende — in praxi aber stets sehr annähernd erfüllte — Annahme, daß die Achse des Bildraumes des ersten Systems zusammenfalle mit der Achse des Objektraumes des zweiten Systems[1]. (Gewöhnlich wird die unnötige Annahme gemacht, daß alle vier Achsen zusammenfallen.) Seien dann F_1, F_1' die Brennebenen, f_1, f_1' die Brennweiten des ersten Systems; F_2, F_2', f_2, f_2' ebenso die Brennebenen und Brennweiten des



Figur 16.

zweiten Systems, wobei Ebene $F_2 \parallel F_1'$, und sei endlich die Lage der beiden Systeme gegeneinander gegeben durch den (im Sinne der Lichtbewegung gemessenen) Abstand der Objektbrennebene des zweiten Systems (F_2) von der Bildbrennebene des ersten (F_1'), also $F_1 F_2 = \Delta$.

Dann ist die Abbildung des ganzen aus den Systemen I und II zusammengesetzten Systems bestimmt, wenn die Lage seiner Brennebenen F, F' und die Größe seiner Brennweiten f, f' ermittelt ist.

Zunächst 1. geht aus den gemachten Annahmen hervor, daß die Brennebene F parallel ist F_1 und F' parallel F_2'; denn den zur Ebene F_1 parallelen Ebenen entsprechen im Bildraum von I Ebenen, die zu F_1' parallel sind, also laut Annahme auch zu F_2; letzteren aber entsprechen Ebenen, die zu F_2' parallel sind, also schließlich den zu F_1 parallelen Ebenen solche, die zu F_2 parallel sind. Wir sahen aber (p. 34), daß es im allgemeinen bei jeder optischen Abbildung nur eine Schar von parallelen Ebenen im einen Raume gibt, welcher eine ebensolche im anderen entspricht, und daß diesen die Unstetigkeitsebenen der betreffenden Räume parallel sind. Ferner

2. Die Objektachse des ersten Systems ist Objektachse, die Bildachse des zweiten Systems Bildachse des Gesamtsystems. Denn diese Achsen sind, wie leicht ersichtlich, Bilder voneinander und gemäß unseren allgemeinen Betrachtungen gibt es nur ein Paar zu den Brennebenen senkrechter Geraden, die zueinander konjugiert sind, welche Geraden wir zu Hauptachsen der Abbildung wählten.

3. Die Orte der Brennebenen F und F' ergeben sich aus der Überlegung, daß F', als die der unendlich fernen Ebene des Objektraumes in bezug auf das ganze System konjugierte Ebene, konjugiert sein muß der Ebene F_1' in bezug auf

[1] Wenn die Objektachse des zweiten Systems nicht mit der Bildachse des ersten koinzidiert, so sind auch die Objekt- und Bildachsen des ganzen Systems im allgemeinen der Lage und Richtung nach verschieden von denen des ersten bezw. zweiten Systems. Doch müssen wir auf ein näheres Eingehen auf diesen Fall hier verzichten. Vgl. u. a. F. Casorati, l. c., F. Neesen, Diss. Bonn 1871; A. Schwarz, Diss. Rostock 1892.

das System II. Bezeichnen wir den — wieder im Sinne der Lichtbewegung gemessenen Abstand der F' von F_2' mit σ', so ist σ' der in bezug auf II konjugierte Brennpunktsabstand zu der Strecke $F_2 F_1' = -\varDelta$, also

$$\sigma' = -\frac{f_2 \cdot f_2'}{\varDelta} \quad .$$

Ganz analog erhält man $\sigma = +\frac{f_1 f_1'}{\varDelta}$, den Abstand der Ebene F von F_1, im gleichen Sinne gemessen, wenn F als die in bezug auf System I zu F_2 konjugierte Ebene betrachtet wird.

4. Um die Größen der Brennweiten zu finden, gehen wir auf deren Definitionsgleichungen zurück

$$f = \frac{h}{\operatorname{tg} u} \qquad f' = \frac{h}{\operatorname{tg} u'} \quad .$$

Ein parallel zur Objektachse des ersten — also auch des ganzen Systems in der Höhe h über dieser Achse einfallender Strahl schneidet nach Durchsetzung des Systems I die Bildachse desselben (= Objektachse des zweiten Systems) im Punkte F_1' und unter einem Winkel u_1', der sich bestimmt aus der Definitionsgleichung $f_1' = \frac{h}{\operatorname{tg} u_1'}$. Unterliegt dieser Strahl nunmehr der Abbildung durch das zweite System, so wissen wir bereits, daß er dessen Bildachse in F' schneidet, in der vorhin angegebenen Entfernung σ' von F_2' und dies unter einem Winkel u', der sich bestimmt aus der Gleichung für das Konvergenzverhältnis in konjugierten Achsenpunkten, nämlich hier

$$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u_1'} = -\frac{x_2}{f_2'} = +\frac{\varDelta}{f_2'} \quad .$$

Diese Gleichung, kombiniert mit der für u_1', ergibt

$$f' = \frac{h}{\operatorname{tg} u'} = +\frac{f_1' \cdot f_2'}{\varDelta} \quad .$$

Ganz ebenso erhält man durch Verfolgung eines zur Bildachse des zweiten (und ganzen) Systems parallel austretenden Strahles nach rückwärts

$$f = \frac{h'}{\operatorname{tg} u} = -\frac{f_1 \cdot f_2}{\varDelta} \quad .$$

Durch diese vier Größen σ, σ', f, f', und die vorher gemachten Lagenbestimmungen ist die Abbildung des ganzen Systems vollständig definiert.

Die angegebenen Formeln gestatten, in sehr einfacher Weise zu übersehen, wie die Lagen der resultierenden Brennebenen und die Größen und Vorzeichen der resultierenden Brennweiten abhängen von den Brennweiten der Partialsysteme und der Größe $\varDelta$, dem „optischen Abstand" derselben. Indem wir diese Diskussion für später aufsparen, wo wir sie an konkrete Fälle anknüpfen können, weisen wir hier nur im allgemeinen auf die durch die Variabilität von $\varDelta$ gegebene große Variabilität der Endgrößen bei gegebenen f_1, f_2, f_1', f_2' hin.

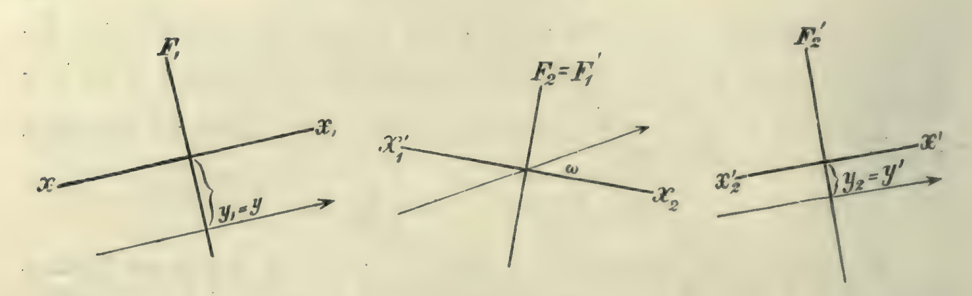
b) Zusammensetzung zweier endlicher Systeme zu einem teleskopischen.

Im besonderen kann der Fall eintreten, daß $\varDelta = 0$ ist, d. h. der vordere Brennpunkt des zweiten Systems zusammenfällt mit dem hinteren Brennpunkt des ersten. Alsdann wird $f = \infty$ und auch $f' = \infty$, also die Abbildung eine

teleskopische. Das Verhältnis von f zu f' jedoch bleibt ein endliches, wie schon daraus hervorgeht, daß gemäß den obigen Formeln

$$\frac{f'}{f} = m = -\frac{f_1' \cdot f_2'}{f_1 \cdot f_2} = -\left(\frac{f_1'}{f_1}\right) \cdot \left(\frac{f_2'}{f_2}\right)$$

ist.



Figur 17.

Um in diesem Falle die Konstanten der Abbildung aus denen der Partialsysteme zu berechnen, genügt die einfache Betrachtung, daß ein parallel zur Achse eintretender Strahl durch den gemeinsamen Brennpunkt beider Partialsysteme gehen und parallel der Achse aus dem zweiten wieder austreten muß. Das Vergrößerungsverhältnis $\frac{y'}{y} = \beta$, welches für alle Punkte der Achse konstant ist, ist nun $= \frac{y'}{\operatorname{tg} w} : \frac{y}{\operatorname{tg} w}$, wenn w den Winkel bezeichnet, unter dem ein in der Höhe y parallel zur Achse einfallender Strahl zwischen beiden Systemen die Achse schneidet. Also ist

$$\frac{y'}{y} = \beta_0 = \frac{f_2}{f_1'} \quad .$$

Hiernach die Angularvergrößerung

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \gamma_0 = -\frac{1}{m\,\beta_0} = +\frac{f_1}{f_2'}$$

und das Verhältnis konjugierter Abszissen in unserer früheren Bezeichnung

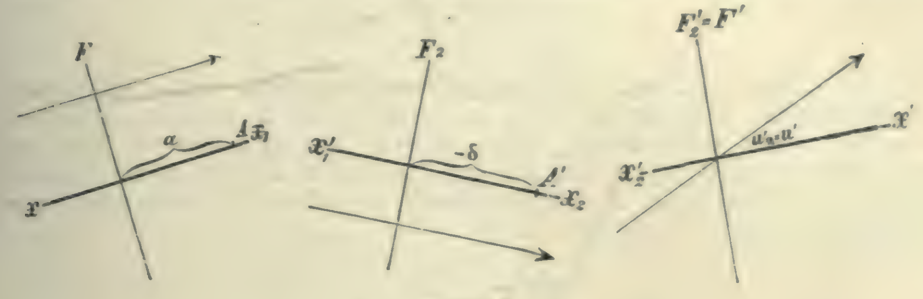
$$\frac{\xi'}{\xi} = -m\,\beta_0{}^2 = +\frac{f_2 \cdot f_2'}{f_1\,f_1'} \quad .$$

Die Lage eines Paares konjugierter Punkte muß besonders bestimmt werden. Ein solches Paar sind aber offenbar hier (wie immer) der vordere Brennpunkt des ersten Systems und der hintere des zweiten.

c) Kombination zweier Systeme, von denen das eine ein teleskopisches ist.

Sei das erste ein teleskopisches und durch den Wert von β_1 oder γ_1, sowie durch die Lage zweier konjugierter Punkte A, A' und das Verhältnis von $f_1' : f_1 = m_1$ bestimmt. Das zweite sei durch F_2, F_2', f_2, f_2' bestimmt, und die gegenseitige Lage der beiden Systeme durch den Abstand von F_2 gegen den Punkt A', $A'F_2 = \delta$. Die Bildachse des vorderen Systems koinzidiere wieder mit der Objektachse des hinteren. Dann ist der hintere Brennpunkt des zweiten Systems auch der des ganzen Systems, da parallel zur Achse einfallende Strahlen zwischen

beiden Systemen parallel zur Achse verlaufen, also auch ebenso auf das zweite System auffallen. Der vordere Brennpunkt des ganzen Systems ist leicht zu berechnen, als der in bezug auf das vordere (teleskopische System) zum vorderen



Figur 18.

Brennpunkt des zweiten Systems konjugierte. Sein Abstand a von A berechnet sich gemäß (III) zu

$$a = -\frac{\delta}{m_1 \beta_1^2} \quad \text{oder} \quad a = -m_1 \delta \cdot \gamma_1^2 \quad .$$

Die Brennweite des Bildraumes ist

$$f' = \frac{h}{\operatorname{tg} u'} = \frac{y_1}{y_1'} \cdot \frac{y_1'}{\operatorname{tg} u'} = \frac{1}{\beta_1} \cdot f_2' = -m_1 \gamma_1 \quad ,$$

die des Objektraumes

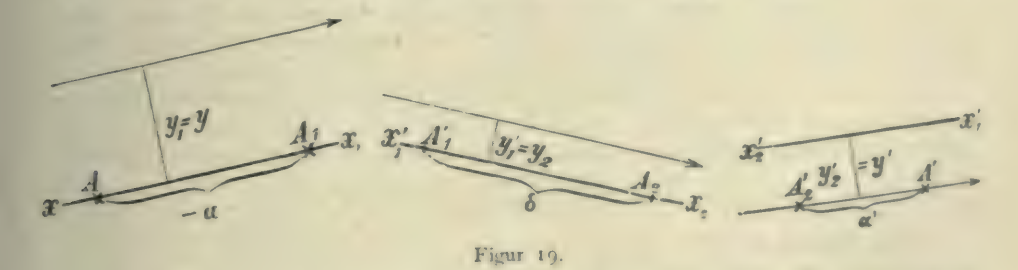
$$f = \frac{h'}{\operatorname{tg} u} = \frac{h'}{\operatorname{tg} w} \cdot \frac{\operatorname{tg} w}{\operatorname{tg} u} = f_2 \cdot \gamma_1 = -\frac{1}{m_1 \beta_1} \cdot f_2 \quad .$$

Die Bedeutung der hier benützten Zwischengrößen y_1, y_1', w ist aus ihrer Bezeichnung wohl ohne weiteres ersichtlich.

Ganz analog ist die Betrachtung, wenn das vordere System endlich, das hintere teleskopisch ist.

d) Kombination zweier teleskopischer Abbildungen.

Jede sei durch die Werte von β oder γ, und die Lage eines Paares konjugierter Punkte A_1, A_1'; A_2, A_2', sowie die Verhältnisse $m_1 = \left(\frac{f_1'}{f_1}\right)$; $m_2 = \left(\frac{f_2'}{f_2}\right)$ gegeben; die gegenseitige Lage durch den Abstand $A_1' A_2 = \delta$.



Figur 19.

Die resultierende Abbildung ist, wie leicht einzusehen, ebenfalls teleskopisch. Ihr Vergrößerungsverhältnis $\beta = \frac{y'}{y}$, sowie ihr Konvergenzverhältnis γ je gleich dem Produkt der betreffenden Verhältnisse der Einzelsysteme. Denn

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{y'}{y_1} \cdot \frac{y_1}{y} = \beta_2 \cdot \beta_1$$

ebenso

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} w} \cdot \frac{\operatorname{tg} w}{\operatorname{tg} u} = \gamma_2 \cdot \gamma_1 \quad .$$

Die Lage eines, und sogar zweier Paare konjugierter Punkte ist ebenfalls leicht ermittelt, denn der zu A_1' in bezug auf System 2 konjugierte Punkt A' liegt von A_2' in der Entfernung $a' = -m_2 \delta \cdot \beta_2^2$ und ist offenbar in bezug auf das ganze System konjugiert zu A_1. Ebenso ist der zu A_2 in bezug auf System 1 konjugierte Punkt A von A_1 um eine Strecke a entfernt (im Sinne des Lichteinfalls!), die gegeben ist durch

$$a = -\frac{\delta}{m_1 \beta_1^2} \quad .$$

Wir haben also im ganzen das Resultat: Durch Kombination zweier endlicher Systeme entsteht im allgemeinen eine endliche, nur in einem Falle eine teleskopische Abbildung. Durch Zusammensetzung zweier teleskopischer Abbildungen entsteht immer eine teleskopische; durch Zusammentreten einer endlichen und einer teleskopischen Abbildung immer eine endliche.

Umgekehrt läßt sich nach denselben Betrachtungen und Formeln eine gegebene endliche Abbildung immer in zwei endliche oder in eine endliche und eine teleskopische Teilabbildung zerlegen; eine gegebene teleskopische Abbildung entweder auch in zwei endliche (mit den zugewandten Brennpunkten koinzidierende) oder in zwei teleskopische. —

Unsere Formeln gestatten ohne weiteres die Ausdehnung auf beliebig viele Systeme, wobei wir uns auf den Fall lauter endlicher Systeme beschränken wollen.

Zusammensetzung beliebig vieler endlicher Systeme.

Der Abstand der vorderen Brennebene des Gesamtsystems von der vorderen des ersten Systems sei wieder mit σ, der Abstand der hinteren Brennebene des Gesamtsystems von der des letzten Einzelsystems mit σ' bezeichnet; die Brennweiten der Einzelsysteme mit f_1, f_1'; f_2, f_2' .... $f_k \cdot f_k'$, die des Ganzen mit f und f'.

In bezug auf die Richtung der Brennebenen und die Lage der Hauptachsen des ganzen Systems gelten dieselben Betrachtungen wie vorher: dieselben fallen bezw. zusammen mit der Objektbrennebene und Objektachse des ersten, sowie der Bildbrennebene und der Bildachse des letzten Einzelsystems.

Um die Lage der Brennebenen und die Größe der Brennweiten des Gesamtsystems zu berechnen aus denen der einzelnen Systeme, seien die Abstände der einander zugewandten Brennpunkte je zweier aufeinander folgender Systeme

$$F_1'F_2 = \Delta_1 , \quad F_2'F_3 = \Delta_2 , \quad F'_{k-1} F_k = \Delta_k \quad .$$

Die hintere Brennebene des Gesamtsystems ist das Bild der hinteren Brennebene des ersten Systems, welches sukzessive von den darauffolgenden Systemen entworfen wird. Bezeichnet man den Abstand der hinteren Brennebene des aus den p ersten Systemen gebildeten Systems von der des p ten mit σ_p', so hat man, wie leicht ersichtlich, zur Bestimmung von $\sigma' = \sigma_k'$ folgendes System von Gleichungen:

$$\sigma_2' = -\frac{f_2 \cdot f_2'}{\Delta_1} \quad ; \qquad \sigma_3' = -\frac{f_3 \cdot f_3'}{\Delta_2 - \sigma_2'} \text{ u. s. w.} \quad ;$$

allgemein

$$\sigma_p' = -\frac{f_p \cdot f_p'}{\Delta_{p-1} - \sigma'_{p-1}} \quad .$$

Hieraus ergibt sich σ' zunächst in Form eines Kettenbruchs

$$\sigma' = -\cfrac{f_k \cdot f_k'}{\Delta_{k-1} + \cfrac{f_{k-1} \cdot f'_{k-1}}{\Delta_{k-2} + \cfrac{\vdots}{\Delta_2 + \cfrac{f_2 f_2'}{\Delta_1}}}} \quad .$$

Ganz ebenso erhält man

$$\sigma' = +\cfrac{f_1 \cdot f_1'}{\Delta_1 + \cfrac{f_2 f_2'}{\Delta_2 + \cfrac{\vdots}{\Delta_{k-1} + \cfrac{f_{k-1} f'_{k-1}}{\Delta_{k-1}}}}} \quad .$$

Um die Brennweiten des Gesamtsystems zu finden, haben wir ganz ebenso wie bei der Zusammensetzung zweier Systeme sukzessive das Konvergenzverhältnis in den Punkten zu suchen, in welche F_1' der Reihe nach abgebildet wird und alle diese Verhältnisse miteinander und mit f' zu multiplizieren. Das Resultat ist

$$\frac{h}{\operatorname{tg} u_1'} \cdot \frac{\operatorname{tg} u_1'}{\operatorname{tg} u_2'} \cdot \frac{\operatorname{tg} u_2'}{\operatorname{tg} u_3'} \cdots \frac{\operatorname{tg} u_{k-1}'}{\operatorname{tg} u_k'} = \frac{h}{\operatorname{tg} u'} = f' \quad .$$

Wir erhalten auf diese Weise, wenn wir die Brennweite des aus den ersten p Systemen gebildeten mit $f'_{1,p}$ bezeichnen, sukzessive

$$f'_{1.2} = \frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta_1} \quad ; \qquad f'_{1.3} = \frac{f'_{1.2} \cdot f_3'}{\Delta_2 - \sigma_2'} \quad ; \quad \ldots \ldots f'_{1.k} = f' = \frac{f'_{1.k-1} \cdot f_k'}{\Delta_{k-1} - \sigma'_{k-1}} \quad .$$

Also

$$f' = \frac{f_1' \cdot f_2' \cdot f_3' \cdots f_k'}{\Delta_1 (\Delta_2 - \sigma_2') \cdot (\Delta_3 - \sigma_3') \cdots (\Delta_{k-1} - \sigma'_{k-1})} \quad .$$

Der Nenner dieses Ausdrucks ist nach den oben für σ_p' aufgestellten Formeln ohne weiteres zu berechnen. Bezeichnen wir ihn mit N_k, so ist aus obiger Herleitung ersichtlich, daß N_k mit den vorangehenden Werten N_{k-1}, N_{k-2} u. s. w. in der Weise zusammenhängt, daß

$$N_k = \frac{\Delta_{k-1} N_{k-1} + f_{k-1} \cdot f'_{k-1}}{N_{k-1}}$$

ist u. s. f. Mit Hilfe dieser Beziehung ist N_k noch leichter zu berechnen. Man kann das Resultat dieser Rechnung auch unmittelbar in Kettenbruchform angeben

oder andere Schemata zu Hilfe nehmen. Doch wollen wir diese rein formelle Seite der Frage hier nicht weiter erörtern, sondern verweisen auf die einschlägige Literatur, in welcher die „dioptrischen Kettenbrüche" wiederholt behandelt worden sind[1].

Man erhält analog für f

$$f = (-1)^{k-1} \frac{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \cdot \cdot f_k}{N_k} \quad ,$$

wo N_k dieselbe Größe ist, wie in dem Ausdruck für f_1.

Wenn statt der Brennpunkte und Brennweiten, sowie der Brennpunktsabstände (Δ) andere Größen zur Bestimmung der Abbildungsweise und gegenseitigen Lage der Einzelsysteme gegeben sind, so erhält man durch analoge Verfahren, wie wir sie oben angewendet haben, die entsprechenden für das zusammengesetzte System. Wir unterlassen die Ausführung dieser Rechnung hier unter Verweis auf die unten zitierte Literatur.

Die Lagenbeziehung der Abbildungsräume.

Mit der Unterscheidung der rechtwendigen und der rückwendigen Abbildung haben wir die in der geometrischen Optik vorkommenden wesentlichen Verschiedenheiten der „Abbildung" erschöpft. Die optischen Systeme unterscheiden sich außerdem nur noch durch die Werte der Konstanten (Brennweiten) und durch die Lagenbeziehung der Abbildungsräume; jene können jeden beliebigen Wert zwischen 0 und ∞ annehmen; über die letztere lassen sich jedoch auch einige allgemeinere Aussagen machen.

Wir beschränken uns auf achsensymmetrische Abbildungen und den am häufigsten vorkommenden Fall, daß die Hauptachsen der beiden Räume in dieselbe Gerade fallen. Die Bildstrahlen sind bei jeder optischen Abbildung in Wirklichkeit die Fortsetzungen der Objektstrahlen. Nun muß ein in der xy-Ebene verlaufender Strahl sich nach den Abbildungsgleichungen in einen in der $x'y'$-Ebene verlaufenden verwandeln. Da aber die xy-Ebene für die physische Anordnung (die Linsen, Spiegel) Symmetrieebene ist, so muß der Strahl in dieser Ebene verbleiben. Also fällt die xy-Ebene mit der $x'y'$-Ebene zusammen; oder die y-Achse ist der y'-Achse parallel.

Sie können nun in bezug auf den Richtungssinn sowohl gleich- als entgegengesetzt liegen. Zur Erzeugung der Achsensymmetrie der Abbildung wird meist auch die physische Anordnung achsensymmetrisch sein; wir wollen voraussetzen,

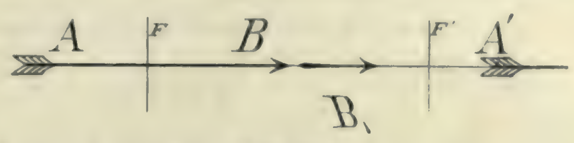
---

[1] A. F. MÖBIUS, Kurze Darstellung der Haupteigenschaften von Linsengläsern. CRELLES Journ. **5.** 113. 1829, und Beiträge zur Lehre von den Kettenbrüchen nebst einem Anhange dioptrischen Inhalts, ibid. **6.** 215. 1830. F. W. BESSEL, Über die Grundformen der Dioptrik, Astr. Nachr. **18.** 37. 1841. L. MATTHIESSEN, Grundriß der Dioptrik geschichteter Linsensysteme. Leipzig 1877. § 21 ff. Einführung der Determinanten in dies Problem von MOSSOTTI, Nuova teoria degli strumenti ottici, Pisa 1859, insbes. p. 21 (ohne Kenntnis der Untersuchungen von GAUSS [siehe Anhang] wesentlich auf LAGRANGE und BIOT [vgl. die Literatur am Schlusse des Kapitels] gestützt). F. CASORATI, Alcuni strumenti topogràfici a riflessione e le propietà cardinali dei cannocchiali anche non centrati. Milano 1872. p. 101. Weitere Ausarbeitungen auf diesem Wege von G. FERRARIS, Atti R. Acc. di Torino **16.** 7. 1880. A. BATTELLI, ibid. **19.** 1884; übersetzt in Zentr.-Ztg. f. Opt. u. Mech. **12.** 181. 1891. (Über die Kardinalpunkte afokaler dioptrischer Systeme). F. MONOYER, Séanc. Soc. Franc. de Phys. 1883. p. 148; übersetzt in EXNERS Repert. **21.** 58. 1885. L. MATTHIESSEN, SCHLÖMILCHS Ztschr. **29.** 343. 1884; **32.** 170. 1887. H. BROCKMANN, Beiträge zur Dioptrik zentr. sphär. Flächen, Dissert. Rostock 1887; H. HEDERICH, l. c. (p. 48). J. VAN DEN BERG, Over de berekening von gecentreerde Lenzenstelsels. Versl. K. Akad. Amsterd. **9.** 125. 1892. — Alle diese Arbeiten behandeln das Problem unter Voraussetzung der speziellen Verhältnisse, mit denen sich der nachfolgende Artikel beschäftigt.

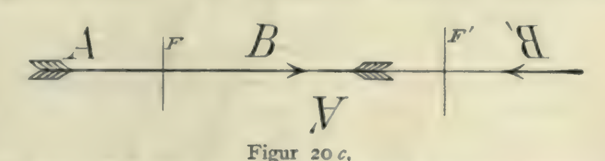
daß sie es ist, daß sie also eine Unterscheidung der y- und z-Achse nicht gestattet; es wird dann, wenn die y- und y'-Achse gleichen Richtungssinn besitzen, dasselbe für die z- und z'-Achse gelten; und wenn die y und y'-Achse entgegengesetzt gerichtet sind, so werden es auch die z- und z'-Achse sein.

Erinnern wir uns nun, daß wir, um Achsensymmetrie zu erhalten, bei rechtwendiger Abbildung in beiden Räumen gleichartige (z. B. kanonische) Koordinatensysteme zugrunde legen mußten, bei rückwendiger verschiedene (z. B. ein kanonisches und ein akanonisches), so ergibt sich, daß die oben gefolgerte Beziehung für den Richtungssinn der zwei Nebenachsen nur stattfinden kann, wenn bei rechtwendiger Abbildung die Haupt-(x)-achsen gleichen, bei rückwendiger entgegengesetzten Richtungssinn besitzen.

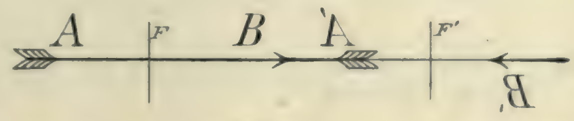
Figur 20 *a*.
Schema der rechtwendigen Abbildung durch kollektive Systeme.



Figur 20 *b*.
Schema der rechtwendigen Abbildung durch dispansive Systeme.



Figur 20 *c*.
Schema der rückwendigen Abbildung durch kollektive Systeme.



Figur 20 *d*.
Schema der rückwendigen Abbildung durch dispansive Systeme.

Nun sind bei beiden Arten der Abbildung noch zwei Fälle möglich:

1. Die (positiven) Seitenachsen liegen mit gleichem Richtungssinn (kollektive Lagenbeziehung oder **kollektive Systeme**).

2. Die (positiven) Seitenachsen liegen mit entgegengesetztem Richtungssinn (dispansive Lagenbeziehung oder **dispansive Systeme**).

Diese Unterscheidung bedeutet bei rechtwendigen Abbildungen, daß man etwa in Figur 9 die beiden Teile nur aneinander zu setzen braucht, um die gegenseitige Lage der beiden Räume bei kollektiven Systemen zu erhalten, während man bei dispansiven Systemen die zweite Figur vorher um 180° um die x'-Achse drehen muß (Figur 20 *a* und *b*). Bei rückwendiger Abbildung kann man sich die Wirkung kollektiver und dispansiver Systeme in derselben Weise veranschaulichen, wenn man außerdem die Figur 9 *b* um 180° um die y'-Achse dreht (Figur 20 *c* und *d*)[1].

Es wird also bei kollektiven Systemen die rechte Hälfte des Objektraumes aufrecht, die linke verkehrt abgebildet, bei dispansiven umgekehrt.

[1] Hiermit ist noch nichts über die Reihenfolge und Entfernung der beiden Brennebenen auf der Achse bestimmt; und auch die Figuren 18 *a*—*d* sollen darüber nichts aussagen. Der Bildraum ist in der Achse immer noch gegen den Objektraum beliebig verschiebbar zu denken, da alle Möglichkeiten der gegenseitigen Lage der beiden Brennebenen vorkommen. Ein Spezialfall wird unten betrachtet.

Koordinaten mit gemeinsamem Richtungssinn in beiden Räumen.

Diese Unterschiede in der räumlichen Beziehung machen sich in den Abbildungsgleichungen bemerklich, wenn wir an Stelle der früheren Festsetzungen den Koordinaten des Bildraumes denselben Richtungssinn erteilen wie denen des Objektraumes. Aus dem Obigen ergibt sich dann, daß wir bei katoptrischen Abbildungen die Hauptachse und bei dispansiver Lagenbeziehung die Seitenachse umkehren müssen.

Bezeichnen wir die neuen Koordinaten und die in den Abbildungsgleichungen nach deren Einführung auftretenden Konstanten mit großen Buchstaben, so ist:

$X' = x'$ bei dioptrischer,

$= -x'$ bei katoptrischer Abbildung; nun war stets $ff' < 0$.

Daher folgt aus

$$x \cdot x' = ff'$$

und

$$X \cdot X' = F \cdot F',$$

daß bei rechtwendiger Abbildung F und F' verschiedene, bei rückwendiger dasselbe Vorzeichen haben müssen.

Ferner ist

$Y' = y'$ für kollektive,

$= -y'$ für dispansive Systeme.

Da

$$f = \frac{y'}{y} \cdot x$$

immer positiv war, so folgt aus

$$F = \frac{Y'}{Y} \cdot x,$$

daß F positiv ist für kollektive, negativ für dispansive Systeme.

Aus der Gleichung

$$\beta\gamma = -\frac{f}{f'}$$

und der entsprechenden

$$B\Gamma = -\frac{F}{F'}$$

ergibt sich ferner:

Je nachdem F und F' gleiches / entgegengesetztes Vorzeichen haben, d. h. die Abbildung rückwendig / rechtwendig ist, entspricht eine positive Vergrößerung negativem / positivem Konvergenzverhältnis und eine negative Vergrößerung positivem / negativem Konvergenzverhältnis, mit anderen Worten: bei der rückwendigen Abbildung werden aufrechte Bilder zustande gebracht, wenn die Strahlen durch den Achsenpunkt in Objekt und Bild entgegengesetzt gegen die Achse geneigt sind, umgekehrte Bilder, wenn sie gleichseitig geneigt sind; bei der rechtwendigen Abbildung findet das umgekehrte Verhältnis statt.

Wir werden im folgenden stets, wenn die Hauptachsen der beiden Räume zusammenfallen, dieses Koordinatensystem anwenden und brauchen daher die darauf bezogenen Koordinaten und Konstanten nicht mehr durch große Buchstaben auszuzeichnen.

Das Zusammenfallen konjugierter Ebenen.

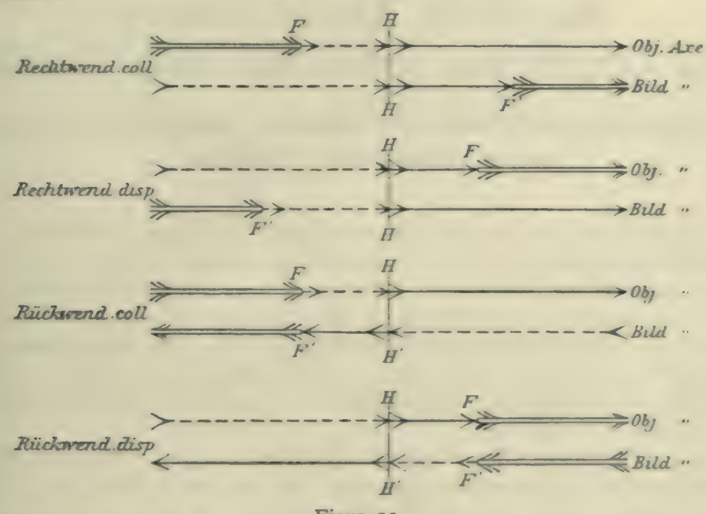
Von Interesse ist der besondere Fall, daß die konjugierten Punkte je einer Ebene des Objekt- und Bildraumes zusammenfallen. Diese können offenbar nur die Hauptebenen sein, und zwar nach dem oben Gesagten bei kollektiver Lagenbeziehung die früher (S. 48) als positiv bezeichneten Hauptebenen ($\beta = +1$), bei dispansiver die früher als negativ bezeichneten ($\beta = -1$), für die jetzt aber, bei Einführung des gemeinsamen Koordinatensystems „B“ ebenfalls $= +1$ wird. Die Abszissen der Hauptpunkte sind dadurch natürlich nicht verändert worden; die „positive“ Hauptebene lag aber, in der Lichtrichtung gemessen, im Objektraum hinter, im Bildraum vor der Brennebene, um den Betrag von f bezw. f' von ihr entfernt; die „negativen“ Hauptebenen lagen ebensoweit auf der anderen Seite.

Daraus folgt für rechtwendige Abbildungen, bei denen ja, wie gezeigt, die zusammenfallende x und x'-Achse gleichen Richtungssinn haben:

Bei kollektiven Systemen folgen die Brennebenen des Objekt- und Bildraumes hintereinander, getrennt durch die sich selbst konjugierte Ebene. Bei dispansiven Systemen folgt die Brennebene des Objektraumes hinter der des Bildraumes, wiederum getrennt durch die sich selbst konjugierte Ebene, die in beiden Fällen von den Brennebenen F und F', absolut genommen um f bezw. f' absteht.

Im Falle der rückwendigen Abbildung mußten wir die (nach der Lichtrichtung bestimmte) Achse des Bildraumes um 180° drehen, wenn sie mit der des Objektraumes zusammenfallen sollte. Daher liegt bei ihr die Brennebene des Bildraumes auf derselben Seite der sich selbst konjugierten Ebene wie die Brennebene des Objektraumes; also bei kollektiven Systemen im Sinne der gemeinsamen X-Koordinate (oder der Lichtbewegung im Objektraume) vor, bei dispansiven hinter dieser Ebene.

So spezialisieren sich die Figuren 20 für zusammenfallende Hauptebenen folgendermaßen:



Figur 21.

Schemata der vier Klassen von abbildenden Systemen bei zusammenfallenden Hauptebenen. Die in Wirklichkeit zusammenfallenden Achsen des Objekt- und Bildraumes sind untereinander gezeichnet, um sie zu unterscheiden. Die einander entsprechenden Stücke der beiden Achsen sind auf gleiche Weise hervorgehoben: die Pfeile geben die Reihenfolge des Entsprechens (und infolge der Rechtläufigkeit aller Abbildungen zugleich die Richtung der Lichtbewegung) an. Bei rückwendiger Abbildung sind die Brennweiten als von gleichem Betrage angenommen, da dieser Fall allein vorkommt. Die Brennpunkte fallen dadurch hier zusammen. Die Buchstaben A und B der Figuren 20 sind hier weggelassen, da die aufrechte oder umgekehrte Lage der Bilder bequemer aus jenen Figuren zu ersehen ist.

Literatur. Die Theorie der optischen Bilder ist, wie mehrfach hervorgehoben, fast stets unter spezielleren Voraussetzungen hergeleitet, als wir oben benützt haben. Die wichtigsten Arbeiten für die Entwickelung dieser Lehre sind, außer den im Text bereits angeführten von Gauss, Möbius, Bessel, Listing, Maxwell, Helmholtz, Casorati, Ferraris, Matthiessen u. a. noch aus der Zeit vor Gauss: J. Kepler, Dioptrice, Augsburg 1611 (ohne Kenntnis des richtigen Brechungsgesetzes, auf der erfahrungsmäßigen Tatsache homozentrischer Strahlenvereinigung beruhend!). — R. Cotes in R. Smith, System of Opticks. Cambridge 1738. **2.** 76. — J. Harris, A treatise of optics. London 1775 (op. posth., geschr. zwischen 1742 u. 1750). — L. Euler, Dioptrice. Petersb. 1769—71. — J. B. Lagrange, Nouv. mém. acad. Berlin pour 1778. p. 162. 1780. — G. Piola, Effemer. astron. di Milano 1822. — J. B. Biot, Traité élém. d'Astron. phys. 3 ed. Paris 1841. **1.** u. **2.** — L. Seidel, Zur Dioptrik. Astr. Nachr. **37.** 105—120. 1853. — Von neueren Darstellungen sind noch zu erwähnen: K. L. Bauer, Zur Theorie dioptr. Instrum. München 1866. — F. Neesen, Abbild. v. leucht. Obj. in einem nicht zentr. Linsensystem. Diss. Bonn 1871. — V. v. Lang, Wien. Sitzber. **63.** 666. 1871; Pogg. Ann. **149.** 353. 1873. — P. A. Hansen, Untersuch. des Weges des Lichtstrahles durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Flächen. Abh. Sächs. Ak. d. Wissensch. **10.** 63—202. 1874. — O. Röthig, Die Probleme der Brechung und Reflexion. Leipzig 1876. p. 56 ff. — F. Parow, Durchgang des Lichtes durch beliebige brechende Flächen. Diss. Bonn 1876. — Ch. Pendlebury, Lenses and systems of lenses treated after the manner of Gauss. Cambridge 1884. — P. Zech, Math. naturw. Mitt. Tübingen 1887. — P. Zech, Die Geometrie unendlich dünner Strahlenbüschel und die Affinität ebener Systeme. Ztschr. f. Math. u. Phys. **17.** 353. Hällstén, Arch. f. Anat. u. Phys., Physiol. Abt. 1880. p. 115. — Govi, Atti della Reale Acad. dei Lincei **5.** 307. 1889. — L. Matthiessen, Zentralztg. f. Opt. u. Mech. XII. 1891. — A. Sampson, Eine Fortsetzung der „dioptrischen Untersuchungen von Gauss", Proc. of the Lond. Math. Soc. **29.** 33. 1898. (Abbildungsgesetze bei unsymmetrischer Brechung, s. u. — R. Sissingh, Propriétés générales des images etc. Verh. Kon. Acad. Amsterdam 7. 1900

III. Die Realisierung der optischen Abbildung
A. durch dünne Büschel nahe der Achse zentrierter Kugelflächen.

(Fundamentaleigenschaften der Linsen, Spiegel und daraus zusammengesetzter Systeme.)

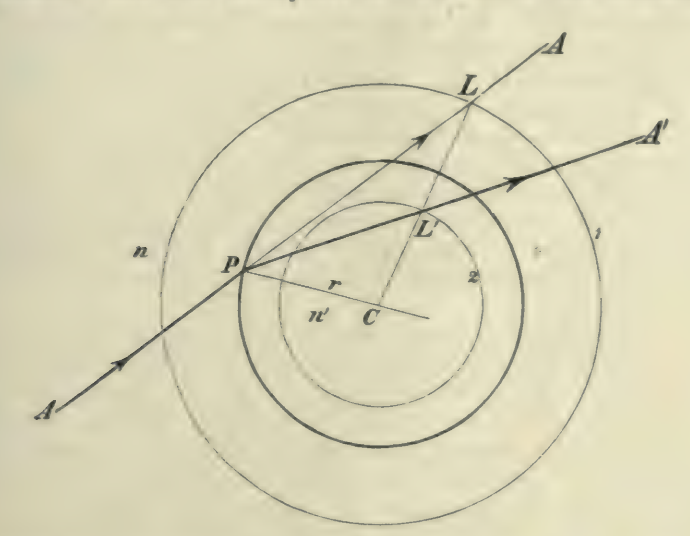
Wir haben bisher immer nur angenommen, daß eine „optische Abbildung" zustande komme, ohne uns darum zu kümmern oder Voraussetzungen darüber zu machen, in welcher Weise des näheren dies geschehe. Wir nahmen es als durch die tägliche Erfahrung feststehend an, daß optische Abbildungen tatsächlich vorkommen und untersuchten darauf hin zunächst die allgemeinen Gesetze, denen eine jede solche Abbildung, kraft ihrer Entstehung durch punktweise vereinigte geradlinige Strahlen notwendig unterliegen muß, auf welche Weise sie auch immer zustande gekommen sein mag.

In dem Folgenden sollen einige besonders wichtige Verwirklichungsarten von Abbildungen näher untersucht werden. Es soll gezeigt werden — und dies ist, wie wir früher bereits ausführten, nunmehr das einzige, was zu zeigen noch übrig bleibt — unter welchen physischen Bedingungen in gegebenen Fällen eine Abbildung zustande kommt, welchen Beschränkungen dieselbe gegenüber der vorher von uns angenommenen unendlicher Räume durch beliebig weit geöffnete Strahlenbüschel in praxi immer unterliegt, wie Objekt- und Bildraum zueinander liegen und wie sich die Hauptbestimmungsstücke der Abbildung, d. h. die Brennweiten und die Örter der Brennpunkte aus den Daten der physischen Anordnung selbst berechnen lassen.

Da wir nach dem vorletzten Abschnitt eine wie auch immer zusammengesetzte Abbildung stets zerlegen können in die kombinierte Wirkung sukzessiver Teilabbildungen, so können wir uns hier darauf beschränken, die einfachsten möglichen Fälle von Abbildung zu untersuchen, d. h. die Abbildung durch Spiegelung oder Brechung von Lichtstrahlen an einer einzelnen, zwei verschiedene Medien trennenden Fläche. von einigen „einfaches Diopter" genannt. Wir beschränken uns dabei von vornherein auf die Untersuchung sphärischer Flächen, welche, wie wir ebenfalls schon einmal hervorhoben, für die Theorie der optischen Instrumente fast allein von Bedeutung sind[1]. Ein Büschel homozentrischer Lichtstrahlen falle auf eine solche Fläche und werde an ihr gebrochen oder reflektiert.

Eine brechende (oder spiegelnde) Fläche.

Der Weg eines Strahles. Sei zunächst nur ein Strahl des Büschels betrachtet. Er falle in einem Medium vom Brechungsindex n auf eine Kugel vom Index n', mit dem Radius r und dem Mittelpunkt C. Die durch den einfallenden Strahl



Figur 22.
Die Konstruktion des an einer Kugelfläche (r) gebrochenen Strahles PA' aus dem einfallenden AP mittels der beiden Hilfskugeln $\left(\frac{n'}{n} r \text{ und } \frac{n}{n'} r\right)$.

AP und C gelegte Ebene — die der Zeichnung — ist dann Einfallsebene, da der Radiusvektor CP Einfallslot ist; sie enthält daher auch den reflektierten und (wenn wir sogleich den allgemeineren Fall betrachten) den gebrochenen Strahl PA'. Dessen Richtung ist bestimmt durch das Brechungsgesetz, d. h. durch die Gleichung

$$n \sin CPA = n' \cdot \sin CPA'$$

oder

$$n \cdot \sin i = n' \cdot \sin i' \quad .$$

[1] Wir wollen aber schon hier bemerken, daß, so oft wir im folgenden zu Näherungsformeln gelangen, bei denen die brechende Fläche als sehr klein angenommen ist, diese Formeln natürlich für jede Rotationsfläche gelten, die in dem kleinen Bereiche mit der erlaubten Annäherung mit der Kugel übereinstimmt.

Graphisch läßt sich der gebrochene Strahl wohl am einfachsten durch folgende, wie es scheint zuerst von Weierstrass[1] angegebene Konstruktion ermitteln (Figur 22). Man schlage um C Kreise bezw. Kugeln mit den Radien $r_1 = \frac{n'}{n} r$ und $r_2 = \frac{n}{n'} r$. Den Punkt L, wo der erstere Kreis vom auffallenden Strahl zum zweitenmal getroffen wird, verbinde man mit C, den Schnittpunkt von LC und Kreis 2, L' mit P. Dann ist PL' der gebrochene Strahl. Denn da nach Konstruktion $CL' : CP = CP : CL$, so ist $\Delta CPL' \sim CLP$; daher $\angle PLC = L'PC$. In ΔCPL ist aber $\sin CPL : \sin PLC = CL : CP = n' : n$. Folglich ist $\angle CPL'$ der zu CPL gehörige Brechungswinkel i'.

Eine andere Konstruktion gibt Reusch an (Konstruktionen zur Lehre u. s. w. Leipzig 1870. p. 1).

Beiläufig ergibt sich aus dieser Konstruktion, daß alle in der Richtung nach dem Punkte L der Hilfskugel 1 auf die brechende Kugel fallenden Strahlen, in jeder Neigung und jedem Azimut, nach dem Punkte L' hin gebrochen werden, in welchem die Gerade LC die Hilfskugel 2 schneidet und umgekehrt die von L' ausgehenden nach L hin.

Wegen dieser wichtigen Eigenschaft heißen Punktepaare, die in den Abständen $(n'/n)r$ und $(n/n')r$ vom Mittelpunkt auf je einer Zentralen der in einem Medium vom Index n befindlichen Kugel vom Index n' und Radius r liegen, „aplanatische Punktepaare“. Dieselben haben eine große praktische Wichtigkeit in der Konstruktion der starken Mikroskopobjektive, welche seit Amici wesentlich mit auf deren Anwendung beruht.

Außer diesen gibt es nur noch zwei Scharen von Punkten gleicher Eigenschaft: jeder Punkt der Kugelfläche und ihr Mittelpunkt sind sich selbst offenbar konjugiert. Die auf diese Weise vermittelten Abbildungen fallen jedoch — da sie sich nur auf Punkte beziehen, die in einem Paar von Flächen liegen — außerhalb der gesetzmäßigen Beziehungen, die wir auf Grund unserer allgemeinen Betrachtungen ableiteten.

Außer in diesen Fällen findet eine Abbildung durch endliche Büschel im allgemeinen nur noch insoweit statt, als die sie vermittelnden Büschel flächenhaft (nicht räumlich) sind. Bei der Kugel — wie bei jeder Rotationsfläche — fallen alle Strahlen, welche den Mantel eines Kegels mit der Zentralen (bezw. Rotationsachse) als Achse bilden, unter gleichem Winkel ein, werden daher auch unter gleichem Winkel gebrochen und bilden folglich nach der Brechung einen Kegelmantel mit derselben Achse, wie die einfallenden Strahlen.

Analytisch ist der Weg eines Strahles und die Abbildung von Punkten durch solche auf achsialen Kegelmanteln gelegene Strahlengruppen in folgender Weise zu bestimmen (Figur 23).

Ist die Entfernung eines Punktes L des Strahles vom Einfallspunkte P, $PL = p$, vom Scheitel S der brechenden Kugel $SL = s$ und von deren Mittelpunkt C, $CL = c = s - r$[2], die Neigung des Strahles gegen die Zentrale $PLC = u$, wird der Einfallswinkel CPL wieder mit i bezeichnet und die entsprechenden Größen für das gebrochene Strahlenbüschel mit denselben aber gestrichenen Buchstaben, so haben wir in ΔCLP

$$CL : CP = \sin CPL : \sin CLP \quad \text{oder} \quad c = r \cdot \frac{\sin i}{\sin u},$$

welche Gleichung gestattet, aus c, r und u i zu berechnen. Für den gebrochenen

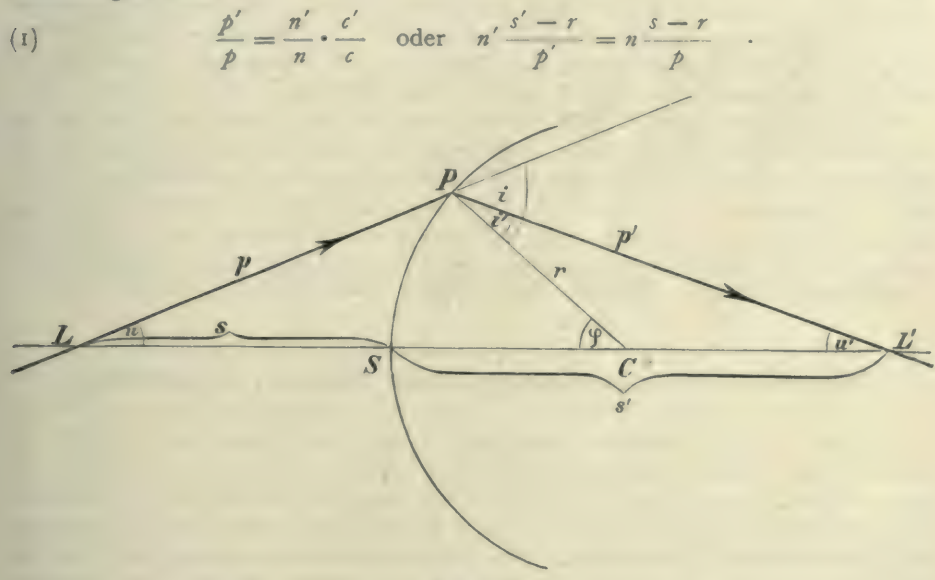
[1] Nach K. Schellbach, Ztschr. f. d. phys. u. chem. Unter. **2.** 135. 1889 von W. schon im Tageblatt der Naturf. Vers. zu Wien 1858 mitgeteilt. Später unabhängig von Lippich, Denkschr. d. Kais. Ak. d. Wiss. zu Wien **38.** 8. 1877 gefunden. — [2] Über die Vorzeichen s. weiter unten.

Strahl haben wir analog $c' = r \cdot \frac{\sin i'}{\sin u'}$. Hierin ist i' durch die Grundgleichung $n' \cdot \sin i' = n \cdot \sin i$ bestimmt und u' durch die Beziehung $\varphi = u + i = u' + i'$ oder $u' - u = i - i'$. Also gibt uns die obige Gleichung den Wert von c'. Die Scheitelabstände s und s' sind dann einfach $s = c + r$; $s' = c' + r$. Die Strahllängen p und p' sind analog zu bestimmen wie die Mittelpunktsabstände durch die sich ebenso ergebende Gleichung

$$\frac{p'}{p} = \frac{\sin u}{\sin u'} \quad ,$$

wo zur Berechnung von u' dieselben Zwischenbeziehungen zu benutzen sind wie oben. Es sind also in einfachster Weise alle Bestimmungsstücke eines gebrochenen Strahles berechenbar aus denen des einfallenden. Nebenbei ergibt sich aus obigen Beziehungen, daß

$$(1) \qquad \frac{p'}{p} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{c'}{c} \quad \text{oder} \quad n' \frac{s' - r}{p'} = n \frac{s - r}{p} \quad .$$



Figur 23.
Trigonometrische Verfolgung eines an einer Kugelfläche gebrochenen Strahles.

Die **Vorzeichen** sind hier, wie in allen späteren Entwickelungen, nach dem folgenden (in der analytischen Geometrie üblichen) Schema bestimmt. Wir rechnen Strecken auf der Achse oder auf Strahlen im Sinne des einfallenden Lichtes (von links nach rechts) als positiv. (Die Strecken s, c, p sind z. B. in der Figur, da sie von den angenommenen Fixpunkten S, C, P gerechnet werden, negativ, s', c', p' positiv.) Strecken senkrecht zur Achse sind nach oben positiv gerechnet.

Die Vorzeichen der Strahlachsenwinkel sind ebenfalls in üblicher Weise bestimmt, sodaß z. B. in der Figur u positiv, u' negativ wird. Die Vorzeichen von Einfalls- und Öffnungswinkel ergeben sich aus unseren Gleichungen; so sind z. B. in der Figur i und i' negativ, φ negativ.

Den Radius einer brechenden oder spiegelnden Kugelfläche rechnen wir positiv, wenn dieselbe (wie in der Zeichnung), dem einfallenden Lichte ihre konvexe Seite zukehrt.

Bei diesen Festsetzungen gelten unsere Gleichungen für beliebige einfallende Strahlen und konvexe wie konkave Kugelflächen. — Man sieht sofort, daß, wenn wir nachgewiesen haben, daß um die Achse der Kugelfläche eine Abbildung ent-

steht, die Vorzeichenbestimmung sich in Übereinstimmung mit dem am Ende des vorigen Kapitels eingeführten Koordinatensystem befindet; und daß wir z. B. ohne weiteres berechtigt sind, die Vorzeichen der Brennweiten, die wir hier erhalten werden, in der dort angegebenen Weise als Charakteristika der Abbildung zu verwerten[1].

Die für die Reflexion geltenden Gleichungen ergeben sich aus den abgeleiteten, wie immer, indem man $n' = -n$ setzt. Wir unterlassen ein näheres Eingehen auf die Besonderheiten dieses Falles an dieser Stelle.

Die angegebene Konstruktion des gebrochenen Strahles und die Formeln für die analytische Verfolgung seines Weges reichen für beliebig viele aufeinanderfolgende Brechungen und Reflexionen nur aus, wenn alle Einfallsebenen zusammenfallen, d. h. wenn die Mittelpunkte aller Kugeln auf einer Geraden liegen, die selbst in der ersten Einfallsebene liegt, die also bei genügender Verlängerung den einfallenden Strahl schneidet. Man nennt in diesem Falle die Kugeln zentriert. Man hat dann stets $s_k = s'_{k-1} - d_{k-1}$ und $u_k = u'_{k-1}$, wenn d_{k-1} die Entfernung des $k$ten Kugelscheitels vom $k-1$ten bedeutet, und s_k, s'_{k-1}, u_k, u'_{k-1} für die $(k-1)$te bezw. $k$te Fläche dieselbe Bedeutung haben wie die gleichen Buchstaben ohne Zeiger für die oben allein betrachtete.

Sind die Flächen aber nicht zentriert, oder ist ihre gemeinsame Zentrale, die Achse des Systems, windschief gegen den einfallenden Strahl, so genügen die angegebenen Formeln nicht mehr und auch die graphische Konstruktion ist nur noch in Gedanken, nicht mehr auf dem Papiere in gleicher Weise ausführbar. Es sind dann statt ebener Dreiecke, wie vorher, die entsprechenden sphärischen aufzulösen. Rechnungsvorschriften für diesen Fall sind wohl zuerst von L. SEIDEL[2] veröffentlicht.

Ein normal einfallendes endliches Büschel. Aberration.

Gegen die brechende Kugelfläche SP mit dem Mittelpunkt C falle ein Büschel ein, dessen „Hauptstrahl" (in dem früher angegebenen Sinne) durch C geht, dessen Divergenzpunkt L ist. Es genügt dann, um den Verlauf aller Strahlen des Büschels zu erhalten, die in einem Hauptschnitt, etwa der Zeichenebene, gelegenen Strahlen zu betrachten. Die gebrochenen Strahlen liegen ja in diesem Falle in derselben Ebene, und alle Strahlenkegel werden erhalten durch Rotation der in einer Ebene gelegenen um die Achse LC. Die Gesamtheit aller einfallenden Strahlen läßt sich gruppieren in Strahlenkegel mit der gemeinsamen Spitze L; die Gesamtheit aller gebrochenen Strahlen daher gemäß der Bemerkung p. 66 in Kegel mit der gleichen Achse LC, aber mit im allgemeinen verschiedenen Spitzen L'.

LP sei einer der einfallenden Strahlen des Büschels, PL' der entsprechende gebrochene. Wir haben bereits gesehen, wie sich die Elemente des letzteren (Scheitelabstand, Neigungswinkel gegen die Achse, Strahllänge) berechnen lassen aus denen des einfallenden. Schon aus den zu dieser Berechnung dienenden Formeln ließe sich schließen, daß zu gleichem s und r, aber verschiedenem

[1] Dagegen stimmt diese unsere Vorzeichenbestimmung nicht mit der in der rechnenden Optik üblichen überein; dort wird u und u' mit den umgekehrten Vorzeichen versehen und sammelnde Systeme haben dort eine positive zweite Brennweite f', eine negative erste f, während bei uns das Umgekehrte der Fall ist. — [2] L. SEIDEL, Trigonometr. Formeln für den allgemeinsten Fall der Brechung des Lichtes an zentrierten sphärischen Flächen. Sitzber. Münch. Akad. 1866. p. 263, abgedruckt in STEINHEIL u. VOIT, Handbuch der angewandten Optik. Leipzig 1891. p. 259; auch R. A. HANSEN, Abh. d. Sächs. Akad. d. Wissensch. **10**. 65—102. 1871; und H. ZINKEN, gen. SOMMER, Unters. über die Dioptrik der Linsensysteme. Braunschweig 1874. p. 153.

Neigungswinkel u im allgemeinen auch verschiedene Entfernung s' der Spitze des gebrochenen Strahlenkegels gehört.

Noch deutlicher tritt diese Tatsache und die Beziehung zwischen den fraglichen Größen hervor, wenn wir beachten, daß in

$$(1)\qquad n'\frac{(s'-r)}{p'} = n\frac{(s-r)}{p} \quad ,$$

$$p^2 = (s-r)^2 + r^2 + 2r(s-r)\cos\varphi$$

ist und ebenso

$$p'^2 = (s'-r)^2 + r^2 + 2r(s'-r)\cos\varphi \quad .$$

Hieraus ist ersichtlich, daß zu gleichen Werten von s, r, n und n' verschiedene Werte von s' gehören, je nach der Größe von φ, dem Öffnungswinkel der Kugelfläche. Diese Verschiedenheit der Lage der gebrochenen Kegelspitzen bezeichnet man als „sphärische Aberration" oder „Kugelabweichung". (S. das nächste Kapitel.) Wie wir früher gesehen haben (p. 17), kann man Flächen anderer Gestalt angeben, welche die Eigenschaft haben, ein homozentrisches Büschel von gegebener Lage und beliebiger Öffnung durch Brechung wieder in ein homozentrisches überzuführen („cartesische Flächen"). Die Kugel gehört zu denselben, insofern sie, wie oben gezeigt, Büschel von bestimmter Lage ebenfalls homozentrisch vereinigt.

Ein normal einfallendes Elementarbüschel. Achsenpunkte.

Entwickelt man $\cos\varphi$ nach Potenzen von φ, so sieht man weiterhin, daß für solche Werte von φ, deren Quadrate und höhere Potenzen vernachlässigt werden können, gegen die erste, d. h. gegen φ selber, $p = s$ und $p' = s'$ ist, also

$$(2)\qquad \frac{n(s-r)}{s} = \frac{n'(s'-r)}{s'} \quad .$$

Innerhalb eines Strahlenkegels von dem angegebenen Öffnungswinkel findet also eine eindeutige Beziehung zwischen s und s' statt, d. h. homozentrische Vereinigung der gebrochenen Strahlen und damit zunächst wenigstens für die auf der Achse gelegenen Punkte eine „Abbildung" in dem von uns früher gebrauchten Sinne[1].

Die Strahlenvereinigung bei der Brechung eines normal einfallenden Büschels an einer Kugelfläche ist von „zweiter Ordnung", wie man zu sagen pflegt, um auszudrücken, daß es die zweite Potenz von φ (oder u) ist, welche man vernachlässigen mußte, um die Eindeutigkeit der Beziehungen zu erhalten. Da übrigens unter Vernachlässigung der Größen von dieser Ordnung die Kugel zusammenfällt mit jeder sie im Scheitel berührenden Rotationsfläche anderer Gestalt, so gilt das gefundene Resultat mit gleicher Annäherung auch für solche und es bezeichnet dann in der Formel (2) r den Krümmungshalbmesser der betreffenden Fläche im Scheitel. Es sei daran erinnert, daß wir bei dieser Art der Vernachlässigung die Sinus und Tangenten mit den Winkeln (i, u, φ) vertauschen dürfen.

Anmerkung. Nebenbei mag darauf hingewiesen werden, daß Gleichung (1), welche ja für jedes Paar von Punkten auf der Achse gilt, für zwei solche Paare $L_1 L_1'$ und $L_2 L_2'$ geschrieben werden kann in den Formen

[1] Die Berechnung der fundamentalen Vereinigungsweite rührt von HALLEY her, s. KÄSTNER, l. c., p. 122.

$$\frac{c_1'}{c_1} : \frac{s_1'}{s_1} = \frac{n}{n'} \quad ,$$

$$\frac{c_2'}{c_2} : \frac{s_2'}{s_2} = \frac{n}{n'} \quad ,$$

welche besagen, daß die Punkte $L_1 S C L_1'$, projektivisch sind zu $L_2 S C L_2'$; ebenso sind sie es zu $L_3 S C L_3'$ u. s. w. Auf Grund dieser Beziehung lassen sich die Gesetze der Abbildung durch Brechung enger Büschel an zentrierten Kugelflächen in sehr eleganter Form entwickeln, wenn man sich auf die ersten Elemente der projektivischen Geometrie stützt. Dies ist der von MÖBIUS, LIPPICH, BECK und HANKEL eingeschlagene Weg. S. oben die p. 28 zitierten Abhandlungen derselben.

Die Seiten der Gleichung (2), die die Beziehung konjugierter Punkte auf der Achse darstellen, sind, wie man sich leicht überzeugt, nichts anderes als der Wert, den die Ausdrücke $n \cdot \sin i$ bezw. $n' \cdot \sin i'$, d. h. die „optische Invariante" für unendlich kleine Winkel φ annehmen, beide dividiert durch $\sin \varphi$. Dividiert man noch mit r, so erhält man die **„Invariante der Brechung"** für achsiale Elementarbüschel in den für die Rechnung bequemen Formen

(2a) $$Q_0 = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right) \quad ,$$

oder

(2b) $$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r} \quad .$$

Bezeichnen wir die Differenz der Werte eines Ausdrucks vor und nach der Brechung an einer Fläche durch ein vorgesetztes Δ, so können wir kürzer schreiben

(2c) $$\Delta\left(\frac{n}{s}\right) = \frac{1}{r}\Delta(n) \quad .$$

Wir erhalten ferner

$$Q_0 = -\frac{\Delta\left(\frac{1}{s}\right)}{\Delta\left(\frac{1}{n}\right)} \quad ,$$

was wir mittels (2b) mit (2a) identifizieren können; aus (2a) folgt auch:

$$-Q_0\,\Delta\left(\frac{1}{n^2}\right) = \Delta\left(\frac{1}{n s}\right) - \frac{1}{r}\Delta\left(\frac{1}{n}\right) \quad .$$

An Stelle der Gleichungen (2) bis (2c) kann auch eine Beziehung zwischen den Kugelmittelpunktsabständen treten; diese ist:

(2d) $$\Delta\left(\frac{1}{n c}\right) = -\frac{1}{r}\Delta\left(\frac{1}{n}\right) \quad .$$

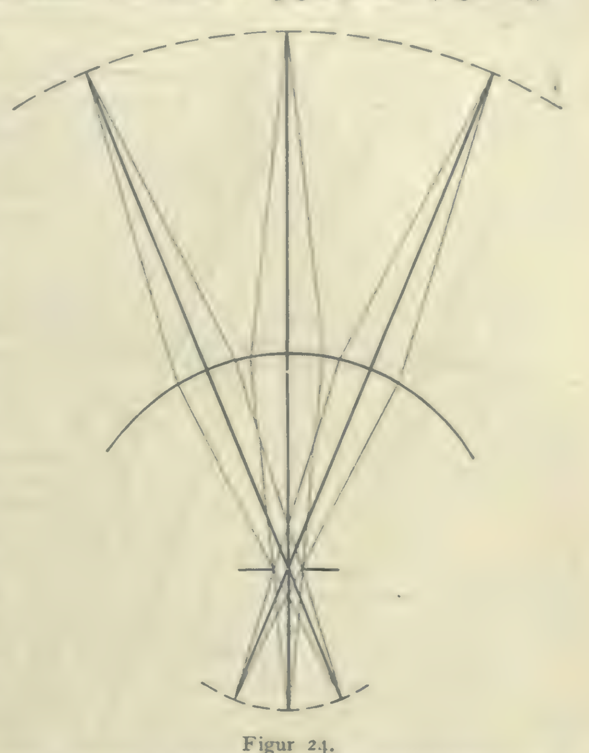
Die Abbildung der Punkte eines Raumes durch normal einfallende Elementarbüschel.

Die Abbildung, welche wir bisher statuiert haben, betrifft nur die Punkte je einer Kugelzentralen. Die betreffenden Beziehungen gelten nun für jede solche Zentrale mit gleichem Rechte und in gleicher Weise. Führt man also — sei es in Gedanken, sei es tatsächlich[1] — eine solche Beschränkung der wirksamen

[1] Wie es in TH. SUTTONS Panoramalinse und in Konstruktionen von PORRO, STEINHEIL, SCHRÖDER geschehen ist (vgl. M. v. ROHR, Theorie und Geschichte des photogr. Objektivs. Berlin 1899. p. 55. 115 ff. 171 ff. 297); s. auch BREWSTERS Kugellupe, dieses Buch, weiter unten.

Strahlenkegel ein, daß deren Achsen sämtlich durch C gehen und ihre Öffnungen unendlich klein sind, so würde durch Brechung an einer einzigen Kugelfläche mit der angegebenen Näherung eine Abbildung des ganzen unendlichen Raumes vom Index n vor der Kugel in den, teils hinter der brechenden Fläche vorhandenen, teils vor ihr liegenden ideellen Raum vom Index n' gegeben sein (Figur 24).

Aber auch diese Abbildung würde nicht in die Rubrik der unter dem allgemeineren Gesichtspunkt betrachteten Arten fallen. Dies kennzeichnet sich schon äußerlich dadurch, daß, wie leicht einzusehen, bei derselben um C konzentrische Kugelflächen des Objektraumes in eben solche des Bildraumes abgebildet werden unter Wahrung der Ähnlichkeit und bei perspektivischer Lage von Figuren auf den Kugelflächen. (Die Radien der konjugierten Kugeln c und c' sind dabei einfach durch die Gleichung (2d) bestimmt.) Bei der von uns früher betrachteten kollinearen Abbildung kommt aber kein solcher Fall vor. Im vorliegenden Falle werden andererseits Ebenen niemals in Ebenen abgebildet und eine Hauptachse ist nicht zu konstatieren.



Figur 24.
Eine brechende Kugelfläche mit Mittelpunktsblende. Die gestrichelten Linien bezeichnen zwei konjugierte Flächen (Kugeln).

In der Tat treffen auch die im Falle der kollinearen Abbildung gemachten Voraussetzungen hier nicht ganz zu. Zum Beweise unserer allgemeinen Gleichungen wurde die Voraussetzung gemacht und benützt, daß alle von je einem Punkte ausgehenden Strahlen homozentrisch wieder vereinigt würden; der Beweis der Kollinearität der Abbildung beruhte auf der Annahme, daß die durch irgend welche drei Punkte gehende Gerade betrachtet werden dürfe als abbildender Strahl jedes der von diesen drei Punkten ausgehenden Büschel. Diese Bedingung ist aber im vorliegenden Falle nicht erfüllt; derselbe unterliegt daher besonderen Gesetzen, wie den zum Teil oben angegebenen.

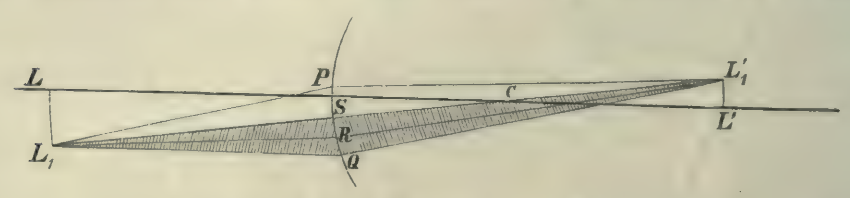
Beschränkung auf den Fall parachsialer Punkte. Kollineare Abbildung.

Betrachten wir nun aber statt des ganzen Raumes nur die Gesamtheit der unendlich nahe um eine dieser Kugelzentralen gelegenen Punkte. Für diesen Raumteil treffen die Voraussetzungen unserer allgemeinen Theorie tatsächlich zu. Zwar nehmen an der Abbildung eines Punktes in diesem Raume in Wirklichkeit nur die der Kugelzentralen überall unendlich nahen Strahlen teil. Da aber beliebige andere Gerade in diesem Raume von der ersten Ordnung unendlich kurz sind, dasselbe also offenbar auch von den Kurven gilt, in die sie abgebildet

werden, so kann man die letzteren ebenfalls als Gerade auffassen, ohne mehr als Größen zweiter Ordnung zu vernachlässigen.

In diesem Raumteile findet also eine eindeutige Punkt- und Geradenbeziehung statt (oder: man kann alle durch einen Punkt gehenden Geraden als abbildende auffassen, die sich wieder in einem Bildpunkte vereinigen), womit die Voraussetzungen unserer allgemeinen Theorie gegeben sind, deren Resultate wir hier ohne weiteres anwenden dürfen.

An dieser Abbildung nehmen nun alle Punkte des unserer Kugelzentralen unendlich nahen „fadenförmigen" Raumes teil, auch dann, wenn die Anordnung (Strahlenbegrenzung) nicht so wie oben eine Abbildung aller Punkte durch zentrale Büschel ermöglicht. Denn ob der Punkt L_1 (Figur 25), der der Zentralen LCL' unendlich nahe gelegen ist, durch ein zentrales Büschel L_1PQ abgebildet



Figur 25.
Der parachsiale Punkt L_1 wird durch das schief auffallende gestrichelte Elementarbüschel in gleicher Weise abgebildet, als wenn von ihm das ganze zentrale Elementarbüschel zwischen L_1P und L_1Q ausginge.

wird, oder durch ein schiefes L_1SQ, dessen Achse LR ja nur unendlich wenig gegen LL' geneigt sein kann, macht, weil man das letztere Büschel immer als einen Teil eines zentralen auffassen kann, nichts aus weder für den Bildort, noch für die Genauigkeit der Strahlenvereinigung, die dieselbe ist wie in L'.

Dies gilt für jeden der ursprünglichen Achse unendlich nahen, „parachsialen" Punkt und für jedes von einem solchen ausgehende Strahlenbüschel, dessen Achse seinerseits gegen die ursprüngliche unendlich wenig geneigt ist und welches eine unendlich kleine Öffnung hat; die Strahlen eines solchen Büschels, die sich überall nur unendlich wenig von LL' entfernen, heißen „parachsiale" Gerade.

Wir haben absichtlich oben diesem Falle einer kollinearen Abbildung solche von nicht kollinearer, wenn auch sonst zum Teil weniger eingeschränkter Abbildung vorangeschickt, um an diesen Beispielen zu zeigen, wann die im vorigen Kapitel abgeleiteten allgemeinen Gesetze Anwendung finden und wie ihr Geltungsbereich zu bestimmen ist.

Die Grundfaktoren der Abbildung durch eine brechende oder spiegelnde Fläche.

Die Diskussion der Abbildung durch einfache Brechung hat insofern ein besonderes Interesse, als für GAUSS, wie wir bereits an anderer Stelle erwähnten, bei Aufstellung seiner Theorie ersichtlich und ausgesprochenermaßen das Bestreben leitend war, die Abbildung durch ein beliebiges System von brechenden und spiegelnden Flächen möglichst vergleichbar zu machen und durch ähnliche Ausdrücke darzustellen, wie die durch eine einzige solche Fläche.

Die **Achse** des Objektraumes wie Bildraumes fällt hier zusammen mit einer beliebigen in dem fadenförmigen Raume verlaufenden Kugelzentralen, die wir uns aber bestimmt gewählt denken; also fallen auch der Richtung und dem Orte nach hier beide Achsen miteinander zusammen. Denn erstens erfüllt diese Zentrale die Bedingung, sich selbst konjugiert zu sein (ein senkrecht im Scheitel einfallender Strahl geht ungebrochen weiter). Zweitens werden Ebenen(-elemente)

senkrecht zu dieser Linie abgebildet in ebensolche. In der Tat haben wir ja gesehen, daß bei der nicht kollinearen Abbildung durch beliebige „zentrale“ Büschel, p. 71, um den Kugelmittelpunkt konzentrische Kugelflächen abgebildet werden in ebensolche. Für den einer Achse unendlich nahen Raum sind nun beide Abbildungsweisen, die oben und die zuletzt betrachtete, dem Abbildungsvorgange und daher auch dem Resultate nach identisch. In diesem beschränkten Gebiete aber kann die zur Achse normale Kugelfläche identifiziert werden mit dem zu ihr senkrechten Ebenenelement. Jeder Punkt des Abbildungsraums (des Raumes nahe der Achse) kann angesehen werden als Punkt des Objekt- wie des Bildraumes — ein Verhältnis, welches wohl im ideellen Falle, aber durchaus nicht bei jeder Verwirklichungsweise optischer Abbildung besteht.

Auf Grund dieser Überlegung und der schon abgeleiteten Beziehung für konjugierte Abszissen lassen sich nunmehr auf induktivem Wege für die betrachtete Art von Abbildung an einer Fläche sowohl als an beliebig vielen die allgemeinen Abbildungsgesetze ableiten, welche wir im vorigen Abschnitt deduktiv hergeleitet haben. Dies ist der von GAUSS und HELMHOLTZ und seitdem von der überwiegenden Mehrzahl der Autoren eingeschlagene Weg. Wir unsererseits sind bereits im Besitz der allgemeinen Resultate und wenden dieselben nur durch Spezialisierung auf den vorliegenden Fall an.

Die **Brennebenen** sind nach unserer Definition die Bilder der unendlich entfernten Ebenen. Ihre Lage zum Scheitel der brechenden Fläche erhalten wir, indem wir in einem der Ausdrücke 2a bis 2c das eine Mal s', das andere Mal $s = \infty$ setzen. Nämlich

$$\left.\begin{aligned} SF &= -\frac{nr}{n'-n} \\ SF' &= +\frac{n'r}{n'-n} \end{aligned}\right\} \text{als Scheitelabstände der Brennpunkte.}$$

Diese Abstände sind im Falle der Reflexion $(n' = -n)$

$$SF = \frac{r}{2} \quad ,$$

$$SF' = -\frac{r}{2} \quad .$$

Die **Brennweiten** sind nach einer unserer Definitionen gleich dem Verhältnis der Höhe eines zur Achse parallelen Strahles zur Tangente seines Neigungswinkels vor oder nach der Brechung. Im vorliegenden Falle sind die Tangenten und Sinus von Strahlachsenwinkel einander und dem Bogen selbst gleich zu setzen, und, wie ohne weiteres ersichtlich, ist dann die Brennweite des Objekt- bezw. Bildraumes direkt gleich dem negativ genommenen Abstand des betreffenden Brennpunktes vom Scheitel. (Dieser Umstand erklärt die Einführung des Wortes „Brennweite“ für eine Größe, die sich uns in ganz anderer Weise darbot.)

Es ist also

$$f = +\frac{nr}{n'-n} \quad ; \qquad f' = -\frac{n'r}{n'-n}$$

und

$$f : f' = -n : n' \quad .$$

Hieraus ergibt sich, daß bei der dioptrischen Abbildung 1. die Brennweiten stets entgegengesetztes Vorzeichen besitzen und 2. daß ihr Verhältnis — von dem wir bereits wissen, daß es konstant ist — gleich dem Verhältnis der Indizes der Medien ist, auf welche sie sich beziehen. Die erstere Folgerung reiht nach p. 62 die dioptrische Abbildung in die früher unterschiedene Hauptgattung der rechtwendigen.

Bei der Reflexion an einer Fläche, für welche wir $n' = -n$ zu setzen haben, ist

$$f = f' = -\frac{r}{2} \quad ,$$

also

$$f : f' = +1 \quad ;$$

f und f' haben also stets gleiches Vorzeichen, woraus folgt, daß diese Abbildung rückwendig ist.

Wir könnten die Rechtwendigkeit der dioptrischen und die Rückwendigkeit der katoptrischen Abbildung nach den Betrachtungen von p. 61 sofort daraus schließen, daß bei der Brechung die Lichtrichtung in der Achse erhalten bleibt, bei der Spiegelung umgekehrt wird.

Voraussetzung jener Betrachtungen war die Rechtläufigkeit aller Abbildungen (p. 38). Man sieht sofort, daß die hier betrachteten Abbildungen rechtläufig sind, d. h. daß einer Verschiebung des Objektpunktes in der Richtung eines Objektstrahles eine Verschiebung des Bildpunktes in der Richtung eines Bildstrahles entspricht.

Es folgt dies, mag das Brechungs- und Reflexionsgesetz auch ein beliebiges, von dem wirklich geltenden abweichendes sein, sofort aus den folgenden Tatsachen:

1. Der einfallende und der gebrochene Strahl, beiderseitig unendlich lang gedacht, liegen auf derselben Seite des Einfallslotes (der einfallende und der reflektierte auf verschiedenen Seiten, aber auch auf derselben Seite, wenn der Richtungssinn des Einfallslotes zum Vergleich mit dem reflektierten Strahl umgekehrt wird).

2. Der Brechungs-(Reflexions-)winkel wächst mit dem Einfallswinkel.

Die Verkehrung eines dieser Sätze ins Gegenteil würde Vorbedingung einer rückläufigen Abbildung sein. Sie ist bei unstetig variabelem Brechungsindex unausführbar.

Ferner ergibt sich aus den Ausdrücken für f, in welchen Fällen die Wirkung einer Fläche eine „kollektive“, in welchen sie eine „dispansive“ in dem früher gebrauchten Sinne ist (p. 61 und 62). Nämlich die Abbildung durch einfache Brechung ist, wenn

$$\left.\begin{array}{lll} n' > n & \text{und} & r > 0 \\ n' < n & \text{und} & r < 0 \end{array}\right\}$$ d. h. wenn das dichtere Mittel auf der konkaven Seite der Kugel liegt, eine kollektive,

umgekehrt wenn

$$\left.\begin{array}{lll} n' > n & \text{und} & r < 0 \\ n' < n & \text{und} & r > 0 \end{array}\right\}$$ d. h. wenn das dichtere Mittel auf der konvexen Seite der Kugel liegt, eine dispansive.

Die Abbildung durch einfache Reflexion ist eine kollektive, wenn $r < 0$, eine dispansive, wenn $r > 0$.

Die Ausdrücke „kollektiv“, „dispansiv“ veranschaulichen die Modifikation, die jedes einzelne Strahlenbüschel in dem einen oder anderen Falle erleidet. Denn wie unten gezeigt werden wird, wird ein Strahlenbüschel durch Brechung oder Reflexion an einer kollektiven Fläche stets optisch konvergenter, durch die einer dispansiven stets optisch divergenter, was aber nicht immer mit der geometrischen Divergenzänderung zusammenfällt (s. u.).

Alle anderen Maßbestimmungen der Abbildung durch eine einfache Brechung oder Spiegelung ließen sich zwar aus den gemachten Annahmen für den vorliegenden besonderen Fall ableiten; sie folgen für uns aber, wie gesagt, unmittelbar aus den allgemeinen Abbildungsgleichungen, die hier ohne weiteres anwendbar sind. Man hat nur für f und f' die oben gefundenen Werte einzutragen und die Lage von F und F' zu berücksichtigen.

Man sieht dann u. a., daß im Scheitel der brechenden oder spiegelnden Fläche beide **Hauptpunkte** zusammenfallen (das folgt auch sofort daraus, daß nach p. 66 die Kugelfläche sich selbst konjugiert ist). Die Lagebeziehungen der Objekt- und Bildpunkte sind für diesen Fall am Schlusse des vorigen Kapitels p. 63 auseinandergesetzt worden. *Sie sind in Figur 20 und 21 dargestellt.*

Im Falle der Spiegelung an einer sphärischen Fläche war $f = f' = -\frac{r}{2}$. Beide Brennpunkte fallen im Halbierungspunkte des nach dem Scheitel gerichteten Radiusvektor zusammen; es fallen daher auch Objekt- und Bildraum genau aufeinander, jedoch unter Wahrung der Art gegenseitigen Entsprechens, welche nach den allgemeinen Gleichungen für diesen Fall der Abbildung stattfindet.

Das **Konvergenzverhältnis** in konjugierten Achsenpunkten ist für eine brechende Fläche $\gamma = \frac{s'}{s}$; die **Lateralvergrößerung** $\beta = \frac{c'}{c} = \frac{n s'}{n' s}$.

Reelle und virtuelle Objekt- und Bildpunkte. Die Punkte vor einer brechenden Fläche heißen nach p. 12 als Objektpunkte reell, als Bildpunkte virtuell; die Punkte hinter einer brechenden Fläche heißen als Objektpunkte virtuell, als Bildpunkte reell. Die Punkte vor einer spiegelnden Fläche heißen als Objekt- und Bildpunkte reell, die dahinter gelegenen virtuell.

Da nun die brechende oder spiegelnde Fläche mit den Hauptebenen zusammenfällt, so ergibt die Betrachtung von Figur 21, p. 63:

Bei kollektiven (brechenden oder spiegelnden) Flächen ergeben nur dann reelle Objektpunkte reelle Bildpunkte, wenn die Objektpunkte vor der Brennebene liegen; sonst liefern sie virtuelle Bilder. Virtuelle Objektpunkte geben niemals virtuelle, stets reelle Bildpunkte.

Bei dispansiven Flächen: Reelle Objektpunkte geben niemals reelle Bilder, sondern stets virtuelle. Virtuelle Objektpunkte geben dann virtuelle Bildpunkte, wenn sie hinter der Brennebene liegen, sonst reelle. — Daraus folgt für

Aufrechte und umgekehrte Bilder: Wenn bei brechenden oder spiegelnden Flächen Bilder gleicher Art (z. B. reelle reellen) einander entsprechen, so liegen sie nach Figur 20 verkehrt, sonst stets aufrecht. Daher ergibt sich:

Bei kollektiven brechenden oder spiegelnden Flächen werden nur reelle Objekte vor der Brennebene; bei dispansiven brechenden oder spiegelnden Flächen werden nur virtuelle Objekte hinter der Brennebene verkehrt abgebildet: alle anderen Bilder sind aufrecht.

Divergenzänderung. Da $i = \varphi - u$; $i' = \varphi - u'$ und für unendlich kleine Einfallswinkel $n i = n' i'$ ist, so hat man $n' u' - n u = (n' - n) \varphi$ unabhängig von der Entfernung der konjugierten Punkte als ein Maß der Divergenzänderung, wenn nicht die Änderung des Öffnungswinkels selber, sondern die seines dioptrischen Wertes in Anschlag gebracht wird. φ ist positiv für negatives r, negativ für positives. $\Delta (n u)$, die „optische Divergenzänderung", wie HELMHOLTZ[1] sie nennt, ist also für unendlich kleine Winkel proportional der Öffnung der brechenden Kugel, welche von den Strahlen benutzt ist. Für kollektiv wirkende Flächen ist ferner $n' u' - n u$ negativ, für dispansive positiv: Die Divergenz wird vermehrt, wenn das stärker brechende Medium an der konvexen Seite der Kugel liegt und umgekehrt, unabhängig von der Lichtrichtung.

Die geometrische Divergenzänderung, gegeben durch unser „γ", zeigt eine

---

[1] H. v. HELMHOLTZ, Physiol. Optik. 2. Aufl. p. 64. — [2] Manche englischen Darstellungen nehmen nach dem Vorgange von CODDINGTON und namentlich wohl von LLOYD die Divergenzveränderungen der Buschel durch optische Systeme zum Ausgangspunkt der Untersuchung; vgl. z. B. neuerdings L. HERMAN, A Treatise on Geometrical Optics. Cambridge 1900.

Abweichung von der Änderung der optischen Divergenz. Sammelnde Wirkung bedeutet im Falle der Brechung, daß γ für $\begin{matrix}\text{reelle}\\ \text{virtuelle}\end{matrix}$ Objektpunkte $\gtreqless 1$ ist, zerstreuende Wirkung das Gegenteil. Nun fallen aber die Knotenpunkte, in denen $\gamma = 1$ ist, offenbar im Mittelpunkt der brechenden Fläche zusammen. (Für kollektive brechende Flächen sind dies die früher p. 48 als positive bezeichneten Knotenpunkte, für dispansive die früher als negative bezeichneten, in denen jetzt aber auch $\gamma = 1$ ist, da bei Einführung des gemeinsamen Koordinatensystems die Richtung der y'-Achse die entgegengesetzte wurde.) Die Strecke zwischen Mittelpunkt und Scheitel nimmt daher eine Ausnahmestellung ein:

Kollektive Flächen sammeln, dispansive zerstreuen stets die Strahlen homozentrischer Büschel, außer wenn deren Brennpunkte zwischen Mittelpunkt und Scheitel liegen; dann tritt die umgekehrte Wirkung ein.

Für Spiegel fallen die Knotenpunkte mit den Hauptpunkten zusammen (da $f = f'$), also bei Hohlspiegeln die positiven, bei Konvexspiegeln die „negativen“, in denen jetzt aber auch $\gamma = +1$ ist, in den Scheitel, die anderen in den Kugelmittelpunkt.

Hohlspiegel sammeln, Konvexspiegel zerstreuen immer; und zwar ist nach dem oben Gesagten:

$$u' + u = 2\varphi \quad .$$

Ebene Flächen.

Wenn $r = \infty$, d. h. die brechende bezw. spiegelnde Fläche eben ist, so werden auch die Brennweiten $= \infty$, wir haben es dann also mit einer „teleskopischen“ Abbildung zu tun. Im Falle der Brechung an einer Ebene folgt aus (2 b) als Beziehung zwischen konjugierten Scheitelabständen

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} \quad \text{oder} \quad s' = \frac{n'}{n} \cdot s \quad ,$$

also einfache Proportionalität des Objekt- und Bildabstandes von der brechenden Ebene für alle Werte und bei stets gleichseitiger Lage in bezug auf die Ebene.

Das Konvergenzverhältnis γ ist hier $\gamma = \frac{n}{n'}$; die Lateralvergrößerung $\beta = \frac{n\,s'}{n'\,s} = +1$.

Im Falle der Spiegelung an einer ebenen Fläche ist $s' = -s$; $\gamma = -1$; $\beta = +1$, also Objekt und Bild liegen stets symmetrisch zur spiegelnden Fläche und sind einander symmetrisch gleich.

In diesem letzteren Falle ist, wie eine ganz einfache Betrachtung lehrt, die Abbildung weder in bezug auf das Gebiet, noch in bezug auf die wirksamen Strahlen auf den fadenförmigen Raum beschränkt, der um je eine zur Fläche senkrechte Gerade herum gelegt ist, sondern sie findet in jeder beliebigen Ausdehnung in gleicher Weise statt und wird durch beliebig weite Strahlenbüschel in aller Strenge verwirklicht. Es ist dies der einzige Fall, in welchem eine Abbildung von solcher Ausdehnung stattfindet. Da er aber für die Abstufung der Lage- und Maßbeziehungen der beiden Abbildungsräume gar keinen Spielraum offen läßt, so ist er natürlich nur von beschränktem Nutzen für den Zweck, welchem die „optischen Instrumente“ überhaupt dienen. Die Spiegelung an einer (oder mehreren) Ebenen ist ein Mittel, um ein Objekt oder ein von anderen optischen Systemen entworfenes Bild in unveränderter Gestalt an eine andere

Stelle des Raumes zu versetzen. Das von einer ungeraden Anzahl ebener Spiegel gelieferte Bild ist dabei symmetrisch gleich, das von einer geraden Anzahl gelieferte kongruent dem Objekt, wie sich aus dem Obigen von selbst ergibt[1].

Viele brechende Flächen (zentriertes optisches System).

Die Abbildung durch Brechung oder Spiegelung zentraler Elementarbüschel an einer beliebigen Zahl von sphärischen Flächen, welche die Grenzen von Medien verschiedener Brechungsexponenten sind, folgt aus der durch je eine solche Fläche bewirkten und unseren allgemeinen Gesetzen der kollinearen Abbildung und Kombination von solchen Abbildungen. Wenn auf die betrachtete erste Fläche eine zweite folgt, deren Mittelpunkt innerhalb des fadenförmigen Raumes liegt, in welchem allein jene eine kollineare Abbildung zustande bringt, so kann der Bildraum der ersten Fläche angesehen werden als Objektraum der zweiten: denn die Achsen und Strahlen aller einfallenden Büschel bilden dann sehr kleine Winkel auch mit der Zentralen dieser Fläche u. s. f. für beliebig viele aufeinander folgende Flächen. Wenn die Mittelpunkte dieser Flächen nicht nur innerhalb des für die erste Fläche in Betracht kommenden fadenförmigen Raumes liegen, sondern sämtlich auf derselben Geraden, so nennt man die Flächen zentriert. Die betreffende Gerade ist dann, wie aus den früheren Betrachtungen ohne weiteres folgt, selbst die Hauptachse der Abbildung und wird auch „Achse des Systems" genannt.

Die Lage der Brennpunkte eines solchen Systems läßt sich unschwer berechnen, sei es durch sukzessive Anwendung einer der Formeln (2a) bis (2b), sei es, indem man diese in Form eines Kettenbruchs bringt, sei es endlich, indem man auch hier von den Determinanten Gebrauch macht. Gleiches gilt für die Berechnung der Brennweiten des zusammengesetzten Systems. Wir wollen uns aber hierbei nicht aufhalten, da wir diese Aufgabe im Prinzip schon im vorigen Abschnitt p. 58 ff. gelöst haben und verweisen hier nochmals auf die daselbst zitierte Literatur, welche das betreffende Problem mehr unter dem speziellen Gesichtspunkte behandelt, unter welchem es sich uns hier darbietet, als unter dem allgemeineren, von dem aus wir es damals betrachteten.

Von Interesse ist uns hier im wesentlichen nur eine Folgerung, betreffend das **Verhältnis der beiden Brennweiten** nach beliebig vielen Brechungen oder Spiegelungen. Von diesem hat LAGRANGE[2] für einen speziellen Fall, GAUSS als erster allgemein bewiesen, daß es stets gleich dem Verhältnis der Brechungsexponenten der Medien des Objekt- und Bildraumes sei, wie wir im Falle einer einzigen Brechung durch direkte Ausrechnung fanden.

Dies folgt leicht aus der **Lagrange-Helmholtzschen Gleichung.**

HELMHOLTZ[3] zeigte, daß die Beziehungen

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{n s'}{n' s} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{u'}{u} = \frac{s}{s'} \quad , \qquad \text{also} \quad \beta \cdot \gamma = \frac{n}{n'} \quad ,$$

welche bei jeder einzelnen Brechung gelten, durch Multiplikation zu dem gleichen Ausdruck

$$\beta \gamma = (n/n')$$

[1] Näheres über die durch mehrfache Spiegelung (sogen. Winkelspiegel) entworfenen Bilder siehe in den früher aufgeführten Lehrbüchern der geometrischen Optik von LLOYD, PARKINSON, MEISEL, HEATH u. a. Die spezielle Literatur zitiert H. MAURER, GRUNERTS Archiv (2) **9.** 1. 1890, gelegentlich der Diskussion einiger besonders interessanter Fragen, die sich an dieses Instrument knüpfen. — [2] CH. LAGRANGE, Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin. Classe math. 1803. p. 1. — [3] H. v. HELMHOLTZ, Handbuch der physiologischen Optik 1867. p. 50; 2. Aufl. 1896. p. 75; Wissensch. Abh. Leipzig 1883. p. 102.

für beliebig viele Brechungen führen. Nach unseren allgemeinen Gleichungen ist aber $\beta\gamma = -\frac{f}{f'}$, folglich bei jeder dioptrischen Abbildung auch $\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}$.

Es ist von Clausius und neuerdings von Straubel nachgewiesen worden, daß die Beziehung für $\beta\gamma$ auf allgemeineren Voraussetzungen beruht, als hier angegeben. Sie folgt darnach aus der bloßen Tatsache der (irgendwie durch gerade oder krumme Strahlen vollzogenen) Abbildung zweier Flächenelemente (Clausius) oder auch nur Linienelemente (Straubel). Vgl. IV. Kapitel, letzten Abschnitt.

Wir können hier den Beweis ohne weiteres darauf stützen, daß wir bereits p. 59 die Brennweiten eines aus koachsialen beliebig zusammengesetzten Systems gefunden haben, ausgedrückt durch die der einzelnen Systeme wie folgt:

$$f = \frac{(-1)^{k-1} f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k}{N_k} \quad ; \quad f' = \frac{f_1' \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_k'}{N_k} \quad ,$$

worin N_k ein gewisser von den Konstanten und Lagebeziehungen der einzelnen Systeme abhängiger Ausdruck war. Also ist

$$\frac{(-1)^{k-1} f'}{f} = \frac{f_1' \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_k'}{f_1 f_2 \cdot \ldots \cdot f_k} = \left(\frac{f_1'}{f_1}\right) \cdot \left(\frac{f_2'}{f_2}\right) \ldots \left(\frac{f_k'}{f_k}\right) \quad .$$

Die Verhältnisse der Einzelbrennweiten aber sind, wie wir gesehen haben, gleich dem negativen Verhältnis der Brechungsindizes des Objekt- und Bildraumes und offenbar ist der Index des Bildraumes des $p$ten Systems gleich dem des Objektraumes des $(p+1)$ten, folglich ist

$$\frac{f'}{f} = (-1)^{(2k-1)} \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{n_3}{n_2} \ldots, \frac{n_{k+1}}{n_k} = -\frac{n'}{n} \quad .$$

Im Falle der rein katoptrischen Abbildung (durch lauter Spiegelungen) ist jedes einzelne

$$\frac{f_k'}{f_k} = +1 \quad ,$$

also

$$\frac{f'}{f} = (-1)^{k-1} \quad ,$$

d. h. $+1$ oder -1, je nachdem die Zahl der Spiegelungen eine ungerade oder gerade ist.

Ist die Abbildung durch Spiegelungen und Brechungen bewirkt, „katadioptrisch“, so wird $\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$ oder $= +\frac{n'}{n}$, je nachdem die hierbei eingetretenen Spiegelungen gerade oder ungerade an Zahl sind.

Dies sind also die Bedingungen, unter welchen eine solche Abbildung „rechtwendig“ oder „rückwendig“ ist, die wir p. 39 bereits antezipiert hatten.

Unter Benützung der hier festgestellten Beziehungen zwischen f und f' lassen sich nun alle früher abgeleiteten Gleichungen entsprechend modifizieren. Eine besonders einfache Form nehmen dieselben in dem sehr häufigen Falle an, daß erstes und letztes Medium gleich, also $f' = \pm f$ ist. Doch überlassen wir die Diskussion der besonderen Verhältnisse, welche dieser speziellen Annahme entsprechen, späteren Gelegenheiten.

Die einfache geometrische Bedeutung, welche die „Brennweiten“ im Falle der Brechung an einer einzelnen Fläche — und auch im Falle der an beliebig vielen, wenn diese nach verschwindenden Zwischenräumen aufeinander folgen — hatte, nämlich gleich dem negativen Abstand des Brennpunktes von dem betreffenden brechenden Fläche zu sein, geht bei einem System von Flächen mit

endlichen Zwischenräumen natürlich ganz verloren. Die Brennpunkte und alle anderen früher betrachteten Kardinalpunkte können dann gegen die brechenden Flächen und gegeneinander selbst jede Lage einnehmen, unter Wahrung nur der früher hergeleiteten allgemeinen Gesetzmäßigkeiten, z. B. müssen immer, wenn $n' = n$ ist, also $f' = \pm f$ die Hauptpunkte mit den Knotenpunkten zusammenfallen u. s. w.[1]

Optische Divergenzänderung. Aus Gleichung (18) auf p. 52 folgt jetzt:

$$n' \operatorname{tg} u' - n \operatorname{tg} u = + n' \operatorname{tg} \omega' \quad ,$$
$$= - n \operatorname{tg} \omega \quad .$$

Es ist also die optische Divergenzänderung nur abhängig von ω, also für Strahlen, die in der Hauptebene gleiche Einfallshöhe besitzen, dieselbe; und zwar gleich den Extremwerten, die bei achsenparallelem Ein- oder Austritt vorhanden sind.

Linsen.

Von besonderer praktischer Wichtigkeit ist der Fall eines aus zwei brechenden Flächen bestehenden Systems, welches beiderseits an ein Medium von gleichem Index (den wir $= 1$ setzen können) grenzt; denn die künstlich hergestellten optischen Instrumente bestehen fast durchgängig aus solchen binären Systemen und auch alle anderen lassen sich jedenfalls in Gedanken immer in solche zerlegen. Man nennt dieselben bekanntlich Linsen.

Je nach der Krümmung der die Linse begrenzenden Flächen nach außen unterscheidet man dieselben als bikonvexe, bikonkave, plankonvexe, plankonkave und konkav-konvexe. Oft wird bei der Bezeichnung auch die Stellung der Linse zu den einfallenden Strahlen mit angedeutet, indem der Krümmungssinn der ersten Fläche in dem Namen vorangestellt, also zwischen plankonvexen, und konvex-planen, konkav-konvexen und konvex-konkaven Linsen unterschieden wird.

Bezeichnen wir die erste und zweite Fläche mit den Indizes 1 und 2, so ist, wenn wir den relativen Brechungsexponenten der Linsensubstanz gegen das äußere Medium mit n bezeichnen, den Scheitelabstand der beiden Linsenflächen mit d („Dicke" der Linse)

$$f_1 = \frac{r_1}{n-1} \quad , \qquad f_1' = -\frac{n\, r_1}{n-1} \quad ,$$

$$f_2 = -\frac{n\, r_2}{n-1} \quad , \qquad f_2' = \frac{r_2}{n-1} \quad .$$

Die Abstände der Brennpunkte der einzelnen Flächen von denselben sind gleich den negativ genommenen bezüglichen Brennweiten. Die Größe $\Delta = F_1' F_2$ in den Formeln für die Zusammensetzung zweier koachsialen Abbildungen (der Abstand des vorderen Brennpunktes des zweiten Systems vom hinteren der ersteren) wird daher im vorliegenden Falle

$$\Delta = f_1' - f_2 + d \quad .$$

Trägt man hierin obige Werte ein, so findet man die Brennweiten der Linse

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = \frac{n\, r_1\, r_2}{(n-1)\,[n\,(r_2 - r_1) + (n-1)\, d]} = \frac{n\, r_1\, r_2}{(n-1)\, R} \quad ,$$

[1] Man sehe u. a. die Diskussionen von A. MATTHIESSEN, Ztschr. f. Math. u. Phys. **32.** 170. 1887, und BROCKMANN, Inaug.-Diss., Rostock 1887, über die in katadioptrischen Systemen auftretenden Sonderverhältnisse; auch HEDERICH, Inaug.-Diss. Rostock 1892.

$$f' = \frac{f_1' f_2'}{\varDelta} = - \frac{n r_1 r_2}{(n-1)[n(r_2 - r_1) + (n-1)d]} = -f$$

und nach den Formeln

$$\sigma = \frac{f_1 f_1'}{\varDelta} \quad , \quad \sigma' = - \frac{f_2 f_2'}{\varDelta}$$

ebenso die Abstände der Linsenbrennpunkte von den zugewandten Flächenbrennpunkten; hieraus dann weiter die Lage der Linsenbrennpunkte und anderen Kardinalpunkte zu den Scheiteln der brechenden Fläche. Nämlich der Abstand des vorderen Brennpunktes vom Scheitel der ersten Fläche ist

$$s_F = \sigma - f_1 = - \frac{r_1 (n r_1 + R)}{(n-1) R} \quad ;$$

der Abstand des hinteren Brennpunktes vom Scheitel der zweiten Fläche

$$s_F' = \sigma' - f_2' = + \frac{r_2 (n r_2 - R)}{(n-1) R} \quad ,$$

worin überall $R = n(r_2 - r_1) + (n-1)d$.

F fällt in den Scheitel der ersten Fläche, S_1, für

$$d = - \frac{n r_2}{n-1} \quad ,$$

F' in den Scheitel der zweiten Fläche, S_2, für

$$d = \frac{n r_1}{n-1} \quad .$$

Die Abstände der Hauptpunkte von den zugewandten Linsenscheiteln sind

$$s_H = s_F + f = - \frac{r_1 d}{R} \quad ,$$

$$s_H' = s_F' + f' = - \frac{r_2 d}{R} \quad .$$

Der Abstand der Hauptpunkte

$$\frac{(n-1)(r_2 - r_1 + d)}{R}$$

verschwindet für

$$d = r_1 - r_2 \quad ;$$

auch ist

$$\frac{s_H}{s_H'} = \frac{r_1}{r_2} \quad .$$

Planflächen: Ist die erste (zweite) Fläche einer Linse plan, so liegt H' (H) im Scheitel der zweiten (ersten) Fläche.

Brennweiten und Lage der Kardinalpunkte bei den verschiedenen Linsengattungen[1].

1. Bikonvexe Linsen. $r_1 > 0$, $r_2 < 0$.

Für geringe Dicke d: f positiv, die Linse kollektiv. F vor, F' hinter der Linse, die Hauptpunkte H und H' im Innern; H vor H'; die Reihenfolge ist also:

$$F S_1 H H' S_2 F' \quad .$$

[1] Hierbei wird, wie immer, die Lichtbewegung von links nach rechts angenommen, die Ausdrücke „vor“ und „hinter“ beziehen sich auf den Sinn dieser Bewegung; S_1 und S_2 bedeuten den ersten und zweiten Scheitelpunkt.

Wächst d, so rücken F und H mit wachsendem Abstand nach rechts, F' und H' nach links; der Wert für d, für den die Hauptpunkte zusammenfallen, und diejenigen, für die die Brennpunkte die zugehörigen Scheitel passieren, sind oben angegeben.

Die Linse bleibt kollektiv, solange $d < \frac{n(r_1 - r_2)}{n-1}$.

Die Linse ist teleskopisch für $d = \frac{n(r_1 - r_2)}{n-1}$, Haupt- und Brennpunkte liegen im Unendlichen.

Die Linse ist dispansiv für $d > \frac{n(r_1 - r_2)}{n-1}$; sie wird stärker mit wachsendem d; H und F rücken von links, F' und H' von rechts an die Linse heran, ohne sie zu erreichen. Stets ist die Reihenfolge $H F S_1 S_2 F' H'$.

2. **Bikonkave Linsen.** $r_1 < 0$, $r_2 > 0$.

Die Linse ist stets dispansiv und wird mit wachsendem d stärker. F liegt stets hinter S_1; F' stets vor S_2; H stets vor H' und beide im Innern der Linse.

3. **Konvex-konkave Linsen.** $r_1 > 0$, $r_2 > 0$.

a. $r_2 > r_1$ (*Meniskus*) oder $r_2 = r_1$ (*Uhrglas*). } Die Linse ist stets kollektiv und wird bei wachsender Dicke stärker. Die Reihenfolge der Haupt- und Brennpunkte ist stets

$$F H H' F'$$

und zwar liegen F und H stets vor der Linse. H' liegt vor oder in der Linse, je nachdem

$$d < \text{ oder } > \frac{r_2 - n(r_2 - r_1)}{n-1} \quad .$$

F' liegt für kleine d hinter der Linse und geht bei dem früher angegebenen Werte von d durch S_2.

b. $r_1 > r_2$. *Die Linse ist dispansiv*, solange

$$d < \frac{n}{n-1}(r_1 - r_2) \quad .$$

H liegt dann stets hinter S_1, H' hinter S_2, F liegt stets hinter S_1, F' vor S_2.

Bei kleinem d ist die Reihenfolge

$$F' H H' F \quad .$$

Bei wachsendem d rücken H, H' und F nach rechts, und zwar F schneller als H, H schneller als H', so daß für $d > r_1 - r_2$, H' vor H gelegen ist; F' rückt nach links.

Die Linse wird teleskopisch für $d = \frac{n}{n-1}(r_1 - r_2)$, Haupt- und Brennpunkte liegen im Unendlichen.

Die Linse ist kollektiv für $d > \frac{n}{(n-1)}(r_1 - r_2)$; die Reihenfolge ist wie im Falle a:

$$F H H' F' \quad .$$

Dabei liegen wie dort F und H vor der Linse, H' vor oder in der Linse, je nachdem d hinter dem dort angegebenen Wert zurückbleibt oder ihn übertrifft.

4. **Konkav-konvexe Linsen,** $r_1 < 0$, $r_2 < 0$, sind bei Umkehrung der Lichtrichtung (Vertauschung von Objekt- und Bildraum) mit den vorigen identisch.

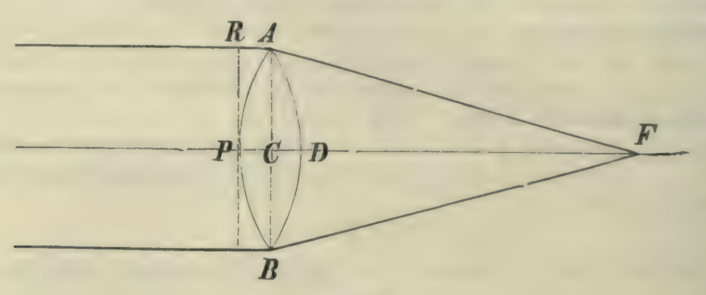
In der Praxis hat man es fast nur mit Linsen so geringer Dicke zu tun, daß die folgende Regel ziemlich allgemein zutrifft:

Linsen, die von der Mitte nach dem Rande zu dünner werden, sind kollektiv.
Linsen, die von der Mitte nach dem Rande zu dicker werden, sind dispansiv.

Oft hat man es mit dem Reziproken der Brennweite zu tun, wie wir später sehen werden, der sogen. „Stärke" der Linse $\frac{1}{f} = \varphi$; diese drückt sich durch die Reziproken der Radien, die Krümmungen $\frac{1}{r_1} = \varrho_1$ und $\frac{1}{r_2} = \varrho_2$ nach obigem wie folgt aus:

$$\varphi = (n-1)(\varrho_1 - \varrho_2) + \frac{(n-1)^2}{n} d \varrho_1 \varrho_2 \quad .$$

Rayleigh[1] leitet eine Formel für die Brennweite einer Konvexlinse, als Funktion ihrer freien Öffnung, Dicke und des Brechungsexponenten direkt aus dem Prinzip der gleichen



Figur 26.

optischen Längen her. Wenn die ebene Welle RPQ mit gleicher Phase nach F übergeführt werden soll, so muß (Figur 26) der Lichtweg $[PDF] = [RAF]$ sein. Nun ist

$$[PDF] = DF + n \cdot PD = DF + n \cdot d = PC + CF + (n-1)\,d \quad ,$$

CF aber ist bei einer dünnen Linse stets sehr nahe $= f$, also

$$[PDF] = PC + f + (n-1)\,d \quad .$$

Andererseits ist $[RAF]$, wenn dies der Weg des den scharfen Rand der Linse passierenden Strahles ist

$$[RAF] = RA + AF = PC + \sqrt{f^2 + y^2} = FC + f\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{y^2}{f^2} + \ldots .\right) \quad ,$$

also, wenn höhere Potenzen von $\frac{y}{f}$ als die zweite vernachlässigt werden,

$$[RAF] = PC + f + \frac{1}{2}\,\frac{y^2}{f} \quad .$$

Damit also $[RAF] = [PDF]$ sei, muß

$$(n-1)\,d = \frac{1}{2}\,\frac{y^2}{f}$$

sein, daher

$$f = \frac{1}{2}\,\frac{y^2}{(n-1)\,d} \quad .$$

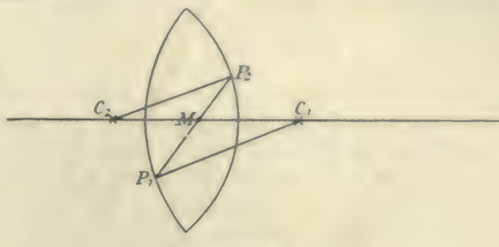
Bei Glas vom Index $n = 1{\cdot}5$ ist dann die halbe Öffnung der Linse die mittlere Proportionale zwischen Dicke und Brennweite — eine bekannte Regel der älteren Optik.

Endigt die Linse nicht in einem scharfen Rande, so ist für d die Differenz der Linsendicken am Rand und in der Mitte zu setzen.

[1] Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) **8.** 480. 1879; s. auch ibid. **20.** 354. 1885; auch Encycl. Britann. 9th ed. Art. Optics. p. 802.

Der optische Mittelpunkt einer Linse.

Sind $C_1 P_1$ und $C_2 P_2$ zwei parallele Radien der eine Linse begrenzenden Kugelflächen, so sind der Strahl, der $P_1 P_2$ in bezug auf die erste, und der Strahl, der ihm in bezug auf die zweite Fläche konjugiert ist, parallel (wegen der Gleichheit der Innenwinkel). Jeder so konstruierte Strahl $P_1 P_2$ wird also auf diese Weise zwei Strahlen liefern, die in bezug auf die ganze Linse konjugiert und parallel sind. Alle diese Linien $P_1 P_2$ teilen aber $C_1 C_2$ im Verhältnis der Radien, schneiden also in demselben Punkte M. Dieser heißt optischer Mittelpunkt der Linse[1]. Diese Betrachtung gilt für jede Linsenöffnung und Wellenlänge. Die von den beiden Flächen entworfenen Bilder von M sind nach dem Gesagten die Knotenpunkte der Linse. Diese Bilder sind aber von der Öffnung und Wellenlänge abhängig.



Figur 27.
Der optische Mittelpunkt einer Linse.

Der Begriff des optischen Mittelpunktes ist im allgemeinen bei zusammengesetzten Systemen nicht anwendbar.

Planparellele Platten.

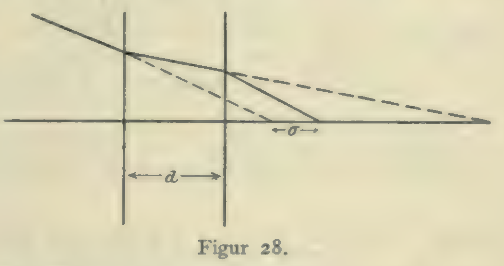
Konjugierte Strahlen sind parallel. Der Bildraum entsteht aus dem Objektraume durch Parallelverschiebung der Objektpunkte in der Richtung der Normalen um eine Größe σ, die wir nach dem auf p. 76 über Brechung an einer Ebene Gesagten erhalten aus:

$$s_1' = n s \quad ,$$

$$s_2 = s_1' - d = n s - d \quad ,$$

$$s_2' = \frac{s_2}{n} = s - \frac{d}{n} \quad ,$$

$$\sigma = s_2' + d - s = d \frac{n-1}{n} \quad .$$



Figur 28.
Die Wirkung planparalleler Platten besteht in einer Verschiebung der Objektpunkte um die Strecke σ.

Katadioptrik von Linsen.

Ein aus einer brechenden und einer spiegelnden Fläche bestehendes System, von denen die erste aber zweimal in verschiedener Richtung durchsetzt wird, also eine an der Hinterfläche spiegelnde Linse, wird häufig statt eines einfachen Spiegels gebraucht. Die Brennweiten sind hier, wie wir aus der allgemeinen Betrachtung wissen, gleich, die Orte der Brennebenen fallen offenbar zusammen; daher gilt das auch für die Hauptebenen. Es kann daher ein solches System stets durch einen Spiegel von geeigneter (der Brennweite des Systems gleicher) Brennweite am Orte der zusammenfallenden Hauptebenen ersetzt werden. Wir benutzen die für die Zusammensetzung beliebiger Systeme geltenden Regeln. Es ist hier (Radius der brechenden Fläche r_1, der spiegelnden r_2, Dicke d):

[1] J. Harris, A treatise of optics. London 1775 (op. posth.).

$$f_1 = \frac{r_1}{n-1} \quad , \qquad f_1' = -\frac{n r_1}{n-1} \quad ,$$

$$f_2 = f_2' = -\frac{r_2}{2} \quad ,$$

$$f_3 = \frac{-n r_1}{n-1} \quad , \qquad f_3' = +\frac{r_1}{n-1} \quad .^{1}$$

Mit den Bezeichnungen von p. 58 wird hier

$$\varDelta_1 = F_1' F_2 = -F_2' F_3 = -\varDelta_2 \quad ,$$

$$\varDelta_1 = f_1' + d - f_2 \quad ,$$

$$\sigma_2' = \frac{-f_2^2}{\varDelta_1} \quad .$$

Es ist daher für das Gesamtsystem

$$f = \frac{f_1 f_2 f_3}{\varDelta_1 (\varDelta_2 - \sigma_2')} = -\frac{f_1 f_2 f_3}{\varDelta_1^2 - f_2^2}$$

$$f = -\frac{n r_1^2 r_2}{2(n-1)^2} \cdot \frac{1}{r_2 \left(d - \frac{n r_1}{n-1}\right) + \left(d - \frac{n r_1}{n-1}\right)^2} \quad .$$

Der Abstand des Gesamtbrennpunktes vom (hinteren Brennpunkte der dritten, d. h. vom) vorderen Brennpunkte der ersten Fläche ist

$$\sigma_3' = -\frac{f_3 f_3'}{\varDelta_2 - \sigma_2'} = \frac{f_3 f_3'}{\varDelta_1 + \sigma_2'} \quad ,$$

oder auch

$$\sigma_3' = -\frac{f}{f_2} \varDelta_1 = -f \cdot \frac{2 \varDelta_1}{r_2} \quad .$$

Nach der Formel für f ist, wenn $\varrho_1 = \frac{1}{r_1}$, $\varrho_2 = \frac{1}{r_2}$,

$$\tfrac{1}{2} \varphi = \frac{1}{2f} = (n-1)\varrho_1 - n \varrho_2 + 2d(n-1)\varrho_1 \varrho_2 - d\frac{n-1}{n}\varrho_1^2 - \frac{d^2(n-1)^2}{n}\varrho_1^2 \varrho_2^2 .$$

Für ebene Vorderfläche ($\varrho_1 = 0$) folgt hieraus

$$f = -\frac{r_2}{2n} \quad ;$$

der Vergleich mit der in diesem Falle leicht zu berechnenden Schnittweite eines achsenparallel einfallenden Strahles, von der Planfläche aus gemessen,

$$s = \frac{1}{n}\left(\frac{r_2}{2} - d\right)$$

zeigt, daß hier die Hauptebene um $\frac{d}{n}$ hinter der Planfläche liegt.

Für verschwindende Dicke:

$$\varphi = 2(n-1)\varrho_1 - 2n\varrho_2 \quad .$$

---

[1] Das Licht verläuft bei der letzten Brechung entgegengesetzt der positiven x-Richtung.

Verschwindend dünne Linsen.

Als einfachster Fall hebt sich derjenige heraus, daß die Dicke der Linse sehr klein ist gegen ihre Brennweite, sodaß man den Einfluß der Dicke auf die Brennweite vernachlässigen kann. Alsdann ist

$$f = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_2 - r_1)} \quad ; \qquad \varphi = (n-1)(\varrho_1 - \varrho_2) \quad .$$

Die Stärke der Linse ist dann also einerseits proportional dem um 1 verminderten Brechungsindex, andererseits der Differenz der beiden dem einfallenden Lichte zugewandten Krümmungen. Letztere allein bestimmen das Vorzeichen von f und φ. Je nachdem die nach außen gerichtete Konvex- oder Konkavkrümmung der Linse die stärkere ist, wirkt die Linse als kollektives oder dispansives System.

Die Theorie solcher Linsen von verschwindender Dicke allein war es, welche vor den Untersuchungen von Gauss eine einigermaßen übersichtliche und genaue Darstellung gefunden hatte.

In sehr vielen Fällen können für eine vorläufige, ungefähre Veranschlagung der Wirkungen eines optischen Systems die Linsen desselben in erster Näherung als verschwindend dünn betrachtet werden.

Die Brennweiten einer solchen Linse sind nach p. 80 gleich den Abständen der Linse selbst von den Brennpunkten. Die Theorie der dünnen Linse wird hierdurch sehr ähnlich der einer einzelnen brechenden Fläche; nur daß die Brennweiten gleiche Größe haben, also die Brennpunkte symmetrisch zur Linse liegen und nicht nur die Haupt-, sondern auch die Knotenpunkte als am Ort der Linse selbst zusammenfallend zu betrachten sind. Also finden infolge des Zusammenfallens der Hauptpunkte wieder die auf p. 63 entwickelten Lagebeziehungen statt (s. Figur 20 und 21, p. 61 und 63).

Reelle und virtuelle Objekt- und Bildpunkte werden hier ebenso wie bei einer brechenden Fläche unterschieden, indem die Punkte vor der dünnen Linse als Objektpunkte reell, als Bildpunkte virtuell heißen, die Punkte hinter ihr als Bildpunkte reell, als Objektpunkte virtuell. Da die Hauptebenen hier in der Linse, wie dort in der Fläche zusammenfallen, so ergeben sich aus Figur 21 dieselben Regeln wie dort für das Auftreten von reellen und virtuellen Bildern (vgl. p. 75).

Aufrechte und umgekehrte Bilder ergeben sich aus dem gleichen Grunde als durch dieselben Regeln wie bei einer brechenden Fläche bestimmt.

Divergenzänderung. Da die Knotenpunkte hier ebenfalls in der Linse zusammenfallen, so findet im Gegensatz zur brechenden Fläche der Übergang von Werten von γ, die < 1, zu solchen die > 1 sind, zugleich mit dem Durchgang durch die Linse statt. Daher ergibt sich aus dem p. 76 Gesagten: Dünne Kollektivlinsen wirken immer sammelnd, dünne Dispansivlinsen immer zerstreuend.

Für **die Entfernung des Objekts und des Bildes von der Linse,** a und b, ergibt z. B. die Gleichung (II**), p. 51, wo $f' = f$, $\xi = a$, $\xi' = b$ ist:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f} \quad .$$

worin wieder die Entfernungen a, b von der Linse aus im Sinne der Lichtbewegung als positiv gerechnet werden.

Die **Vergrößerung** $\beta = \frac{y'}{y}$ wird etwa nach Gleichung (17) p. 51 $= \frac{b}{a}$; das **Konvergenzverhältnis** in konjugierten Achsenpunkten:

$$\gamma = \frac{u'}{u} = \frac{a}{b} \quad .$$

Befinden sich **mehrere unendlich dünne Linsen in Kontakt** und kann man auch die Gesamtdicke dieses Systems gegen seine Brennweite vernachlässigen (was natürlich immer nur bei einer geringen Anzahl von Linsen genügend annähernd der Fall ist), so ergibt sich die „Stärke“ des ganzen Systems

$$\varphi^{(k)} = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \ldots . \frac{1}{f_k} = \sum \frac{1}{f_k} = \sum \varphi_k \quad ,$$

d. i. gleich der Summe der Stärken der Einzellinsen oder, durch die einzelnen Radien und Brechungsindizes ausgedrückt

$$\varphi^{(k)} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right) + (n_2 - 1\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2'}\right) + \ldots . \quad ,$$

$$\varphi^{(k)} = \sum (n_k - 1)(\varrho_k - \varrho_k') \quad ,$$

wenn erste und zweite Fläche jeder Linse durch hochgestellten, die Linsen selbst durch den unteren Index unterschieden werden.

Wenn die dünnen Linsen nicht im Kontakt befindlich, sondern durch endliche Intervalle getrennt sind, so werden die Ausdrücke für die Brennweite komplizierter und der Brennpunktsabstand ist dann besonders zu berechnen. Diese Aufgabe ist aber ganz analog derjenigen, die Bestimmungsstücke eines Systems zu berechnen, dessen einzelne brechende Flächen gegeben sind und sei deshalb hier nur auf diese und die dort zitierte Literatur verwiesen.

Wir geben nur eine kurze Diskussion der möglichen

Kombinationen zweier getrennter dünner Linsen.

Ist ihre Entfernung $= d$, so ist ihr optisches Intervall wie bei einer einzelnen Linse von endlicher Dicke

$$\varDelta = f_1' - f_2 + d \quad , \qquad \text{also hier} \quad - \varDelta = f_1 + f_2 - d \quad .$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} \quad ;$$

daher

$$\varphi = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} = \varphi_1 + \varphi_2 - d\varphi_1 \varphi_2 \quad .$$

1. Sind f_1 und f_2 beide > 0, also beide Linsen kollektiv, so sieht man, daß die Brennweite des zusammengesetzten Systems ihren kleinsten positiven Wert hat, wenn $d = 0$ ist, die Linsen sich berühren. Mit wachsendem d nimmt f zu und es wird $f = \infty$, wenn $d = f_1 + f_2$; das System ist dann ein teleskopisches. Bei noch größerem d erhält f einen großen negativen Wert und dieser nimmt mit weiter wachsendem d unbegrenzt ab.

2. Sind f_1 und f_2 beide < 0, also beide Linsen dispansiv, so hat f für $d = 0$ seinen größten und zwar negativen Wert. Bei wachsendem d nimmt f an Größe ab, bleibt aber stets negativ.

3. Ist die eine Linse kollektiv, die andere dispansiv, z. B. $f_1 > 0$, $f_2 < 0$, so ist bei $d = 0$ die Brennweite des zusammengesetzten Systems positiv oder negativ, je nachdem f_1 dem absoluten Werte nach kleiner oder größer als f_2 ist.

a) Wenn $[f_1] > [f_2]$, also hier $f_1 + f_2 > 0$, so nimmt mit wachsendem d f wachsende negative Werte an und wird bei $d = f_1 + f_2$ unendlich, d. h. das System wird wieder teleskopisch. Bei noch weiterer Steigerung von d durchläuft f abnehmende positive Werte[1].

[1] Eine Diskussion dieses Falles s. bei M. v. Rohr, Geschichte und Theorie des photographischen Teleobjektivs. Weimar 1897. p. 10 ff.

b) Wenn $[f_1] < [f_2]$, also $f_1 + f_2 < 0$, so hat f im Falle des Kontakts beider Linsen seinen größten positiven Wert. Bei wachsendem d wird f kleiner, bleibt aber stets positiv.

In den Fällen, wo $d = f_1 + f_2$, d. h. der vordere Brennpunkt des zweiten Systems koinzidiert mit dem hinteren des ersten und eine teleskopische Abbildung resultiert, sind die Maßverhältnisse der letzteren, wie wir früher fanden (p. 56), gegeben durch die Beziehungen

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f_2}{f_1} \quad ; \qquad \gamma = \frac{\operatorname{tang} u'}{\operatorname{tang} u} = -\frac{f_1}{f_2} \quad .$$

Die wichtigsten Werke der außerordentlich umfangreichen für den Gegenstand dieses Abschnitts vorhandenen Literatur sind schon in den beiden vorangehenden Artikeln namhaft gemacht worden. Es sei daher auf diese verwiesen. Eine bis in die neuere Zeit reichende Zusammenstellung, die jedoch bei weitem nicht erschöpfend ist, hat MATTHIESSEN versucht[1].

IIIB. Die Realisierung der optischen Abbildung durch schiefe Elementarbüschel.

(Die astigmatische Brechung.)

Der vorher betrachtete Fall der Brechung von Elementarbüscheln, deren Achsen der gemeinsamen Zentrale von Kugelflächen unendlich nahe sind, ist nicht der einzige, in welchem eine kollineare Abbildung zustande kommt. Von Bedeutung für die Theorie der optischen Instrumente ist noch der andere Fall, daß die abbildenden Büschel zwar auch unendlich eng, elementar, ihre Achsen aber nicht der gemeinsamen Zentralen, sondern einem unter endlichem Winkel gebrochenen, das System durchsetzenden Strahl unendlich nahe sind. Allerdings wird die Preisgabe der einen Beschränkung hier durch andere neu einzuführende kompensiert; aber es bleibt, wie wir zeigen wollen, dennoch eine Abbildung bestehen, welche in ihrem engen Bereich den Bedingungen unserer allgemein behandelten genügt und darum auch ihren Gesetzen unterworfen ist.

Spiegelung und Brechung eines gegen eine einzelne Kugelfläche schief einfallenden Elementarbüschels.

Auf die schönen geometrischen Entwickelungen, durch welche namentlich REUSCH[2] und LIPPICH[3] die Theorie dieses Problems ausgebaut haben, können wir hier leider nur hinweisen; um die uns in erster Reihe interessierenden Maßbeziehungen zu erhalten, beschränken wir uns auf die mehr analytische Beweisführung.

Wir haben das vorliegende Problem schon bei früherer Gelegenheit (p. 22—26) in seinen Grundzügen behandelt. Wie wir damals sahen, wird ein schief einfallendes homozentrisches Elementarbüschel durch die Spiegelung oder Brechung an einer Anzahl irgendwie gestalteter Flächen (endlicher Krümmung) im all-

---

[1] A. MATTHIESSEN, Grundriß u. s. w. p. 272, und PFLÜGERS Arch. f. Physiol. **19**. 553. 1879. — [2] E. REUSCH, Univ.-Progr., Tübingen 1857, und POGG. Ann. **130**. 497. 1867. — [3] F. LIPPICH, Denkschrift der kais. Akad. d. Wiss. zu Wien **38**. 163. 1877.

gemeinen in ein „astigmatisches“ verwandelt, d. h. in ein solches, dessen sämtliche Strahlen in erster Näherung durch zwei zueinander und zu einem mittleren Strahl senkrechte, getrennt liegende Gerade, die „Brennlinien“ oder „Bildlinien“ gehen. Diesen Charakter — tetraedrische Modifikation des Büschels nennt es Reusch — behält das Büschel auch nach beliebig vielen Brechungen bei.

Wir haben also nur noch die Maßbeziehungen aufzusuchen, welche zwischen den Elementen des einfallenden und gebrochenen Strahles obwalten, wenn die wirksame Fläche sphärisch ist und wollen hier diese Untersuchung nur unter der weiteren Beschränkung durchführen, daß der Hauptstrahl nie gegen die Achse des Systems windschief sei. Alsdann folgt für die Richtung der Brennlinien eine Vereinfachung, welche die ganze Betrachtung sehr erleichtert.

Ein beliebiger Strahl eines astigmatischen Elementarbüschels wird nach dem auf p. 21 Gesagten von den ihm benachbarten im allgemeinen nicht geschnitten, sondern diese verlaufen windschief gegen ihn. Oder keine der etwa durch den Hauptstrahl gelegten Ebenen enthält andere Büschelstrahlen. Ausgenommen sind nur die in den beiden bevorzugten Azimuten gelegenen „Hauptschnitte“, welche die Brennlinien enthalten.

Nun ist aber die Ebene durch den leuchtenden Punkt, welche die gemeinsame Achse der brechenden Flächen enthält, die „Meridionalebene“, für alle Strahlen, die vom leuchtenden Punkte ausgehend in dieser Ebene verlaufen (ein Teil dieser Strahlen gehört unserem Elementarbüschel an, einer davon ist der Hauptstrahl) die Einfallsebene bei der ersten und bei allen folgenden Brechungen oder Spiegelungen. Die Strahlen verlassen daher diese Ebene niemals.

Also fällt diese Ebene immer in einen der bevorzugten Azimute; und die eine Brennlinie unseres Elementarbüschels liegt nach einer beliebigen Anzahl von Brechungen oder Reflexionen in der Meridionalebene, die andere also senkrecht dazu; da beide senkrecht zum Hauptstrahl sind (p. 23), so sind ihre Richtungen vollständig bestimmt.

Um nun die Lagenbeziehung der konjugierten Punkte auf den Achsen, zunächst für eine einzige Brechung, die aber nicht die erste zu sein braucht, zu ermitteln, denken wir uns durch die Achse des einfallenden und des gebrochenen Büschels die beiden Hauptschnitte gelegt, den einen mit der Einfallsebene zusammenfallend, den anderen senkrecht zu ihr.

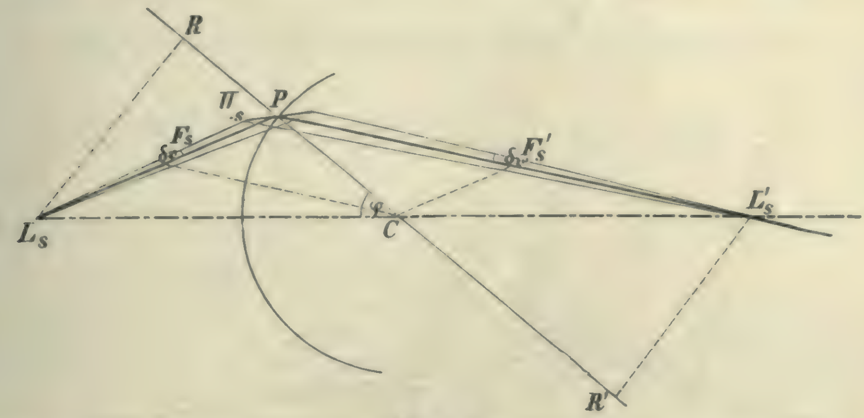
Den ersteren bezeichnen wir als Meridional-, Tangential- oder ersten Hauptschnitt, den anderen als Äquatoreal-, Sagittal- oder zweiten Hauptschnitt, und unterscheiden die auf sie bezüglichen Größen soweit nötig durch verschiedene Buchstaben oder Indizes, t und s.

Die Strahlen des einfallenden Büschels, die in diesen Ebenen liegen, werden in den gebrochenen Büscheln den analogen Schnitten angehören und zwar die des Tangentialschnittes streng, weil ja Strahlen bei der Brechung in der Einfallsebene verbleiben; die des Sagittalschnittes wenigstens bis auf Abweichungen von der zweiten Ordnung. Denn diese Ebenen gehen eine Berührung von mindestens der zweiten Ordnung mit den Kreiskegeln ein, die durch Rotation von LPL' um LCL' (Figur 29) entstehen und die einander nach dem p. 66 Gesagten in ihrer ganzen Ausdehnung konjugiert sind. Hieraus folgt nun bereits, daß der zu L konjugierte Bildpunkt der Sagittalstrahlen der dort betrachtete Punkt L' ist, in welchem der gebrochene Strahl von der Zentralen LC getroffen wird. Wir bezeichnen ihn jetzt mit L_s'. Er wird auch „zweiter“ Bildpunkt des gebrochenen Büschels genannt im Gegensatz zu dem der Tangentialstrahlen als „erstem“ Bildpunkt. (Dies wohl die bei weitem häufigere Bezeichnungsweise; umgekehrt bei Lippich.)

Die Strahlenvereinigung in L_s' ist nach dem Vorstehendem eine solche von zweiter Ordnung. Dies ergibt sich auch schon daraus, daß in dem Sagittal-

schnitt in bezug auf die Einfallsebene Symmetrie vorhanden ist, also Strahlen, die unter gleichem Winkel gegen diese Ebene diesseits und jenseits derselben von L_s ausfahren, in L_s' miteinander streng vereinigt werden.

Sagittalschnitt. Um die Beziehungen zwischen konjugierten Stücken des einfallenden und des gebrochenen Sagittalbüschels zu erhalten, fälle ich von L_s



Figur 29.
Die Abbildung des Punktes L_s in den Punkt L_s' durch ein Sagittalbüschel (dessen Ebene $L_s P \Pi_s$ bezw. $L_s' P \Pi_s$ senkrecht zur übrigen Zeichenebene steht).

und L_s' (Figur 29) auf den Radiusvektor CP Senkrechte, nach R und R'. Dann ist $L_s' R' : L_s R = CR' : CR$ oder, $PL_s = s$, $PL_s' = s'$ gesetzt,

$$s' \cdot \sin i' : s \cdot \sin i = (s' \cos i' - r) : (s \cos i - r) \quad ,$$

woraus unter Anwendung der Grundgleichung $n' \cdot \sin i' = n \cdot \sin i$, wird

$$\frac{n \cdot \cos i}{r} - \frac{n}{s} = \frac{n' \cos i'}{r} - \frac{n'}{s'} \text{ [1]}$$

oder

$$(1) \qquad \frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r}$$

oder in unserer früher eingeführten Bezeichnungsweise

$$\varDelta\left(\frac{n}{s}\right) = \frac{1}{r} \varDelta (n \cos i)$$

als die Beziehung zwischen konjugierten Schnittweiten.

Das Verhältnis konjugierter Neigungswinkel von Strahlen gegen die Achse des Büschels — das Konvergenzverhältnis in konjugierten Punkten — ergibt sich einfach, indem für einen Punkt Π_s der Sagittalschnittlinie (senkrecht über oder unter P), gilt

$$(2) \qquad P\Pi_s = s \cdot dv = s' \cdot dv' \quad ; \qquad \text{also} \quad \frac{dv'}{dv} = \frac{s}{s'} \quad .$$

Meridionalschnitt. Um die Beziehungen zwischen den Bestimmungstücken der Tangentialbüschel zu erhalten, habe ich die Grundgleichung $n \cdot \sin i = n' \cdot \sin i = Q$

[1] Diese Beziehung folgt auch direkt aus der Gleichung (1), p. 67 (die dort mit p und p' bezeichneten Größen sind hier s und s'):

$$n'c' : s' = nc : s \quad ,$$

wenn man mit $\cos \varphi : r$ erweitert.

nach i zu variieren; sie ergibt für den Strahl $L \Pi_t L'$ (Figur 30), dessen Einfallswinkel $= i + di$, dessen Brechungswinkel $= i' + di'$ ist,

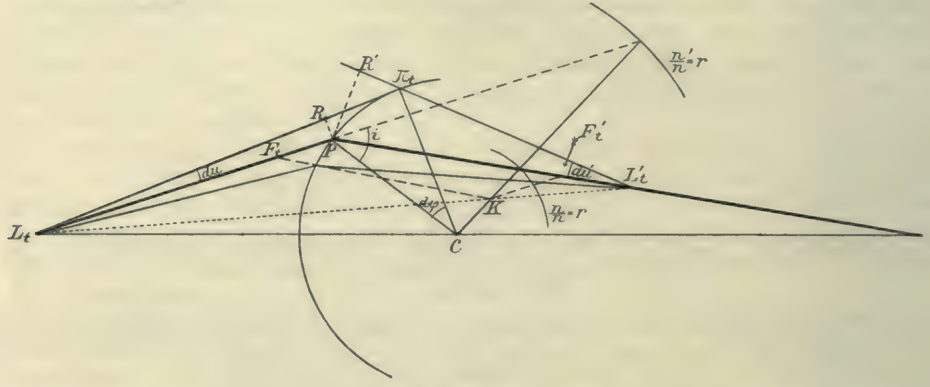
$$n \sin(i + di) = n' \cdot \sin(i' + di') = Q + dQ \quad .$$

Entwickeln wir $\sin(i + di)$ und $\sin(i' + di')$ nach Potenzen von di und di' und vernachlässigen alle Potenzen, welche höher als die zweite sind, so finden wir

$$dQ = n \cdot di \cdot \cos i - \frac{1}{2} n\, di^2 \cdot \sin i = n' \cdot di' \cdot \cos i' - \frac{1}{2} n' \cdot di'^2 \cdot \sin i' \quad ,$$

also

$$\frac{dQ}{d\varphi} = n \cdot \frac{di}{d\varphi} \cdot \cos i - \frac{1}{2} n \cdot \frac{di}{d\varphi} \cdot di \sin i = n' \cdot \frac{di}{d\varphi} \cdot \cos i' - \frac{1}{2} n' \cdot \frac{di}{d\varphi} \cdot di' \cdot \sin i' \quad .$$



Figur 30.
Die Meridianebene und die darin stattfindende Abbildung von L_t in L_t' durch ein Elementarbüschel. $PL_t = t$, $PL_t' = t'$, $CP = r$.

Nun ist $i = \varphi - u$ (vgl. p. 67); daher

$$\frac{di}{d\varphi} = 1 - \frac{du}{d\varphi}$$

und ebenso

$$\frac{di'}{d\varphi} = 1 - \frac{du'}{d\varphi} \quad .$$

Fälle ich ferner von P Senkrechte auf $L_t \Pi_t$ und $L_t' \Pi_t$ nach R bezw. R', so ist wegen der Kleinheit des Bogens $P\Pi_t$, der mit Vernachlässigung von Größen der Ordnung von $d\varphi^2$ als geradlinig betrachtet werden kann, $RP = P\Pi_t \cdot \cos R P \Pi_t = r \cdot d\varphi \cos i$ [1]) und andererseits, wenn man

$$L_t P = t$$
$$L_t' P = t'$$

setzt, $RP = t \cdot du$, also $t \cdot du = r \cdot d\varphi \cdot \cos i$, welche Gleichung unter Vernachlässigung nur der Größen von der Ordnung $d\varphi^2$ gilt. Daher ist

$$\frac{di}{d\varphi} = 1 - \frac{r \cos i}{t}$$

und ganz ebenso

[1] $RP\Pi_t = i$, da $LPR = \frac{\pi}{2} - du = \frac{\pi}{2}$; und $\Pi_t PC = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{di'}{d\varphi} = 1 - \frac{r\cos i'}{t'} \quad .$$

Tragen wir diese Ausdrücke für $\frac{di}{d\varphi}$ und $\frac{di'}{d\varphi}$ in die Gleichung für $\frac{dQ}{d\varphi}$ ein, so wird diese:

$$\frac{dQ}{d\varphi} = n\left(1 - \frac{r\cos i}{t}\right)\cos i - \frac{1}{2}n\left(1 - \frac{r\cos i}{t}\right)^2 d\varphi \sin i$$

$$= n'\left(1 - \frac{r\cos i'}{t'}\right)\cos i' - \frac{1}{2}n'\left(1 - \frac{r\cos i'}{t'}\right)^2 d\varphi \sin i'$$

oder:

$$n'\cos i'\left(1 - \frac{r\cos i'}{t'}\right) - n\cos i\left(1 - \frac{r\cos i}{t}\right) = \frac{1}{2}\,Q\,d\varphi\left[\left(1 - \frac{r\cos i'}{t'}\right)^2 - \left(1 - \frac{r\cos i}{t}\right)^2\right]$$

bis auf Größen von der Ordnung $d\varphi^2$ genau.

Hieraus folgt, daß verschiedenen Werten von $d\varphi$, d. h. verschiedenen Einfallspunkten innerhalb des unendlich kleinen brechenden Kugelelements Werte von t' entsprechen, die sich um Größen von der Ordnung der Dimensionen dieses Kugelelements $(r\,d\varphi)$ unterscheiden; es gehören z. B. auch zu Werten von $d\varphi$ von gleicher Größe aber entgegengesetztem Vorzeichen verschiedene Werte von t'. Mit anderen Worten: Strahlenpaare, die in der Einfallsebene symmetrisch zum Hauptstrahl einfallen, werden nicht streng vereinigt (wie im Sagittalschnitt). Die Strahlenvereinigung in L_t' ist nur eine solche von der ersten Ordnung.

In unserer Bezeichnungsweise können wir die letzte Gleichung auch schreiben

$$\Delta\left[n\cos i\left(1 - \frac{r\cos i}{t}\right)\right] = \frac{1}{2}\,Q\cdot d\varphi\,\Delta\left(1 - \frac{r\cos i}{t}\right)^2 \quad .$$

Unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Größen von der ersten Ordnung $(d\varphi)$ wird dann

$$\Delta\left[n\cos i\left(1 - \frac{r\cos i}{t}\right)\right] = 0 \quad , \tag{3}$$

die Beziehung zwischen den Entfernungen t und t' konjugierter Punkte vom Einfallspunkt im Meridianschnitt. Sie wird auch in den Formen gebraucht:

$$\Delta\left[\frac{n\cos^2 i}{t}\right] = \frac{1}{r}\,\Delta(n\cos i) \quad , \tag{3a}$$

oder

$$\frac{n'\cos^2 i'}{t'} - \frac{n\cos^2 i}{t} = \frac{n'\cos i' - n\cos i}{r} \quad . \tag{3b}$$

Das Verhältnis konjugierter Neigungswinkel, das Konvergenzverhältnis im Tangentialschnitt, folgt aus den oben schon benützten Gleichungen

$$t\cdot du = r\,d\varphi\cos i \quad \text{und} \quad t'du' = r\,d\varphi\cos i' \quad , \quad \text{zu}$$

$$\frac{du'}{du} = \frac{\cos i'}{t'}\cdot\frac{t}{\cos i} \quad . \tag{4}$$

Die Abszissen der Hauptbrennpunkte vom Einfallspunkt P aus auf dem Hauptstrahl des Elementarbüschels gemessen[1], sind nach Gleichung (1) bezw. (3) für die Sagittalstrahlen

[1] Dieselben sind hier nicht derjenigen Größe gleich, die wir früher als „Brennweite" definiert haben; sie sind außer vom relativen Index der Kugel und ihrem Radius noch von i abhängig.

(5) $$s_F = S = -\frac{n\,r}{n'\cos i' - n\cos i} \quad , \quad s_F' = S' = \frac{n'\,r}{n'\cos i' - n\cos i}$$

für die Meridianstrahlen

$$t_F = T = -\frac{n\cos^2 i\cdot r}{n'\cos i' - n\cos i} \quad , \quad t_F' = T' = \frac{n'\cos^2 i'\cdot r}{n'\cos i' - n\cos i} \quad .$$

Unter Benützung dieser Größen können wir die Gleichungen (1) und (3) in der Form schreiben

(1*) $$\frac{S'}{s'} + \frac{S}{s} = 1 \quad ,$$

(2*) $$\frac{T'}{t'} + \frac{T}{t} = 1 \quad .$$

Nach einem leicht zu beweisenden geometrischen Satze gehen aber die Verbindungslinien aller Punktpaare (L, L'), die auf je einer Geraden liegen und deren Abszissen (s, s') bezw. (t, t'), gemessen vom Schnittpunkte der beiden Geraden, einer Gleichung von dieser Form genügen, sämtlich durch einen Punkt, dessen Koordinaten, bezogen auf die Hauptstrahlen als Achsen, die Größen (S, S') bezw. (T, T') sind, und umgekehrt.

Für den Sagittalschnitt kennen wir diesen Fixpunkt bereits; es ist der Kugelmittelpunkt C. Mit seiner Hilfe können wir den ersten und zweiten Hauptbrennpunkt F_s', F_s' konstruktiv ermitteln: als den Schnittpunkt, der durch C zum gebrochenen bezw. einfallenden Hauptstrahl gezogenen Parallelen mit jeweilig dem anderen Hauptstrahl (Figur 29).

Für den Tangentialschnitt können wir umgekehrt den Fixpunkt K aus seinen Koordinaten T, T' konstruieren, wenn wir T und T' auf PL bezw. PL' abtragen nach F_t und F_t', indem wir sie etwa aus S und S' gemäß den Formeln (5) in üblicher Weise konstruieren, und durch F_t zu PL', durch F_t' zu PL Parallele ziehen. Deren Schnittpunkt ist dann K. (Schönere Konstruktionen s. bei Cornu[1] und Lippich[2].

Mittels der Punkte C und K ist es dann sehr einfach, zu jedem Punkt auf dem einen oder anderen Hauptstrahl den in bezug auf Sagittal- und Tangentialstrahlen konjugierten zu finden. Man hat diesen Punkt nur mit C bezw. K zu verbinden und diese Verbindungslinie bis zum Schnitt mit der anderen Achse zu verlängern. Der Schnittpunkt ist der gesuchte konjugierte Punkt[3].

Einem und demselben Einfallspunkt entsprechen auf diese Weise in bezug auf Sagittal- und Tangentialschnitt zwei verschiedene konjugierte Punkte. Die Strecke zwischen diesen, die Bildstrecke, ist die zentrale Projektion der Strecke CK von L aus auf den anderen Hauptstrahl. Dieselbe wird offenbar gleich Null für denjenigen Einfallspunkt, in welchem die verlängerte CK die Achse des einfallenden Büschels schneidet[4]. Dies führt auf die früher betrachteten „aplanatischen Punktepaare“ der Kugel (p. 66).

Astigmatismus.

In den Formeln war bisher nichts darüber vorausgesetzt, ob L_s und L_t der selbe Punkt sei, d. h. $s = t$ oder nicht. $s = t$ würde dem Falle der ersten

[1] Cornu, Nouvelles Ann. de Mathém. 1863. p. 311. Siehe H. Böklen, Tüb. math. naturwiss. Mitteil. 1860. **3.** 2; auch die analytische Behandlung Cornus im Journ. de Phys. (3) **10.** 607. 1901. — [2] F. Lippich, l. c., p. 171. — [3] Die erste Konstruktion des konjugierten Punktes scheint von Jak. Bernoulli herzurühren. Acta erudit. Lipsiae 1893. p. 244. Vgl. Böklen, l. c. — [4] E. Reusch, l. c. p. 508; vgl. auch O. Röthig, Probleme der Reflexion und Brechung. Leipzig 1876.

Brechung eines homozentrischen Büschels entsprechen. Aus den Formeln (1) und (3) ergibt sich nun ebenso wie aus obiger Konstruktion und unseren früheren Betrachtungen, daß auch in diesem Falle im allgemeinen $s' \neq t'$ ist. Durch die Brechung eines homozentrischen, schief einfallenden Elementarbüschels entsteht also eine astigmatische Differenz der Bildpunkte, die eines schon astigmatisch einfallenden erfährt im allgemeinen eine Änderung (Figur 31). Da der letztere Fall den ersteren in sich begreift, so leiten wir einen Ausdruck für diese Änderung aus unseren Formeln ab.

Indem wir $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ setzen, wird (3 b)

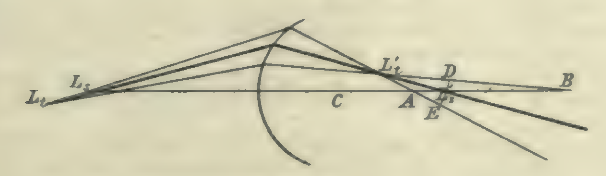
$$\frac{n'}{t'} - \frac{n' \sin^2 i'}{t'} - \frac{n}{t} + \frac{n \sin^2 i}{t} = \frac{n' \cos i' - n \cos i}{r},$$

hiervon Gleichung (1) abgezogen, ergibt

$$n'\left(\frac{1}{t'} - \frac{1}{s'}\right) - n\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right) = \frac{n' \sin^2 i'}{t'} - \frac{n \sin^2 i}{t}$$

oder in der eingeführten Bezeichnungsweise

$$\Delta n\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right) = Q^2 \Delta \left(\frac{1}{nt}\right).$$



Figur 31.

Die astigmatische Differenz $L_t L_s$ eines einfallenden Büschels wird durch eine Brechung in die astigmatische Differenz $L_t' L_s'$ verwandelt.

Der Astigmatismus erfährt keine Änderung, einem homozentrischen Objektpunkt entspricht also ein homozentrischer Bildpunkt, wenn $n't' = nt$. Diese Bedingungsgleichung führt wiederum auf dieselben „aplanatischen Punktepaare“ bezw. Flächen, welche wir früher auf anderem Wege gefunden haben.

Planflächen. Für ein schief unter dem Einfallswinkel i gegen eine Planfläche einfallendes Elementarbüschel, das unter i' gebrochen wird, ergibt sich aus Gleichung (1):

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s}.$$

Aus Gleichung (3 b):

$$\frac{n' \cos^2 i'}{t'} = \frac{n \cos^2 i}{t}.$$

War das einfallende Büschel homozentrisch ($s = t$), so ist die astigmatische Differenz

$$t' - s' = \frac{n'}{n} s \left(\frac{\cos^2 i' - \cos^2 i}{\cos^2 i}\right).$$

Ausführlicher wird die Abbildung durch Ebenen und Ebenensysteme bei schiefer Inzidenz im sechsten Kapitel besprochen werden.

Bildlinien. Die Gesamtheit der Strahlen eines unendlich dünnen räumlichen „optischen“ Büschels kann man nun, wie früher allgemein gezeigt (Fig. 7, p. 23)

in doppelter Weise als ebene Büschel zusammenfassen: einmal als Tangentialbüschel, deren Achsen hier sämtlich durch L_s gehen; das andere Mal als die Sagittalbüschel, deren Achsen durch L_t gehen. Die Achsen der ersteren werden nach der Brechung durch L_s' gehen, denn diese Achsen sind ja identisch mit den Strahlen des sagittalen Hauptbüschels $L_s \Pi_s P$ (Figur 29). Die Achsen der letzteren werden nach der Brechung sämtlich durch L_t' gehen, aus dem analogen Grunde. Die Vereinigungspunkte aller ebenen Tangentialbüschel werden die durch L_t' gehende erste Brennlinie des gebrochenen Büschels bilden; die der ebenen Sagittalbüschel die durch L_s' gehende zweite Brennlinie, und es ließe sich hier durch besondere Betrachtung das Resultat gewinnen, das wir früher auf Grund allgemeinerer Überlegung ableiteten: daß diese Brennlinien (bis auf unendlich kleine Abweichungen von der zweiten Ordnung gegenüber den Dimensionen des brechenden Kugelelements) senkrecht auf dem Hauptstrahl und senkrecht zur bezw. in der Einfallsebene liegen.

Anmerkung. Als zweite Bildlinie, welche in der Einfallsebene liegt und durch L_s' geht, bietet sich auf Grund der speziellen Ableitung allerdings zunächst nicht eine zum Hauptstrahl $L_s'P$ senkrechte Gerade dar, sondern das Stück AB der Zentralen (Figur 31), welches die beiden äußersten Strahlen des tangentialen Hauptbüschels aus ihr herausschneiden. Durch dieses Stück müssen alle Strahlen des Büschels gehen, denn wenn ich die Figur 31 um die Zentrale $L_s C L_s'$ um kleine Winkel aus der Zeichenebene heraus nach vorn und hinten drehe, so bestreiche ich die Gesamtheit aller Strahlen des ganzen Büschels, während AB der Größe und Lage nach ungeändert, also allen gemeinsam ist. Aber die Gerade ED, welche zu PL_s' senkrecht ist, erfüllt, wie wir früher (p. 25; vgl. auch Figur 9) gezeigt haben, ebenfalls die Bedingung, daß alle gebrochenen Strahlen ihr bis auf Abweichungen von der zweiten Ordnung nahe bleiben, und ist für die meisten Entwickelungen bequemer.

Daß die Strahlenvereinigung in AB eine so vollkommene ist, hat für unsere Entwickelungen keinen Wert, da ja die Vereinigung in den ersten Brennpunkten L_t', wie gezeigt, nur von der ersten Ordnung ist.

Die Geometrie bietet natürlich die Hilfsmittel dar, um bei gegebener Größe des brechenden Elements der Kugel genauer die Art der Strahlenvereinigung in der Nähe von L_s' und L_t' zu untersuchen. (Siehe die Bemerkungen p. 24—25.)

Abbildung ausgedehnter Objekte durch astigmatische Büschel.

Durch Brechung schiefer Büschel wird also im allgemeinen keine homozentrische Strahlenvereinigung herbeigeführt; als Bild eines Punktes bieten sich zwei zueinander senkrechte Linien dar, wenigstens sind dies diejenigen Stellen des gebrochenen Büschels, in denen die Konzentration des Lichtes die größte ist. Die manchmal aufgeworfene Frage: welche von diesen beiden Linien vom Auge wohl als das eigentliche Bild aufgefaßt werde, scheint mir in dieser Allgemeinheit gar nicht zu beantworten möglich[1]. Unter gewissen Umständen werden wir jedoch in der Tat veranlaßt, dem einen oder dem anderen Bilde den Vorzug zu geben. Denn denken wir uns als Objekt eine kleine zu einem mittleren schief einfallenden (Haupt-) Strahle senkrechte gerade Linie, von deren Punkten Strahlen ausgehen, die jenem mittleren sämtlich sehr nahe sind (etwa alle die brechende Fläche innerhalb eines kleinen Elements treffen), so wird für diese Punkte je annähernd das gleiche gelten. Die Hauptstrahlen der zu den einzelnen Punkten gehörigen Büschel werden zwar gegen die Normale des abbildenden Kugelsegments etwas verschiedene Winkel bilden, der Astigmatismus der gebrochenen Büschel daher auch etwas verschieden stark sein, doch werden die Bildlinien erster und die zweiter Art je unter sich parallel und ihr Größenunterschied gering sein. Jeder Punkt der leuchtenden Geraden erscheint also im Bilde (Figur 32) in eine Linie ausgezogen, ganz gleich ob wir ihn in der ersten (a_1) oder der

---

[1] Vgl. das in der Einleitung des folgenden Kapitels Gesagte und z. B. K. STREHL, Zeitschr. f. Instrumentenk. **15**. 366. 1895.

zweiten (a_2) Bildebene betrachten; das Bild als ganzes muß daher einen undeutlichen, verschwommenen Eindruck machen.

Wenn jedoch die leuchtende Gerade selbst einer der beiden Reihen von Bildlinien parallel, d. h. entweder in der Einfallsebene des mittleren Hauptstrahles oder senkrecht zu ihr gelegen ist, dann fallen in dem Bilde, dessen Linien sie parallel ist, diese sämtlich der Länge nach aufeinander, die Breite des Bildes wird hierdurch nicht berührt und dasselbe erscheint fast wie ein normales, scharfes Bild (b_1 bezw. c_2). In der anderen Ebene hingegen erscheint jeder Punkt in eine zur Richtung der Geraden senkrechte Linie ausgezogen, die durch den Astigmatismus verursachte Unschärfe erreicht also ihren höchsten Grad (b_2 bezw. c_1). In diesen beiden Fällen wird demnach unwillkürlich dasjenige Bild als solches schlechthin aufgefaßt werden, dessen Linien der Richtung der Geraden parallel sind.

Figur 32. Das in der ersten — zweiten Brennebene aufgefangene Bild einer schrägen (a_1 a_2), einer zur Einfallsebene senkrechten (b_1 b_2), einer der Einfallsebene parallelen (c_1 c_2) leuchtenden Geraden.

Besteht also das Objekt in einem rechtwinkligen Kreuz, oder noch besser in einem Kreuzgitter, dessen Linien bezw. parallel und senkrecht zur Einfallsebene liegen, so werden die ersteren im zweiten Brennpunkte (dem der Sagittalstrahlen), die letzteren im ersten (dem der Meridianstrahlen) scharf erscheinen und manchmal sogar allein sichtbar sein und diese Erscheinung ist umgekehrt das charakteristische Merkmal und Erkennungszeichen von vorhandenem Astigmatismus[1].

Wie empfindlich dasselbe ist, mag an dem Beispiel der Reflexion an einer Kugelfläche gezeigt werden. Für diese gilt im Sagittalschnitt

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2\cos i}{r}$$

und im Tangentialschnitt

$$\frac{1}{t'} + \frac{1}{t} = \frac{2}{r\cos i} \quad ,$$

daher für $s = t$

$$\frac{1}{t'} - \frac{1}{s'} = \frac{2}{r\cos i} - \frac{2\cos i}{r} \quad ,$$

$$\left(\text{für } s = t = \infty \text{ gilt: } s' - t' = \frac{r}{2}\sin i \operatorname{tg} i\right)$$

$$\frac{s' - t'}{s' \cdot t'} = \frac{de}{e^2} = \frac{2}{r} \cdot \sin i \cdot \operatorname{tg} i \quad .$$

Man sieht in letzterem Ausdruck am deutlichsten, in welchem Maße der Astigmatismus caet. par. mit dem Einfallswinkel wächst; und zwar ist dies in so hohem Maße der Fall, daß man nach einer Bemerkung von Dr. Hugo Schroeder[2] mit geeigneten Mitteln an einem Flüssigkeitsniveau, etwa einem Quecksilberspiegel, den durch die Krümmung der Erde ver-

[1] Oertling, Verh. d. Ver. z. Bef. d. Gewerbefl. 1843. — [2] H. Schroeder, Zentr.-Ztg. f. Opt. u. Mech. 2. 7. 1881.

ursachten Astigmatismus der an ihm reflektierten Büschel noch bemerken könnte. In der Tat, setzen wir den Erdradius

$$r = 6370000 \text{ und } i = 80^\circ, \text{ so wird } \frac{de}{e^2} = 0\cdot00000175 \text{ rund } 0\cdot000002 \text{ m} \quad .$$

Beobachten wir die Erscheinung mit einem Fernrohr, dessen Objektiv 7·5 m Brennweite (ca. 50 cm Öffnung) hat, also Dimensionen, die für unsere Zeit nicht mehr ungewöhnliche sind, so gilt für die Abbildung durch dieses die frühere Formel für die Tiefenvergrößerung

$$d x' = \frac{dx}{x^2} \cdot f^2 \quad .$$

Wenn der vordere Brennpunkt des Objektivs etwa im Spiegel liegt, oder das Objekt sehr weit entfernt ist, so können wir setzen $\frac{dx}{x^2}$ = unserem obigen $\frac{de}{e^2} = 0\cdot00000175$, also $dx' = 0\cdot000098 \text{ m} = 0\cdot1 \text{ mm}$ ca.

Eine Verschiebung des Bildortes von 0·1 nun würde man aber bei den angenommenen Dimensionen des Fernrohres sehr wohl wahrnehmen können. Mit einem der modernen Riesenteleskope, etwa dem der Lickstemwarte in Kalifornien, würde die Differenz der Bildebenen 0·7 mm betragen, also sehr markant sein. Natürlich müßte das Quecksilberniveau entsprechend groß und völlig ruhig sein.

Kollineare Abbildung bei schiefer Brechung.

Wenn wir durch einen Punkt des Objektraumes ein Elementarbüschel uns gelegt denken, dessen Hauptstrahl die Achse des zentrierten Linsensystems schneidet (andere Büschel hatten wir nicht betrachtet!), so wird er nicht in einen Punkt abgebildet, sondern ihm entsprechen zwei Linienelemente.

Dagegen besitzen die ebenen Büschel, die vor und infolgedessen auch nach der Brechung in der Meridianebene des abzubildenden Punktes verlaufen, einen Brennpunkt: Sie bilden den Punkt in einen anderen derselben Ebene ab. Für jeden Punkt einer Meridianebene gilt dasselbe: sie alle werden bei genügender Beschränkung der Büschelöffnung (etwa durch Abblendung einer der brechenden Flächen) eindeutig durch in derselben Ebene verlaufende Strahlen abgebildet. Wir können diese Ebene einmal als Objekt-, das andere Mal als Bildebene auffassen; es entspricht stets einem Punkte der Objekt- ein Punkt der Bildebene. Einer Geraden der Objektebene entspricht im allgemeinen ebensowenig eine Gerade der Bildebene, als dies bei der Betrachtung zentraler Büschel auf p. 71 unten galt; zunächst entsprechen Gerade Geraden nur, wenn es zugleich zur Abbildung beitragende Strahlen sind; aber, genau wie dort, gilt es auch allgemein für alle Geraden, wenn wir den abzubildenden Teil der Ebene auf einen unendlich schmalen Streifen um einen beliebigen abbildenden Strahl beschränken. Dann werden die nicht abbildenden Geraden der „Objektebene“ unendlich kurz und ihre Bilder dürfen als Gerade betrachtet werden.

Ein unendlich schmaler Streifen um einen beliebigen Strahl einer Objektebene und ein unendlich schmaler Streifen um den entsprechenden Strahl einer Bildebene (die beide in der betrachteten Meridianebene zusammenfallen) sind dann Punkt für Punkt und Gerade für Gerade aufeinander bezogen. Auf diese Streifen können wir die Betrachtungen des zweiten Kapitels anwenden, wenn wir dort eine Koordinate weglassen, sodaß die Abbildung zweier Räume sich in eine Abbildung zweier Ebenen verwandelt. In den beiden Streifen findet eine kollineare Beziehung statt und es gelten alle Sätze, die wir früher dafür abgeleitet haben, in die Ebene übertragen. Achse der Objektebene ist ein beliebiger in dem abgegrenzten Streifen verlaufender abbildender Strahl, Achse der Bildebene der ihm entsprechende.

Auch ein ebenes homozentrisches Sagittalbüschel besitzt nach der Brechung offenbar einen Brennpunkt. Jede nicht meridionale Ebene T steht auf einer

Meridianebene senkrecht und gehört zu ihr als Sagittalebene. Die Punkte P einer ihrer Geraden, der Schnittgeraden l mit der zugehörigen Meridianebene, werden durch Strahlen, welche vor der Brechung in unserer Ebene T, nach der Brechung sämtlich in einer anderen, T', verlaufen (die wir die entsprechende Sagittalebene nennen wollen) abgebildet in die Punkte der jenen Geraden entsprechenden l'. Dazu muß die Büschelöffnung unendlich klein sein und das Büschel muß l enthalten; oder: es müssen alle Strahlen unendlich nahe an l verlaufen. (Wenn das unendlich enge Büschel l nicht enthält, so kann man es immer als Teil eines l enthaltenden betrachten.)

Betrachten wir andere Punkte von T, die nicht in der Schnittgeraden l liegen. Für kein von diesen Punkten ausgehendes, die Achse schneidendes, räumliches Elementarbüschel ist T Sagittalebene; die von T aus solchen Büscheln ausgeschnittenen ebenen Partialbüschel werden daher im allgemeinen keine Brennpunkte besitzen. Wenn jedoch einer der betrachteten Punkte der Ebene T, P_1, nur unendlich wenig von l absteht, so wird, wenn wir seine Verbindungsgerade mit dem Achsenpunkte der Ebene T mit l_1 bezeichnen, ein räumliches Elementarbüschel um l_1 als mittleren Strahl eine Sagittalebene T_1 besitzen, die nur um einen unendlich kleinen Winkel gegen T gedreht ist, die also in einem unendlich kleinen Gebiet um l herum nur um Größen zweiter Ordnung von T abweicht. Durch die in T_1 verlaufenden ebenen Büschel, deren Strahlen alle nahe an l_1 bleiben, wird aber P_1 mit derselben Güte der Strahlenvereinigung abgebildet wie P durch die in T unendlich nahe an l verlaufenden Büschel. Nun können wir, wie gezeigt, T und T_1 in einem unendlich kleinen Gebiete um l als zusammenfallend betrachten; und dasselbe gilt für die ihnen entsprechenden Sagittalebenen (T' und T_1'). Also werden auch die Punkte P_1 der Ebene T durch in dieser Ebene verlaufende Büschel, deren Strahlen unendlich nahe an (l_1 also auch an) l bleiben, abgebildet in Punkte der Ebene T', wobei die Bildstrahlen natürlich unendlich nahe an l' verlaufen.

Für einen der Schnittgeraden l unendlich benachbarten Streifen der Ebene T und einen l' unendlich benachbarten der Ebene T' treten also wiederum die Voraussetzungen der allgemeinen Abbildungstheorie in Kraft: Punkte der Objektebene entsprechen Punkten der Bildebene; Gerade Geraden. (Das letztere gilt zunächst wieder für die zur Abbildung beitragenden Strahlen, sodann auch allgemein, da die anderen Geraden durch die bereits aus anderen Gründen erfolgte Beschränkung des abzubildenden Gebiets unendlich kurz sind.) Es folgen also auch hier wieder die allgemein abgeleiteten Gesetze. Achse der Objektebene ist ein unendlich nahe an l, der Bildebene der unendlich nahe an l' verlaufende entsprechende Strahl, am einfachsten wählt man l und l' selbst als Achsen.

In einer Meridianebene finden soviele Kollineationen statt, als abbildende Strahlen vorhanden sind; in jeder anderen Ebene findet nur eine Kollineation statt. Zu je einer „meridionalen Kollineation" gehört eine „sagittale"; sie durchdringen einander, indem ihre Achsen zusammenfallen. Jeder die Achse des zentrierten Linsensystems schneidende Strahl ist die gemeinsame Abbildungsachse zweier Kollineationen, die in verschiedenen Ebenen liegen; ein einfallender ist die Abbildungsachse der Objektebenen, ein gebrochener die der Bildebenen. Die Maßverhältnisse der beiden Arten von Abbildungen sind im allgemeinen verschieden, sie sind daher getrennt zu behandeln.

Auch erstreckt sich ihr Bereich senkrecht zu den Achsen nicht gleich weit. Denn während die Strahlenvereinigung von sagittalen Büscheln, ebenso wie die von parachsialen von zweiter Ordnung ist, fanden wir die der tangentialen Büschel nur von erster Ordnung. Während wir also das Gebiet der Abbildung durch erstere soweit abgrenzen können, daß nur die Quadrate der Büschelöffnungen oder der linearen Büscheldurchmesser nahe der brechenden Kugel gegen die Schnittweiten der Büschel verschwinden, müssen wir es im anderen

Falle so beschränken, daß schon jene Durchmesser selbst die gleiche relative Kleinheit besitzen, wenn wir beidemal gleich vollkommene Strahlenvereinigung verlangen[1].

Der angenommene Strahl repräsentiert — jeweilig vor oder nach der Brechung — die Achsen der Abbildung, d. h. Linienelemente senkrecht zum einfallenden Strahl l werden durch die eine wie die andere Art von ebenen Büscheln, in Linienelemente senkrecht zum gebrochenen Strahl l' abgebildet. Für Gerade im zweiten Hauptschnitt — senkrecht zur Einfallsebene — folgt die Richtigkeit der Behauptung aus Symmetriegründen; das Bild einer zu l senkrechten Geraden kann nur eine Kurve sein, deren Scheitel in l' liegt, welche also bis auf Abweichung von der zweiten Ordnung jedenfalls mit einer zu l' senkrechten Geraden zusammenfällt. Das Bild einer in der Einfallsebene zu l senkrechten Geraden kann — und wird im allgemeinen — eine Linie sein, die mit l' einen endlichen Winkel bildet, wenn wir dieses Bild Punkt für Punkt nach den oben abgeleiteten Gesetzen konstruieren. Wir können uns jedoch auch hier — durch Betrachtungen, die denen analog sind, durch welche wir die Berechtigung der STURMschen zum Hauptstrahl senkrechten Brennlinien erwiesen — überzeugen, daß die Querschnitte der nach der wahren Bildlinie zielenden Büschel mit einer zur Einfallebene und zu l' senkrechten, durch den auf l' gelegenen Bildpunkt gehenden Ebene — die Zerstreuungskreise jener Büschel in dieser Ebene — unendlich kleine Dimensionen haben gegenüber ihrer Entfernung von der Achse. Folglich kann man mit genügender Annäherung ihre Mittelpunkte als die Bildpunkte ansehen.

Als weitere und vollständig ausreichende Bestimmungsstücke der beiden Abbildungen, welche so um dieselben beiden Achsen orientiert sind, haben wir die **Örter der Brennpunkte** und die **Werte der Brennweiten** aufzusuchen.

Für eine einzige brechende Fläche

haben wir die ersteren bereits früher gefunden (Gleichung 5). Die Brennweiten, welche bei Brechung parachsialer Büschel an einer einzigen Fläche der Größe nach mit diesen Brennpunktsabständen übereinstimmen, sind hier, wie schon oben bemerkt, nicht ohne weiteres diesen gleich zu setzen[2]. Nach unserer Definition sind die Brennweiten gleich der Höhe h eines parallel zu der Achse des einen Raumes einfallenden Strahles dividiert durch die trigonometrischen Tangente des Winkels u', unter welchem dieser Strahl nach der Brechung die Achse des anderen Raumes schneidet. Für tangentiale Büschel ist (Figur 33)

$$h = P\Pi \cdot \cos i \quad , \qquad \operatorname{tg} u' = - P\Pi \cdot \frac{\cos i'}{PF'_t} \quad ,$$

ebenso

$$h' = P\Pi \cdot \cos i' \quad , \qquad \operatorname{tg} u = - P\Pi \cdot \frac{\cos i}{PF_t} \quad ,$$

daher

$$f_t = \frac{h'}{\operatorname{tg} u} = + \frac{n \cdot \cos i \cdot \cos i' \cdot r}{n' \cos i' - n \cos i} \quad ,$$

---

[1] Die Abgrenzung des Geltungsbereichs der beiden Abbildungen ist oben nur näherungsweise vorgenommen. Eine genaue Diskussion dieses Punktes würde uns hier zu weit führen. Es sei daher auf die eingehendere Erörterung LIPPICHS (l. c., p. 172) hingewiesen und nur noch ein von diesem abgeleiteter Satz angeführt, welcher eine Verallgemeinerung der oben abgeleiteten Beziehungen involviert. Projiziert man irgend einen unendlich nahe an l verlaufenden Strahl a auf die beiden durch l gelegten Hauptebenen und sucht zu den Projektionen die bezw. in den Hauptebenen von l' gelegenen Strahlen, so sind diese die Projektionen des zu a gehörigen Strahles. — [2] Dieser Umstand ist von manchen, wie z. B. auch von REUSCH, nicht beachtet worden.

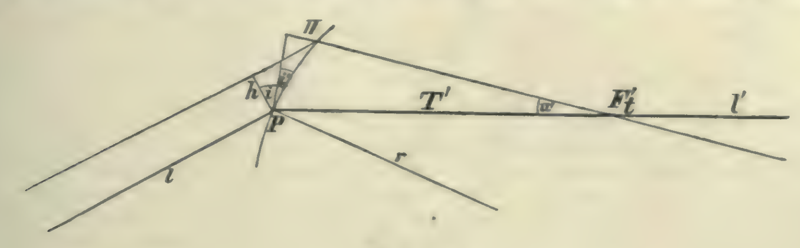
$$f_t' = \frac{h}{\operatorname{tg} u'} = -\frac{n' \cos i \cdot \cos i' \cdot r}{n' \cos i' - n \cos i} \quad ,$$

Für sagittale Büschel wird, ähnlich wie bei zentralen

$$f_s = -PF_s = \frac{n \cdot r}{n' \cos i' - n \cos i} \quad ,$$

$$f_s' = -PF_s' = -\frac{n \cdot r}{n' \cos i' - n \cos i} \quad ,$$

Mit diesen speziellen Werten der Konstanten sind auf die eine wie die andere Abbildung alle Gesetze zur Anwendung zu bringen, welche wir für



Figur 33.
Ein tangentiales Parallelstrahlenbüschel.

kollineare Abbildungen als allgemeingültig erwiesen hatten; im besonderen finden also auch dieselben Beziehungen zwischen den Größen α, β und γ einerseits und $f : f'$ andererseits hier statt wie dort.

Die LAGRANGE-HELMHOLTZsche Gleichung bei schiefer Brechung.

Aus den soeben ermittelten Werten der Brennweiten folgt wie bei parachsialer Abbildung:

$$\frac{f_t}{f_t'} = -\frac{n}{n'}$$

$$\frac{f_s}{f_s'} = -\frac{n}{n'} \quad ;$$

daher bei beiden Abbildungen nach Gleichung (I c*) (p. 47)

$$\beta \gamma = -\frac{n}{n'} \quad .$$

Diese zu den kollinearen hinzutretende spezifisch optische Beziehung folgt natürlich auch für den hier betrachteten Fall aus dem weiter unten (in der Eikonaltheorie) angegebenen STRAUBELschen Satze.

Bei schiefer Brechung an beliebig vielen zentrierten brechenden Flächen

bleibt jede Abbildungsart für sich bestehen, wofern — wie wir schon früher annahmen — die betreffenden Flächen sämtlich zentriert sind und die Achse der ersten Abbildung in einer Ebene liegt mit der gemeinsamen Zentralen der Kugeln. Denn alsdann bleiben Büschel, die bei der ersten Brechung meridional oder sagittal waren, von gleichem Charakter bei allen folgenden Brechungen. Man hat es daher mit sukzessiven Abbildungen gleicher Art zu tun. Der Bildraum und die Bildachse der $k$ten Abbildung wird Objektraum und Objektachse für die $(k+1)$te Abbildung. Die Lage der Brennpunkte bestimmt sich für jede

Fläche nach den obigen Formeln. Wenn also noch die Lage der Flächen selbst, etwa durch ihre Scheitel- oder Mittelpunktsabstände, gegeben ist, so erhält man alle Elemente, die für die Zusammensetzung von Abbildungen nach den früher (p. 53 ff.) aufgestellten Regeln erforderlich sind. Wir haben diese Regeln bereits unter Voraussetzung des hier vorliegenden allgemeineren Falles abgeleitet: daß die Achsen der Objekt- und Bildräume der einzelnen Abbildungen beliebig gegeneinander orientiert sind und nur die Bildachse der $k$ten Abbildung koinzidiert mit der Objektachse der $(k+1)$ten. Auch folgt ganz wie bei der Zusammensetzung parachsialer Abbildungen, daß die Geichungen

$$\frac{f_t}{f_t'} = -\frac{n}{n'}$$

$$\frac{f_s}{f_s'} = -\frac{n}{n'}$$

durch das ganze zentrierte System hindurch erhalten bleiben.

Literatur. Das Vorhandensein zweier verschiedener Brennpunkte bei den unter endlichem Winkel gebrochenen Büscheln soll zuerst D'ALEMBERT bemerkt haben (Opusc. math. Vol. III. 1764). In Anknüpfung an die speziellen Probleme der Brechung und Spiegelung an Kugelflächen wurde die Natur des einem homozentrisch einfallenden entsprechenden Büschels später von G. B. AIRY näher untersucht (Camb. Phil. Trans. Vol. III, p. 1—65. 1827); die von ihm erhaltenen Ergebnisse blieben dann ein fester Bestandteil der englischen Lehrbücher, zuerst desjenigen von CODDINGTON (3. Aufl. 1829), später der von POTTER (1847), PARKINSON (1859), GRIFFIN (1872) u. a. In Deutschland lenkte unter dem gleichen Gesichtspunkte E. REUSCH — anscheinend unbekannt mit den Arbeiten seiner Vorgänger — die Aufmerksamkeit auf die Eigenschaften der durch schiefe Brechung an Kugelflächen astigmatisch gewordenen Büschel l. supra cit. (1857). Inzwischen hatten SCHULTÈN (Mém. des sav. étrang. T. IV, p. 203. 1836) und namentlich STURM (s. die Zitate p. 23) mit Nachdruck darauf hingewiesen, daß die Konstitution eines Büschels nach beliebigen optischen Änderungen nur eine Folge des MALUS-DUPINschen Satzes sei, ein System von Orthogonalflächen zu besitzen. Auf noch allgemeinere Voraussetzungen waren die Untersuchungen von HAMILTON, KUMMER und deren Schülern gegründet, die wir früher angegeben haben. Auf die Arbeiten von STURM, KUMMER u. s. w. stützen sich die von H. v. HELMHOLTZ, Physiol. Optik. 1. Aufl. p. 238. 1856 (rein analytisch mit Anwendung auf Prismen); oder Wissensch. Abh. **2.** 149. 1883; G. QUINCKE, Monatsber. Berl. Akad. p. 498. 1862; auch POGG. Ann. **117.** 563 (experimentelle Verifikation der Sätze von KUMMER an einer einfachen Linse) und G. KRECH, De luminis fascibus infinite tenuibus disquis. Dissert. Berlin 1863 (theoretische und experimentelle Unters. über die Orte der Brennlinien einer plankonvexen Linse). — L. HERMANN, Gratulationsschrift. Zürich 1874. Fortsetzung in Arch. f. d. ges. Physiologie **20.** 370. 1879, untersucht die Möglichkeit, den Astigmatismus durch Kombination mehrerer Linsen zu vermindern mit besonderer Berücksichtigung der bei den Augen der Säugetiere und Fische vorliegenden Verhältnisse. Der gleichen Anregung entsprangen noch zahlreiche andere Arbeiten, über welche seit 1879 MATTHIESSEN in den Jahresberichten über d. Fortschr. d. Ophthalmologie von MICHEL (Tübingen) referiert hat. — Durch die Form der Behandlung zeichnen sich aus: J. C. MAXWELL, Lond. Math. Soc. **4.** (1871 bis 1873); **6.** (1874—75) (Benutzung der „charakteristischen Funktion") und F. LIPPICH, l. supra cit. (1877), und Wien. Sitzber. 1879. p. 1 (Erkenntnis und Ausnutzung der Bedeutung der projektiven Geometrie für diese Untersuchungen). — Weitere Ausarbeitungen der Theorie lieferten: O. RÖTHIG, Probleme der Reflexion und Brechung. Leipzig 1876 (allgem. Brechung a. e. Ebene). — Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. **8.** 481. 1879; **9.** 40. 1880 (Kombination gegeneinander geneigter Linsen). — C. NEUMANN, Sitzber. Leipz. Akad. 1880. p. 42; auch WIED. Ann. **3.** 1880 (Die Brechung an einer beliebigen krummen Fläche), und der vorerwähnte L. MATTHIESSEN, Sitzber. d. bayer. Akad. d. Wiss. f. 1883. p. 35; Acta math. **4.** 177. 1884; Schlömilchs Ztschr. f. Math. u. Phys. **33.** 167. 1888. Berlin-Eversbuschs Ztschr. f. vergl. Augenheilk. **6.** 103. 1889 u. a. a. O. (über die Unrichtigkeit des STURMschen Theorems und die richtige Lagenbestimmung der Bildlinien). Unabhängig von LIPPICH arbeitete auf gleichem Wege F. KESSLER, Beiträge zur graphischen Dioptrik, Ztschr. f. Math. u. Phys. **29.** 65. 1884. — Von den speziellen Schülern MATTHIESSENs behandelte u. a. L. GARTENSCHLÄGER, EXNERS Rep. **24.** 537. 1888, die Abbildung eines „astigmatischen" Objekts durch eine Linse für parallelen Durchgang der Strahlen durch diese. — A. GLEICHEN, WIED. Ann. **35.** 100. 1889, und „Die Haupterscheinungen der Brechung und Reflexion des Lichtes, dargestellt nach neuen (von SCHELLBACH herrührenden) Methoden". Leipzig 1889, unterscheidet treffend zwischen den rein geometrischen und den speziell optischen Voraussetzungen und Folgerungen. Mit Hilfe der projektiven Betrachtungen hat L. BURMESTER die „homozentrische Brechung des

Lichtes durch die Linse" untersucht (Ztschr. f. Math. u. Phys. **40.** 321. 1895). Seine allgemeinen Ergebnisse sind in den unten angeführten Sätzen über anastigmatische Abbildung als **Spezialfälle enthalten.**

Daß bei der schiefen Brechung die in den Hauptschnitten verlaufenden ebenen Partialbüschel eine kollineare Abbildung bewirken, scheint außer ABBE (Universitätsvorlesungen) zunächst nur LIPPICH bemerkt zu haben, welcher auch betont, daß alle wesentlichen Gesetze dieser Abbildung bloße Folgen des Bestehens jener Kollinearität sind.

C. Die Abbildung durch astigmatische Brechung oder Spiegelung an doppelt gekrümmten Flächen.

Während durch Brechung oder Spiegelung an sphärischen Flächen oder im Scheitel von Rotationsflächen Astigmatismus nur bei schiefem Einfall des Büschels entsteht, bringt die Brechung an einer Fläche doppelter Krümmung im allgemeinen bei jeder, auch normaler Inzidenz des Büschels, eine astigmatische Modifikation desselben hervor. Die Notwendigkeit hiervon folgt ohne weiteres aus der verschiedenen Krümmung einer solchen brechenden Fläche in verschiedenen, durch den Hauptstrahl gehenden Ebenen. Der so entstandene Astigmatismus, welcher auch beim menschlichen Auge oft vorkommt und auf dem Gebiet der künstlichen optischen Instrumente in dem extremen Falle der Zylinderlinsen verwirklicht ist, war viel eher bekannt und ist bei der genannten Art von Linsen auch viel auffallender als der oben behandelte. Er bildete z. B. für STURM die Anregung und den Ausgangspunkt seiner allgemeinen **Untersuchungen.**

Das oben über astigmatische Büschel Gesagte und die allgemeinen Sätze des ersten Kapitels **finden hier natürlich wiederum Anwendung.**

Die Literatur ist in dem oben Angeführten enthalten. Vgl. insbesondere die Lehrbücher von LLOYD u. a., die Abhandlungen von HELMHOLTZ, MAXWELL, C. NEUMANN, L. MATTHIESSEN.

Das für die Physiologie des Auges Wichtige findet man in HELMHOLTZ, Physiol. Optik. 2. Aufl. § 14. und auf p. 1111—1118 eine vollständige Literaturübersicht (von A. KÖNIG). S. a. ALVAR GULDSTRAND, Allgemeine Theorie der monochromatischen Aberrationen und ihre **nächsten Ergebnisse für die Ophthalmologie. Upsala 1900.**

Die Theorie der Zylinderlinsen ist insbesondere von E. REUSCH ausgearbeitet und in einem ebenso betitelten Werkchen (Leipzig 1868) dargestellt worden.

a) Senkrechter Einfall.

Die Brennlinien liegen bei normaler Brechung oder Spiegelung an einer doppelt gekrümmten Fläche natürlich in den beiden Hauptschnitten. Seien die beiden Hauptkrümmungen r_1 und r_2, so ist der Scheitelabstand der Brennlinien uns bereits bekannt, da die ebenen Partialbüschel in den beiden Hauptschnitten ja als Teile von räumlichen Büscheln aufgefaßt werden können, die an einer im Scheitel mit unserer Fläche zusammenfallenden Kugel mit dem Radius **r_1 bezw. r_2 gebrochen oder reflektiert werden.**

Wir geben einige oft gebrauchte Formeln für **dünne astigmatische Linsen** wieder.

Betrachtet wird der Durchgang eines beliebigen parachsialen homozentrischen Elementarbüschels durch eine dünne Linse, die von zwei Flächen doppelter Krümmung mit zusammenfallender Normale (Linsenachse) begrenzt ist. Fallen die Hauptschnitte der Grenzflächen zusammen, so liegen die Brennlinien in den Hauptschnitten. Geht das Büschel von einem Achsenpunkte aus, so ergibt sich für eine Brennlinie der Abstand b, bestimmt durch die Gleichung (a Entfernung des leuchtenden Punktes, n relativer Brechungsindex der Linse, r_1 und r_2 Krümmungsradien der ersten und zweiten Fläche in dem Hauptschnitt, in dem die Brennlinie **nicht liegt; Vorzeichen wie früher):**

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f} \quad ,$$

wo

$$f = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_2 - r_1)} \quad ;$$

also in derselben Form, wie für sphärische dünne Linsen der Bildpunkt.

Im besonderen folgt im Falle einer dünnen, von zwei **Zylindern** mit parallelen Achsen und den Radien r_1 und r_2 begrenzten Linse für den Abstand der Brennlinie, die den Zylinderachsen parallel ist:

$$\frac{1}{b_1} = \frac{1}{a} + (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

der Abstand der dazu senkrechten Brennlinie

$$b_2 = a \quad ;$$

sie geht durch den leuchtenden Punkt. Sind die Zylinderachsen gekreuzt, so ist

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{n-1}{r} \quad ,$$

wenn r der Radius derjenigen Zylinderfläche ist, deren Achse der Brennlinie parallel ist.

Ist eine Fläche zylindrisch mit dem Radius r, die andere sphärisch mit dem Radius R, so ist für den Abstand der der Zylinderachse parallelen Brennlinie:

$$\frac{1}{b_1} = \frac{1}{a} + (n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

für den Abstand der dazu senkrechten Brennlinie:

$$\frac{1}{b_2} = \frac{1}{a} - \frac{n-1}{R} \quad .$$

Diese drei Arten von Zylinderlinsen gestatten offenbar, den Astigmatismus eines Elementarbüschels zu ändern, z. B. es homozentrisch zu machen; nur die beiden zuletzt genannten Arten jedoch gestatten außerdem, die Orte der Brennlinie zu bestimmen, also im Falle der Aufhebung des Astigmatismus, dem System eine beliebige Brennweite zu geben.

Kombinationen von um die Achse drehbaren Zylinderlinsen sind angegeben und benutzt worden zur Messung und Kompensation von beliebigem Astigmatismus. (Über die „astigmatische Linse" von STOKES, bestehend aus zwei planzylindrischen, verdrehbaren Gläsern von entgegengesetzt gleicher Krümmung, und andere vorgeschlagene und im Gebrauch befindliche „Astigmometer" vgl. das Literaturverzeichnis von A. KÖNIG (s. o.); eine vollständige Diskussion solcher Kombinationen bei R. STRAUBEL, WIED. Ann. **64.** 794. 1898.)

Kollineare Abbildung bei normaler Brechung oder Spiegelung an einer doppelt gekrümmten Fläche.

Ein Punkt wird durch ein räumliches Elementarbüschel in zwei Brennlinien übergeführt. Dagegen entsteht, wie oben, je eine kollineare Abbildung durch die ebenen in den Hauptschnitten verlaufenden Büschel. Gemeinsame Achse ist die Normale der Fläche. Ihre Brennweiten sind uns bereits bekannt, da wir, wie erwähnt, für diese ebenen Büschel unsere Fläche mit einer Kugel vertauschen können, die sie im Scheitel berührt und dieselbe Krümmung hat, wie der betrachtete Hauptschnitt. Sie sind also:

$$f_1 = \frac{n\,r_1}{n'-n} \quad , \qquad f_2 = \frac{n\,r_2}{n'-n} \quad ,$$

$$f_1' = -\frac{n'\,r_1}{n'-n} \quad , \qquad f_2' = \frac{-n\,r_2}{n'-n} \quad .$$

Beliebig viele konachsiale Flächen mit zusammenfallenden Hauptschnitten.

Man hat wieder eine Aufeinanderfolge von Abbildungen in derselben Ebene mit derselben Achse. Ihre Zusammensetzung ist ein Spezialfall der früher gelösten Aufgaben. Die Gleichung $\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}$ bleibt in jedem Hauptschnitt bestehen.

b) Schiefer Einfall.

Dies ist der von MAXWELL, NEUMANN u. a. (s. o.) behandelte allgemeine Fall. Wir verweisen auf deren Abhandlungen und die Lehrbücher z. B. von HEATH und HERMAN. Ohne Rechnung erkennt man aus Symmetriegründen, daß, wenn einer der Hauptschnitte der brechenden oder spiegelnden Fläche in der Einfallsebene liegt, die Brennlinien wieder in den beiden Hauptschnitten gelegen sind. Offenbar kann man dann bei der Betrachtung eines ebenen Partialbüschels die brechende Fläche durch eine Kugel ersetzen, die die Tangentialebene im Einfallspunkte mit ihr gemein hat und denselben Radius wie der Krümmungskreis des betrachteten Hauptschnittes besitzt. Daher sind die Abstände der Brennlinien vom Einfallspunkt durch unsere Formeln (1) und (3) gegeben, wenn man dort die betreffenden Radien einsetzt.

Eine kollineare Abbildnng

findet wieder in den Ebenen der Hauptschnitte statt. Der einfallende und der gebrochene Strahl sind die Achsen. Die Brennweiten sind durch Einsetzen der beiden Krümmungsradien aus den bei der Kugel errechneten zu erhalten. Für ihr Verhältnis gilt also wieder in jedem Hauptschnitt: $f : f = -n : n'$.

Bei beliebig vielen brechenden Flächen

setzen sich die ebenen Kollineationen längs eines durch diese Flächen tretenden Strahles als Achse fort, wenn die Einfallsebene der folgenden Fläche stets zusammenfällt mit der der vorhergehenden oder auf ihr senkrecht steht, und einer der Hauptschnitte stets in der Einfallsebene liegt. Dies trifft z. B. dann zu, wenn alle Tangentialebenen der brechenden Flächen, die in den Einfallspunkten angelegt sind, auf derselben Ebene senkrecht stehen und einer der Hauptschnitte ebenfalls normal zu ihr gerichtet ist.

Die Gleichung $f : f' = - n : n'$ behält dann in jedem Hauptschnitt ihre Gültigkeit.

Für solche Systeme, in denen also eine Fortsetzung jeder der beiden ebenen Abbildungen von Fläche zu Fläche stattfindet, ergeben sich leicht einige

D. Allgemeine Sätze über homozentrische Brechung,

die ABBE[1] für beliebige Systeme stetig gekrümmter Flächen aufgestellt hat[2]. Jedoch ist der von uns betrachtete Fall der einzige praktisch wichtige und liegt auch den Anwendungen zugrunde, die wir später von diesen Sätzen machen werden.

Unmöglichkeit der Verwirklichung der allgemeinen (dreiachsigen, unsymmetrischen) kollinearen Abbildung auch in einem unendlich dünnen Raume um eine Achse, wenn von dieser ein Stück kontinuierlich abgebildet wird.

Die geometrische Theorie des zweiten Kapitels (p. 37) führte uns als auf den allgemeinsten Fall der Abbildung eines Raumes auf eine Kollineation mit zwei verschiedenen Nebenachsen. Das Verhältnis von Strecken senkrecht zur Hauptachse, die Lateralvergrößerung, variierte von Azimut zu Azimut.

Untersuchen wir, ob durch die bezeichneten Systeme von doppelt gekrümmten Flächen dieser Fall zu verwirklichen ist. Es gilt in den beiden ebenen Kollineationen

$$\frac{f_1}{f_1'} = -\frac{n}{n'} \quad , \quad \frac{f_2}{f_2'} = -\frac{n}{n'}$$

$$\frac{f_1}{f_1'} = \frac{f_2}{f_2'} \quad .$$

Soll aber die allgemeine räumliche Kollineation auch nur längs eines beliebigen kleinen Stückes der Achse hergestellt sein, so muß für die Punkte desselben die Achsial- oder Tiefenvergrößerung in den beiden Hauptschnitten dieselbe sein:

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad .$$

Nach Formel (Ia*), p. 47 ist dann:

$$-\frac{f_1}{f_1'}\beta_1^2 = -\frac{f_2}{f_2'}\beta_2^2$$

$$\beta_1 = \beta_2 \quad .$$

Wir haben also statt des allgemeinen Falles wieder eine achsensymmetrische Abbildung erhalten.

Die Erzeugung von anastigmatischen Bildern mit in zwei senkrechten Richtungen verschiedener Vergrößerung (Anamorphose) an einzelnen Punkten der Achse.

Jede der beiden ebenen Abbildungen erzeugt auf der Achse (wenn wir der Kürze wegen uns der Ausdrücke der projektivischen Geometrie bedienen, deren Bedeutung übrigens aus dem Früheren hervorgeht, vgl. auch p. 69) eine projektivische Beziehung. Wir fragen, in wieviel Punktepaaren dieselben zusammenfallen. Da die Bildpunkte beider Hauptschnitte projektivisch auf die Objektpunkte bezogen sind, so sind auch die Bildpunkte des einen Hauptschnitts projektivisch auf die des anderen bezogen; und unsere Frage kann auch lauten: Wieviel Doppelpunkte hat die letztere Beziehung? Es existieren bekanntlich zwei, die aber imaginär sein und zusammenfallen können; existieren mehr als zwei, so fallen alle entsprechenden Punkte zusammen. Wir erhalten also das Resultat: Es wird durch unser System von doppeltgekrümmten Flächen durch Elementarbüschel nahe der Achse (einem durch das System verfolgten Strahle)

1. entweder kein Punkt der Achse
2. oder ein Punkt
3. oder zwei Punkte
4. oder alle Punkte homozentrisch abgebildet. Mit der Abbildung der Achsenpunkte ist die Abbildung achsensenkrechter Elemente verbunden.

---

[1] Patentschrift der Firma C. ZEISS, Nr. 99722: Anamorphotisches Linsensystem. 1897. — [2] Die Sätze gehören, ohne Voraussetzung über die Systeme ausgesprochen, in die später vorzutragende „allgemeine Theorie der optischen Instrumente, wo wir auf sie zurückkommen werden.

Die Vergrößerung in diesen Elementen ist in dem vierten der erwähnten Fälle, wie wir oben allgemeiner bewiesen haben, in allen Azimuten dieselbe.

Werden zwei und nur zwei Punkte abgebildet, so ist die Vergrößerung in den zwei Hauptschnitten verschieden und zwar ist das Verhältnis der Vergrößerungen in dem einen Punkte p, $\frac{\beta_1}{\beta_2}$, zu dem Verhältnis der Vergrößerungen in dem anderen Punkte, P, $\frac{B_1}{B_2}$, reziprok:

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{B_2}{B_1} \quad .$$

Wenn wir nämlich die Strecke pP mit Δx, die zwischen den Bildpunkten $p'P'$ mit $\Delta x'$, ferner das Konvergenzverhältnis konjugierter Strahlen in den beiden Hauptschnitten für den Punkt p mit γ_1, γ_2 bezeichnen, so ist, wie die geometrische Betrachtung sofort zeigt:

$$\gamma_1 = \frac{\Delta x}{\Delta x'} B_1$$

$$\gamma_2 = \frac{\Delta x}{\Delta x'} B_2$$

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad ;$$

ferner ist aber wieder

$$\frac{f_1}{f_1'} = \frac{f_2}{f_2'} \quad ;$$

also nach (I c*) p. 47:

$$\beta_1 \gamma_1 = \beta_2 \gamma_2$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{B_2}{B_1} \quad .$$

Fallen die beiden Punkte anastigmatischer Abbildung zusammen, sodaß ein und nur ein Punkt der Achse abgebildet wird, so ist die Vergrößerung in allen Azimuten dieselbe.

Eine anastigmatische Anamorphose spezieller Art ist zuerst von Lippich[1], verwirklicht worden. Abbe[2] gab auf der Grundlage der entwickelten Sätze die Konstruktionsmöglichkeiten für solche anastigmatisch, aber mit einer bestimmten regelmäßigen Verzerrung abbildenden Systemen allgemein an. Untersuchungen über unsymmetrische Brechung und die dabei stattfindende Abbildung sind auch von Maxwell (s. o.), Larmor[3], Herman[4] und Sampson[5] ausgeführt worden. Der letztere gelangte u. a. zu den oben angeführten Ergebnissen.

IV. Die künstliche Erweiterung der Abbildungsgrenzen.

(Theorie der sphärischen Aberrationen.)

Im vorangehenden ist gezeigt, daß und inwieweit durch Brechung dünner Büschel an Kugelflächen eine Abbildung zustande kommt. Unter den dort gemachten Annahmen zeigte sich diese Abbildung als sehr beschränkt: bei zentraler Brechung war es nur ein fadenförmiger, die Achse des Systems umgebender Raum, in welchem allein eine „Abbildung“ in unserem Sinne stattfand, und dieselbe kam nur zustande durch Büschel von unendlich kleiner Winkelöffnung. Die Strahlenvereinigung war dann von der zweiten Ordnung.

[1] J. Lippich, Ztschr. f. Instrumentenk. **4.** 1. 1884. Ein Vorläufer Lippichs ist L. Farrenc (Engl. Patent Nr. 1453. 1862) aus dessen Veröffentlichung aber ein vollständiges theoretisches Verständnis seiner Erfindung nicht hervorgeht (M. v. Rohr, Theorie u. Gesch. d. phot. Objektivs). — [2] E. Abbe in der oben zitierten Patentschrift. — [3] J. Larmor, Proc. of the Lond. Math. Soc. **20.** 181. 1889; **23.** 165. 1893. — [4] R. A. Herman, Quarterly Journ. **27.** 191. 1895. — [5] A. Sampson, Proc. of the Lond. Math. Soc. **29.** 33. 1898.

Bei schiefer Brechung war der Bereich der Abbildung noch mehr eingeengt; man konnte von einer solchen nur reden, wenn man jeweilig gewisse ebene (zweidimensionale) Büschel in Betracht zog. Die Strahlenvereinigung war für die eine Art von Büscheln sogar nur von der ersten Ordnung; um eine gleiche Genauigkeit der Strahlenvereinigung zu haben wie im anderen Falle, müßte die Öffnung dieser Büschel also entsprechend noch mehr eingeengt werden. Das räumliche Büschel gab bei schiefem Einfall eine Abbildung, d. h. ein Entsprechen der Punkte zweier Raumgebiete eigentlich überhaupt nicht mehr.

Diese, gewissermaßen eo ipso stattfindende Abbildung wäre nun für alle praktischen Zwecke gänzlich unzureichend. Die Bilder, welche sie ergibt, sind ja einerseits unendlich klein, d. h. es wird von einem gegebenen Objekt nur ein der Theorie nach unendlich kleiner Teil abgebildet. Andererseits können wir — unter Vorausnahme dieser später näher zu definierenden und zu erörternden Begriffe — auch schon jetzt schlechthin feststellen, daß die von „unendlich dünnen“ Büscheln entworfenen Bilder unendlich lichtschwach wären und daß die „Bildpunkte“ so enger Büschel, gemäß der Wellentheorie als die Beugungswirkung entsprechend eng begrenzter Wellenflächen aufgefaßt, statt Punkten vielmehr unendlich große Scheiben wären. Die von benachbarten Punkten des Objekts herrührenden Bildscheiben würden sich überdecken, statt eines scharfen Bildes würde also eine völlige Konfusion entstehen, in welcher keinerlei Detail mehr erkennbar wäre.

Wenn wir andererseits die Öffnung der abbildenden Strahlenbüschel ohne weiteres steigerten, so würde, wie wir früher bereits angedeutet haben, die Strahlenvereinigung im geometrischen Sinne mehr und mehr unvollkommen und aus diesem Grunde die Abbildung aufgehoben.

Diese Verlegenheit zwischen anscheinend einander widersprechenden Anforderungen wird in Wirklichkeit durch einige bisher nicht berücksichtigte Tatsachen bedeutend verringert. Die erste ist die Unempfindlichkeit, d. h. die beschränkte Sehschärfe unserer Augen, die andere besteht darin, daß nach den Normen der physischen Optik die beschränkenden Grenzen für die Abbildung füglich um ein beträchtliches Stück hinausgeschoben werden dürfen. Drittens besteht die Möglichkeit, durch geeignete Kombination optischer Systeme solche zu erhalten, an denen die früher konstatierten Beschränkungen der Abbildung zum Teil — und unter Umständen bis zu einem sehr erheblichen Grade — beseitigt sind.

ad 1. Alle Bilder sind in letzter Linie dazu bestimmt, dem Auge dargeboten zu werden. Dieses — selbst ein optischer Apparat, dessen nähere Einrichtung wir an späterer Stelle beschreiben werden — ist vermöge dieser seiner optischen Einrichtung und noch mehr vermöge seiner anatomischen und physiologischen Natur auch seinerseits in seinen Leistungen mannigfach beschränkt. Unter anderem ist — unabhängig von aller weiteren Kenntnis seines Baues und seiner Funktionen — leicht die Tatsache festzustellen, daß das Unterscheidungsvermögen des Auges gewisse, wenn auch individuell etwas schwankende, Grenzen nicht übersteigt. Objekte — seien es selbst- oder mittelbarleuchtende, seien es optische Bilder, — welche dem Auge unter einem Sehwinkel dargeboten werden, der eine gewisse untere Grenze nicht erreicht, vermag es weder ihrer Form noch der Größe nach voneinander zu unterscheiden[1], sie treten in der Empfindung an die Stelle der idealen „Punkte“ der mathematischen Abstraktion.

Das Bestehen dieser Grenze, die außer von dem Individuum noch von verschiedenen anderen Umständen (Helligkeit, Farbe des Objekts u. dergl.) abhängen mag, — dies ist für uns hier ohne Belang — entbindet uns aber von der Verpflichtung, behufs optischer Abbildung Punkte oder „unendlich“ kleine

[1] S. die Lehrbücher der physiologischen Optik, z. B. das von HELMHOLTZ, 2. Aufl., § 18.

Abweichungen von punktförmiger Strahlenvereinigung zu fordern; wir können uns damit begnügen, das Bild aus „endlichen" Flecken bestehen zu lassen, deren Größe nur unterhalb jener — wie gesagt von mehreren Umständen abhängigen — Grenze liegt.

ad 2. Diese Erleichterung werden wir verschieden auslegen, je nachdem wir uns auf den Standpunkt der physischen oder der rein geometrischen Optik stellen. Gemäß letzterem würde hiernach eine Abbildung auch dann noch praktisch genügend sein, wenn die Strahlen nicht genau homozentrisch vereinigt werden, sondern statt eines Kegels ein Konoid bilden, dessen engste Einschnürung ein gewisses Maß nicht überschreitet. Statt des Bildpunktes würde dann der Querschnitt jener engsten Einschnürung, der „Kreis der kleinsten Verundeutlichung" funktionieren. Demgemäß würde es erlaubt sein, bei jeder durch Brechung an sphärischen Flächen vermittelten Abbildung die Öffnungen der wirksamen Büschel bis zu einer gewissen — von den Umständen des einzelnen Falles abhängigen — Größe ohne weiteres zu vermehren.

Gemäß der Undulationstheorie würden diesem Schlusse Bedenken entgegenstehen. Denn bei ihm ist stillschweigend angenommen, daß auch in dem endlichen Querschnitt nichthomozentrischer Strahlenbüschel eine Lichtwirkung entstehe, ganz ebenso als wenn jeder Strahl schlechthin Träger von Licht sei. Diese Annahme, welche gewissen Untersuchungen in ungerechtfertigter Ausdehnung zugrunde gelegt ist, können wir aber durchaus nicht ohne weiteres anerkennen. Es bedarf besonderer, mit den Hilfsmitteln der Diffraktionstheorie angestellter Untersuchung darüber, welcher Art die Lichtwirkung nichthomozentrischer Strahlen, d. h. nichtsphärischer Wellen auf irgend eine Einstellungsebene ist. Wir verdanken solche Untersuchungen Lord Rayleigh[1] (nachdem schon vorher Airy[2] ähnliche Rechnungen für uns hier nicht interessierende Fälle — Theorie des Regenbogens — angestellt hatte). Er berechnete für einen auf der Achse liegenden leuchtenden Punkt, also symmetrische Wellen, die Helligkeit im Schnittpunkte den Parachsialstrahlen für verschiedene gegebene (der vierten Potenz der Öffnung proportionale) Aberrationen. Straubel[3] gab eine vollständige Theorie der Beugung symmetrischer, nichtsphärischer, kreisförmig begrenzter Wellen, die auch die Lichtverteilung außerhalb der Achse (die das zentrale Lichtscheibchen begleitenden Beugungsringe) und die Abhängigkeit der Beugungsfigur und der Lichtverteilung von der Lage der Einstellungsebene in Betracht zog. Strehl[4] untersuchte außerdem noch den Fall außer der Achse liegender leuchtender Punkte (nichtsymmetrischer Wellenflächen), stellte ausführliche regelmäßige Berechnungen für diese Fälle an und zog daraus Schlüsse auf die wirkliche Bedeutung der verschiedenen Bildfehler (Abweichungen der Wellenfläche von der Kugelgestalt) für die Güte oder die zulässige Ausdehnung der Abbildung.

Das Beugungsbild einer sphärischen Welle, welche der homozentrischen Strahlenvereinigung der geometrischen Optik entspricht, ist ein Lichtscheibchen, umgeben von konzentrischen Ringen von geringerer rasch abnehmender Intensität. Durch Deformation der Welle nimmt die Helligkeit der Mitte ab und wird — da die gesamte Lichtenergie erhalten bleibt — nach der übrigen Beugungsfigur abgegeben. Hierin besteht die Verschlechterung des Bildes; denn zwei benachbarte Beugungsfiguren, die sich teilweise übereinander lagern, werden bei wachsender Aberration weniger und weniger Lichtabfall zwischen ihren hellsten Stellen ergeben; das optische System vermag die beiden benachbarten leuchtenden Objekt-

[1] Lord Rayleigh, Phil. Mag. **9.** 410. 1879. — [2] G. B. Airy, Cambridge Phil. Trans. **6.** 379. 1834. — [3] R. Straubel, Abh. kgl. bayer. Akad. d. Wiss. II. Cl. XVIII. 1. Abt. p. 113. 1893 oder Habltsschr., Theorie d. Beugungserschein. u. s. w. München 1893. — [4] K. Strehl, Theorie des Fernrohres. Leipzig 1894. Zeitschr. f. Instrumentenk. **15.** 362. 1895; **16.** 258. 1896; **17.** 50. 77. 165 und 301. 1897; **18.** 301. 1898. Gymn.-Progr. Erlangen 1898; Diss. Erlangen 1900.

punkte nicht mehr „aufzulösen“[1]. Insofern ist die Abnahme der Helligkeit des achsialen Scheibchens ein Maß für die Bildverschlechterung. Die Theorie lehrt aber die Abhängigkeit dieser Helligkeit von der Größe der Aberration, d. h. von der Deformation der Wellenfläche kennen[2].

So beträgt, um ein Beispiel anzuführen (K. STREHL, Zeitschr. f. Instrumentenk. **17.** 304. 1897), die Helligkeit einer symmetrischen deformierten Welle 99 % von der der sphärischen Welle, wenn die Ränder der beiden Wellenflächen bei Koinzidenz der Scheitel um $\frac{\lambda}{2\pi}$ voneinander entfernt sind; sind sie um $\frac{3\lambda}{2\pi}$ entfernt, so beträgt die Helligkeit 95 %; läßt man mit RAYLEIGH 20 % Differenz noch zu, so entspricht dies etwa einem Abstande der Wellenränder von $\frac{6\cdot\lambda}{2\pi}$. Dieser Abstand würde bei einem System von zehnmal so großer Brennweite als Öffnung eine Längenabweichung zwischen Mittel- und Randstrahlen von etwa 0,8 mm ergeben (für $\lambda = 0{,}5\,\mu$); mit einer solchen bildet z. B. eine gewöhnliche plankonvexe dünne Linse einen unendlich fernen Objektpunkt ab, dem sie ihre konvexe Seite zukehrt, bei einer Brennweite von 270 mm und 27 mm Öffnung. Man würde also mit dieser Linse bei entsprechender Anwendung noch merklich gute Bilder erhalten, wenn ihre Öffnung unter $^1/_{10}$ der Brennweite gehalten wird.

In der Tat kann man ja für manche Zwecke ohne erheblichen Nachteil optische Instrumente benützen, die ohne besondere Wahl aus „einfachen“ Linsen und Spiegeln zusammengesetzt sind, ohne deren Öffnungen übermäßig einengen zu müssen. Und man hat sich ihrer Jahrhunderte lang bedient, ehe man die künstlichen Mittel zur Vervollkommnung derselben erfunden hatte.

ad 3. Diese Vervollkommnung zu erreichen ermöglicht uns nun der dritte und letzte der oben erwähnten Auswege: Wir können optische Systeme so kombinieren, daß, wiewohl jedes einzelne — im geometrisch-optischen Sinne — nur die gewöhnliche ganz beschränkte Abbildung ergibt, bei dem resultierenden System jene Grenzen dennoch nach der einen oder der anderen Richtung hin, oder auch nach mehreren zugleich erheblich erweitert sind; sodaß also ein System entsteht, welches homozentrische Abbildung entweder durch mehr oder minder weit geöffnete Strahlenbüschel oder die eines größeren Objekts durch relativ enge Büschel vermittelt.

Mit dieser künstlichen Erzeugung geometrischer Strahlenvereinigung wird gemäß dem Satze vom kürzesten Lichtweg (p. 16) auch stets physisch eine Abbildung erreicht werden; ja das Gebiet der physischen Abbildung wird nach dem unter (2) Gesagten bei einer Verbesserung des optischen Systems noch mehr erweitert werden, als das der geometrischen.

Es mag aber gleich hier bemerkt werden, daß wir auch bei den nach dieser Richtung hinzielenden Bestrebungen auf Grenzen stoßen, die unüberschreitbar sind. Je weiter wir versuchen, in der einen Richtung die Beschränkungen der Abbildung zurückzuschieben, um so enger sind sie dann stets in anderen Richtungen. Je weiter die Öffnung der abbildenden Büschel sein soll, desto enger wird, nach der Seite und in der Tiefe, das Gebiet des gleich vollkommen abbildbaren Raumes, desto mehr ist die Abbildung beschränkt auf singuläre Stellen des Raumes und umgekehrt. Es ist — wie wir an verschiedenen Stellen dieses Buches nachweisen — infolge des Widerspruchs zwischen den Forderungen der geometrischen Theorie (den Eigenschaften der Kollineation) und den spezifisch

---

[1] K. STREHL, Zeitschr. f. Instrumentenk. **17.** 169. — [2] Zugleich läßt sie erkennen, welche Einstellungsebene für die Helligkeit am günstigsten ist. Es ist dies z. B. wenn die Aberration bis auf vierte Potenzen der Öffnung berücksichtigt wird, für symmetrische deformierte Wellen die Mittelebene zwischen dem Schnittpunkte der Rand- und Achsenstrahlen, für astigmatisch deformierte Wellen die Mitte zwischen den beiden Brennlinien. Vor und hinter dieser Einstellungsebene nimmt die Helligkeit etwa gleichmäßig und ziemlich rasch ab, wie sie auch bei sphärischen Wellen außerhalb der Brennebene rasch abnimmt. Die „Stelle engster Einschnürung des Strahlenbüschels“ und die „Brennlinien“ der geometrischen Optik zeichnen sich in bezug auf die Lichtverteilung nicht vor den anderen aus.

optischen Gesetzen (z. B. dem MALUSschen Satze) unmöglich, mit den Mitteln der Dioptrik Abbildungen herzustellen, welche von jener idealen Vollkommenheit sind, die wir in unseren Betrachtungen über die allgemeine kollineare Abbildung voraussetzten — Abbildungen eines beliebig großen Raumes durch beliebig weite Büschel. Es sei denn, daß wir, auf jeden eigentlichen optischen Effekt verzichtend, uns mit einer bloßen Umlagerung des Bildraumes gegen den Objektraum begnügen, ohne jede weitere Veränderung desselben. Diese liefert uns, wie wir früher sahen, die Spiegelung an Ebenen, ohne Einschränkungen irgend welcher Art.

Bisher galten für die betrachteten Abbildungen die Gesetze der Kollineation, eben weil und mit derselben Genauigkeit mit der diese Abbildungen stattfanden. Erweitern wir jetzt das Abbildungsgebiet, verbessern wir die angewandten Systeme, sodaß wir auch Strahlen größerer Neigung gegen die Achse als bisher zulassen können, so wird, wie aus dem Vorhergehenden hervorgeht, doch niemals in einem größeren Gebiete als dies früher der Fall war, also auch niemals in einem endlichen Gebiete, eine eindeutige Beziehung zwischen allen Punkten und Punkten, allen Geraden und Geraden, also eine Kollineation stattfinden. Denn entweder werden nur die abbildenden Strahlen durch das Hinzutreten neuer vermehrt, ohne daß die auf diesen gelegenen Punkte abgebildet würden, oder es werden zahlreichere Punkte als früher abgebildet, aber ohne daß durch sie bestimmte Geraden einander entsprechen. Es gelten also für die bei der Erweiterung hinzutretenden Gebietsteile der Abbildung nicht die Gesetze der Kollineation, sondern andere, die nur im Grenzfalle, beim Übergange in das ursprüngliche Gebiet, in die Gesetze der Kollineation übergehen. So ist z. B. bei der Abbildung eines Ebenenelements durch weite Büschel die Größe $\frac{h}{\operatorname{tg} u'}$ nicht konstant, sondern an die Stelle dieses tritt ein anderes, unten abzuleitendes Gesetz, der Sinussatz. Oder es wird eine achsensenkrechte Objektebene von endlicher Ausdehnung auch wenn sie punktweise abgebildet wird, weder notwendig in eine Ebene noch ähnlich (mit konstanter Vergrößerung) abgebildet werden.

Die Erweiterung der Abbildung kann, wie schon bemerkt, nach zwei Richtungen hin geschehen: erstens dahin, daß die Öffnung der abbildenden Büschel eine möglichst weite wird; zweitens dahin, daß möglichst große Objekte abgebildet werden. Die erstere Aufgabe kommt ersichtlich darauf hinaus, die von ein- und demselben Punkte ausgehenden, innerhalb eines endlichen Raumwinkels liegenden zentralen und schiefen Elementarbüschel durch geeignet angeordnete Spiegelungen oder Brechungen so zu verändern, daß sie sämtlich zuletzt wieder nach demselben (Bild-)Punkte konvergieren. Bei der letzteren wird es sich zunächst nur darum handeln, in den einzelnen relativ engen Büscheln, die von verschiedenen Punkten eines Objekts ausgehen, wenigstens den Astigmatismus aufzuheben, um überhaupt eine eindeutige scharfe Abbildung mittels räumlicher Büschel zu erhalten. Diesen Anforderungen werden wir jedoch alsbald noch weitere notwendig zu erfüllende beigesellen müssen.

Wir wenden uns der näheren Betrachtung dieser beiden Aufgaben zu. Um ihre Lösbarkeit zu übersehen, müssen wir namentlich den erstgenannten Punkt noch genauer studieren, als wir es bei der früheren Gelegenheit getan haben; also zunächst die im allgemeinen mangelnde Homozentrizität der von einem achsialen Punkte innerhalb eines endlichen Winkelraumes ausgegangenen Strahlen nach der Spiegelung oder Brechung an zentrierten Kugelflächen, den sogen. „Kugelgestaltfehler“ oder die

I. Sphärische Aberration für Achsenpunkte.

Wir haben früher gesehen, wie der Weg eines Strahles analytisch bei der Brechung an einer Kugelfläche zu bestimmen ist. Wir fanden (p. 67) zwischen den Abständen s, s' des Objekt- und Bildpunktes vom Scheitel S der brechenden Fläche und denen vom Einfallspunkt P, p und p', die Beziehung

$$n'\frac{s'-r}{p'} = n\frac{s-r}{p} \quad , \tag{1}$$

welche nichts anderes war als eine Transformation der optischen Invariante (p. 8)

$$n \cdot \sin i = n' \sin i' \quad .$$

Hierin ist

$$p^2 = (s-r)^2 + r^2 + 2\,r(s-r)\cos\varphi \quad ,$$

ebenso

$$p'^2 = (s'-r)^2 + r^2 + 2\,r(s'-r)\cos\varphi \quad ,$$

wenn φ der (halbe) Öffnungswinkel der brechenden Fläche, d. h. ihr Zentriwinkel ist. Tragen wir diese Werte oben ein, so wird

$$\frac{n'(s'-r)}{\sqrt{(s'-r)^2 + r^2 + 2\,r(s'-r)\cos\varphi}} = \frac{n(s-r)}{\sqrt{(s-r)^2 + r^2 + 2\,r(s-r)\cos\varphi}} \quad . \tag{2}$$

Entwickeln wir hier die Quadratwurzeln nach dem binomischen Lehrsatz und den $\cos\varphi$ in die äquivalente Potenzreihe, so erhalten wir schließlich nach geeigneten Reduktionen s', die Schnittweite des gebrochenen Strahles auf der Achse ausgedrückt durch eine nach den Potenzen von φ fortschreitende Reihe; und da gleichen aber entgegengesetzten Werten von φ offenbar gleiche Werte von s' entsprechen, so enthält diese Reihe nur die geraden Potenzen von φ. Sie ist also von der Form

$$s' = s_0' + A\varphi^2 + B\varphi^4 + C\varphi^6 + \ldots \tag{3}$$

Hätten wir in der ursprünglichen Gleichung φ durch u ersetzt oder durch irgend eine andere den Einfallspunkt des auffallenden Strahles bestimmende Größe, so hätten wir analoge Entwickelungen nach diesen Größen erhalten, etwa nach u' die Reihe

$$s' = s_0' + \mathfrak{a}'\,u'^2 + \mathfrak{b}'\,u'^4 + \mathfrak{c}'\,u'^6 + \ldots \tag{4}$$

oder dergl.

Die Koeffizienten dieser Reihen sind nach obiger Anweisung zu entwickeln. Diese Arbeit ist eine ziemlich umständliche, aber wiederholt ausgeführt. Wir wollen hier nur die Koeffizienten der zweiten Potenzen herleiten, welche noch durch relativ sehr einfache Ausdrücke dargestellt sind und daher eine gewisse Übersicht der sie bestimmenden Momente gestatten. Bei Systemen von relativ geringer Öffnung, wie den Fernrohren, ist das dem Quadrat der Öffnung proportionale Glied das numerisch bedeutendste, daher an sich von besonderem Interesse. Bei Systemen von sehr großer Öffnung, wie den Mikroskopobjektiven, gewährt die Betrachtung dieses zweiten Gliedes der Reihe allerdings geradezu gar keinen Anhalt zu irgend welchen Schlüssen. In diesem Falle, in welchem z. B. u oft 70^0 überschreitet, gewährt aber die Reihenentwickelung überhaupt keinen Nutzen, während für die Theorie anderer Instrumente allerdings das dritte und auch das vierte Glied der Reihe fast stets noch mit herangezogen werden müßte. Betreffs der Entwickelung dieser letzteren verweisen wir auf die vorhandene Literatur[1].

[1] Folgt am Schlusse dieses Abschnitts. Vgl. auch den unten folgenden Abschnitt über die analytischen Aberrationstheorien.

Das erste Glied der sphärischen Aberration auf der Achse.

Abbesche Invariantenmethode. Von einem Achsenpunkte geht ein Strahlenbüschel aus, das durch eine Anzahl brechender Flächen hindurchtritt. Wir betrachten die Veränderungen, die es an einer beliebigen dieser Flächen erleidet; d. h. wir sehen das einfallende Büschel bereits als mit sphärischer Aberration behaftet an: Zu verschiedenen φ gehören verschiedene s und p, aus denen die zugehörigen s' und p' gefunden werden sollen. Gehen wir nochmals auf den veränderten Ausdruck für die optische Invariante bei einer Brechung unter beliebigem endlichem Winkel zurück, *den wir noch beiderseits durch r dividieren*, also setzen wir jetzt

$$(1) \qquad Q = \frac{n(s-r)}{p \cdot r} = \frac{n'(s'-r)}{p' r} \quad .$$

Diese Invariante muß sich auch ihrerseits als eine Potenzreihe darstellen lassen, mit irgend einer, die Einfallshöhe des Strahles bestimmenden Größe, z. B. dem Öffnungswinkel φ der brechenden Kugel, als Variablen. Das konstante Glied dieser Reihe muß in jedem Falle $= Q_0$ sein, d. i. gleich der Invariante für parachsiale Strahlen. Die Koeffizienten der Potenzreihe selbst werden das eine Mal die Elemente des einfallenden, das andere Mal die des gebrochenen Strahles enthalten und zwar in genau gleichartiger Weise.

Wir können also einmal

$$Q = Q_0 + q\varphi^2 + \cdots \quad ,$$

das andere Mal

$$Q = Q_0 + q' \cdot \varphi^2 + \cdots$$

setzen.

Da wir uns hier auf die quadratischen Glieder beschränken wollen, so brechen wir die Entwickelung bei diesen ab. Alsdann folgt aber aus der Identität der linken Seiten beider Gleichungen, daß auch $q = q'$ sein muß.

Auf diesem Wege, welcher auch für die Berechnung aller anderen „Aberrationen" vorteilhaft ist, gelangen wir in relativ einfacher Weise zu Invarianten für die höheren Glieder der Reihenentwickelung.

Entwickelung. Wir schreiben (1) in der Form

$$(1\,a) \qquad Q = n\frac{s}{p}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\frac{s'}{p'}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right) \quad ,$$

und entwickeln p gemäß dem oben angegebenen Ausdruck nach φ. Vernachlässigen wir hierbei alle Größen, welche mit höheren Potenzen von φ als der zweiten multipliziert auftreten, so erhalten wir

$$p = s\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{r^2}{n\,s_0}\,Q_0\,\varphi^2\right) \quad ,$$

worin s_0 der Grenzwert von s für parachsiale Strahlen ist, welcher der für diese geltenden Gleichung

$$(1^*) \qquad Q_0 = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0}\right) = n'\left(\frac{1}{r} = \frac{1}{s_0'}\right)$$

genügt.

Hiernach ist die gesuchte Größe

$$\frac{s}{p} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{r^2}{n\,s_0}\,Q_0 \cdot \varphi^2 \quad .$$

Ganz analog muß

$$\frac{s'}{p'} = 1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{n' s_0'} Q_0 \cdot \varphi^2$$

sein.

Es sind nun noch s und s' selber in eine Reihe nach φ zu entwickeln. Denken wir uns zu dem Zwecke diese Größen erst nach u bezw. u' entwickelt, also

$$s = s_0 + \mathfrak{a} \cdot u^2 + \ldots .$$

$$s' = s_0' + \mathfrak{a}' u'^2 + \ldots . \quad ,$$

worin u selbst mit r, p und φ durch die Gleichung

$$\sin u = \left(\frac{r}{p}\right) \cdot \sin \varphi$$

zusammenhängt, so ergibt letztere, unter Vernachlässigung von dritten Potenzen der Variablen

$$u = \left(\frac{r}{p}\right) \cdot \varphi$$

und, unter Vernachlässigung von Gliedern, die mit der vierten und höheren Potenzen von φ multipliziert sind, folgt hieraus

$$u^2 = \left(\frac{r}{s_0}\right)^2 \cdot \varphi^2 \quad ,$$

also

$$s = s_0 + \mathfrak{a} \left(\frac{r}{s_0}\right)^2 \cdot \varphi^2 = s_0 \left(1 + \mathfrak{a} \frac{r^2}{s_0^3} \cdot \varphi^2\right) \quad .$$

endlich

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_0} - \mathfrak{a} \frac{r^2}{s_0^4} \cdot \varphi^2 \quad ;$$

und ganz ebenso

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{s_0'} - \mathfrak{a}' \frac{r^2}{s_0'^4} \cdot \varphi^2 \quad .$$

Demnach erhalten wir Q nach einigen Reduktionen in den beiden Formen

$$Q = n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0}\right) + \left[\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{n} \cdot \frac{r^2}{s_0} + n \mathfrak{a} \frac{r^2}{s_0^4}\right] \varphi^2$$

und

$$Q = n' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0'}\right) + \left[\frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{n'} \cdot \frac{r^2}{s_0'} + n' \mathfrak{a}' \frac{r^2}{s_0'^4}\right] \varphi^2 \quad ,$$

woraus wir gemäß der eingangs angestellten Überlegung folgern

$$\frac{2 n \mathfrak{a}}{s_0^4} + \frac{Q_0^2}{n s_0} = \frac{2 n' \mathfrak{a}'}{(s_0')^4} + \frac{Q_0^2}{n' s_0'} \quad ,$$

oder in unserer früher benützten Schreibweise

$$(5) \qquad \Delta\left(\frac{2 n \mathfrak{a}}{s_0^4}\right) = - Q_0^2 \Delta\left(\frac{1}{n s_0}\right) \quad .$$

Wäre das einfallende Büschel nicht bereits mit sphärischer Aberration behaftet, so wäre $\mathfrak{a} = 0$ und obige Gleichung ergäbe ohne weiteres den Wert von $\mathfrak{a}'$. In ihrer jetzigen Form könnte sie nur auf indirektem Wege dazu dienen, aus den gegebenen Elementen des einfallenden Strahles — zu welchem auch $\mathfrak{a}$ gehört — die des austretenden, also $\mathfrak{a}'$, zu berechnen.

Die Werte und Vorzeichen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ sind, wie aus ihren Einführungsgleichungen hervorgeht, ganz besonders charakteristisch für Art und Größe der sphärischen Aberration. Es ist $\mathfrak{a} = \frac{s - s_0}{u^2}$ und ebenso $\mathfrak{a}' = \frac{s' - s_0'}{u'^2}$. Bei gleichem Öffnungswinkel u des Büschels ist also $\mathfrak{a}$ ein unmittelbarer Ausdruck für die Differenz der Schnittweiten vom Rand- und Achsenstrahl des Büschels, die sogen. Längs- oder Longitudinalaberration.

Bei einer einzelnen kollektiv wirkenden Fläche und ebenso bei einer einzelnen dünnen Kollektivlinse ist, für parallel einfallendes Licht wenigstens stets, $s' < s_0'$. Man spricht dann von sphärischer „Unterkorrektion". Umgekehrt bei einer dispansiven Fläche oder dünnen Dispansivlinse.

Das einfallende Büschel mag homozentrisch sein oder in irgend welchem Grade selbst unter- bezw. überkorrigiert, durch eine einmalige kollektive Brechung wird es — bei parallelem Einfall wenigstens stets — nach der Richtung der Unterkorrektion, durch eine einmalige dispansive Brechung nach der Richtung der Überkorrektion verändert.

Das Vorzeichen von $\mathfrak{a}$ bezw. $\mathfrak{a}'$ läßt nun unmittelbar erkennen, ob das betreffende Büschel unter- oder überkorrigiert ist. Denn mag der Vereinigungspunkt des Büschels reell oder virtuell sein, ein negativer Wert von $\mathfrak{a}$ bezw. $\mathfrak{a}'$ bedeutet Unter-, ein positiver Wert Überkorrektion.

Denkt man sich die Gesamtheit der Strahlen des betreffenden Büschels gezeichnet, etwa wie in Figur 6, p. 21, so erhält man als Einhüllende sämtlicher Strahlen ein Stück von deren Brennfläche. Diese Brennfläche bildet nun, wie man sich leicht überzeugt, bei negativem Werte von $\mathfrak{a}$ (sphärischer Unterkorrektion) einen nach dem einfallenden Lichte hin offenen Kelch $>$, bei positivem $\mathfrak{a}$ (Überkorrektion) einen umgekehrt gelegenen $<$.

Seitliche Aberration. Zerstreuungskreis[1]. Bei einem nicht homozentrischen Büschel ist es innerhalb ziemlich weiter Grenzen a priori ganz ungewiß, an welche Stelle der Achse das eigentliche Bild zu verlegen sei, d. h. welche Stelle der Achse bei der Beobachtung faktisch als Bildort aufgefaßt werde. Hierüber sind wohl mehrfache Hypothesen aufgestellt und mit mehr oder minder ansprechenden Wahrscheinlichkeitsgründen gestützt worden[2], aber weder ist eine genügend exakte experimentelle Prüfung derselben erfolgt, noch sonst eine Einigkeit in diesem Punkte herbeigeführt worden.

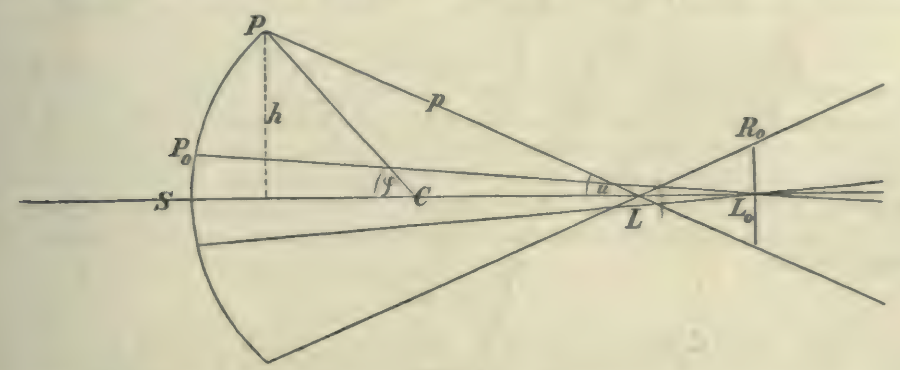
Wie ich schon früher hervorhob, ist nach meiner Meinung die theoretische Lösung auch dieser Frage überhaupt nicht auf dem Boden der geometrischen, sondern dem der physischen Optik anzustreben, was durch K. STREHL in den oben zitierten Arbeiten (p. 106) geschehen ist. Es ist sicher, daß nicht schlechthin die engste Einschnürung des austretenden Lichtbüschels als Bild aufgefaßt wird, sondern daß es — wie wohl zuerst GAUSS hervorgehoben hat (s. weiter unten „Aberration höherer Ordnung") auf die Verteilung der Intensität innerhalb des Lichtflecks ankommt, der in allen Ebenen an Stelle eines Bildpunktes auftritt. Diese ist aber nach STREHL an der Stelle engster Einschnürung in keiner Weise gegenüber den Nachbarebenen ausgezeichnet; sie ist es vielmehr (bei Berücksichtigung vierter Potenzen) in der Mittelebene zwischen dem Schnittpunkt der Rand- und Achsenstrahlen. Die Frage nach der „wahren Einstellungsebene" ist aber selbst auf Grund dieser Rechnungen nur „durch eine Art subjektiver Beurteilung zu erledigen" (STRAUBEL, l. c., p. 106) und darum ohne Bedeutung. Ohne weiteres zuzugeben ist nur, daß *caeteris paribus* die Größe des geometrisch

---

[1] S. KÄSTNER, Vollständiger Lehrbegriff der Optik. Altenburg 1755. p. 142 ff. —
[2] S. die in der Literaturübersicht angeführten Werke. Die meisten Autoren verlegen die Bildebene in die engste Einschnürung des Strahlenkonoids. Vgl. auch S. CZAPSKI, Ztschr. für Instrumentenk. 8. 203. 1888.

konstruierten Lichtfleckes, des „Zerstreuungskreises“, ein richtiges relatives Maß für die Bildschärfe ist. Denn je größer diese Lichtflecke sind, desto größer ist, wenn ich so sagen darf, das Mosaik, als welches jedes Bild annähernd aufgefaßt werden kann, d. h. desto weniger Detail ist im Bilde wiedergegeben. Auf die Wiedergabe des im Objekt vorhandenen Details sind aber ganz vornehmlich die optischen Konstruktionen gerichtet.

Indem wir nun darauf verzichten, die wahre Größe des Zerstreuungskreises bei gegebenem Gange der sphärischen Aberration eines Büschels zu betrachten, begnügen wir uns vielmehr damit, ein Maß für dessen relative Größe zu statuieren, indem wir die Fiktion machen, das Bild werde im Vereinigungspunkte der parachsialen Strahlen, L_0 (Figur 34), aufgefaßt. Der sich bei dieser Annahme



Figur 34.
Der Zerstreuungskreis der sphärischen Aberration im Schnittpunkt der Parachsialstrahlen.

ergebende Zerstreuungskreis, der Schnitt der in L_0 zur Achse senkrechten Ebene mit den äußersten Randstrahlen (dessen Halbmesser in der Figur $= R_0 L_0$ ist) übertrifft sicher den faktisch wahrnehmbaren, vielleicht um das Doppelte oder Vierfache[1]. Immerhin bietet er — oder auch ein gewisser festgesetzter Bruchteil desselben — ein durchweg vergleichbares Maß für die Größe der Aberration und gerade zu seiner Berechnung ist unsere Formel besonders geeignet.

Wir haben nämlich für den Durchmesser z des Zerstreuungskreises in einem Büschel von der Winkelöffnung $2\,u$

$$\tfrac{1}{2} z = (s_0 - s)\, u = -\, \mathfrak{a}\, u^3 \quad ,$$

also

$$\frac{2\, n\, \mathfrak{a}}{s_0^{\,4}} = -\frac{n\, z}{u^3 s_0^{\,4}} = -\frac{n\, u \cdot z}{u^4 s_0^{\,4}} = -\frac{(n\, u) \cdot z}{h^4} \quad ;$$

h bedeutet die Einfallshöhe des bei s schneidenden Strahles; demnach wird unsere Aberrationsgleichung

$$(\mathrm{I}) \qquad \Delta\,(n\, u \cdot z) = h^4\, Q_0^{\,2}\, \Delta \left(\frac{1}{n\, s_0}\right) \quad .$$

(Den Index 0, welcher darauf hinweisen sollte, daß sich die betreffenden Größen für parachsiale Strahlen verstünden, können wir fortan wohl wieder weglassen, ohne ein Mißverständnis befürchten zu müssen.)

Das Produkt aus Brechungsexponent und Sinus des halben Öffnungswinkels eines Büschels (welcher letztere für kleine Winkel mit dem Winkel selbst identisch ist) hat Abbe die **numerische Apertur** des Büschels genannt. Dasselbe ist

[1] Manche Autoren haben das eine, manche das andere angenommen, was bei einer Vergleichung der unten folgenden Zahlen mit den von anderen erhaltenen zu beachten ist.

eine der wichtigsten Größen in der Theorie der optischen Instrumente. Bezeichnen wir es mit a, so haben wir in obiger Gleichung ein Mittel zur Berechnung der Veränderung, welche das Produkt aus Apertur und Zerstreuungskreis der sphärischen Aberration bei irgend einer, durch die Werte von n, r, s und h gegebenen Brechung eines Büschels erfährt.

Objektives Maß der Bildverschlechterung durch Aberration. Das Hauptinteresse bei der Untersuchung der sphärischen Aberration eines Systems ist nun aber nicht so sehr auf die Größe des Zerstreuungskreises im Bilde gerichtet, noch weniger auf dessen Größe in irgend einem Zwischenstadium der Bilderzeugung, wie es hier ermittelt ist. Sondern was namentlich zu wissen interessiert ist: der Einfluß, den die mit irgend einer Brechung verbundene Änderung der Aberration auf das Erkennen der Details des Objekts ausübt.

Der Zerstreuungskreis in dem von k brechenden Flächen hervorgebrachten Bilde nimmt in diesem einen gewissen Raum ein. In welchem Grade dieser Zerstreuungskreis die Deutlichkeit des Bildes beeinflußt, erfahren wir, indem wir nach derjenigen Größe im Objekte fragen, deren Bild nach denselben k Brechungen gleich dem Zerstreuungskreis wäre (also faktisch von diesem verdeckt wird), wenn diese Brechungen ohne Aberrationen erfolgten.

Nach dem Lagrange-Helmholtzschen Satze ist nun (s. p. 77) immer für kleine Winkel

$$n' u' y' = n u y \quad ,$$

auch nach beliebig vielen Brechungen, wenn n, y und u sich auf ein auf die erste Fläche einfallendes Büschel beziehen, n', y' und u' auf das aus der letzten austretende. Demgemäß haben wir für die Größe des Objekts, dessen Bild nach der $k$ten Brechung $= z_k'$ ist, und das wir $(z_0)_k'$ nennen wollen,

$$n_k' u_k' z_k' = n_1 u_1 (z_0)_k' = a_1 (z_0)_k' \quad ,$$

wenn n_1 und u_1 Brechungsexponent des ersten Mediums und halbe Winkelöffnung des einfallenden Büschels sind. Ebenso ergibt sich für die Größe des Objekts $(z_0)_k$, das vor der $k$ten Brechung, d. h. durch die ersten $k-1$ Brechungen als z_k abgebildet wird,

$$n_k u_k z_k = n_1 u_1 (z_0)_k = a_1 (z_0)_k$$

und durch Subtraktion folgt:

$$\varDelta z_0 = \frac{1}{a_1} \varDelta (n u z) \quad .$$

Die früher betrachtete Brechung sei die $k$te in irgend einem System; alsdann wird durch die angegebene Substitution

$$\varDelta (z_0) = \frac{1}{a_1} h_k^4 Q_k^2 \varDelta \left(\frac{1}{ns}\right)_k \quad , \tag{7}$$

der Ausdruck für die durch die $k$te Brechung herbeigeführte Verundeutlichung des Bildes, gemessen am Objekt selber.

Derselbe läßt sich berechnen, wenn wir ihn durch Erweiterung mit $h_1^4 n_1^4$, mit Benutzung von $h_1 = u_1 s_1$ auf die Form bringen

$$\varDelta (z_0) = a_1^3 \left(\frac{s_1}{n_1}\right)^4 \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^4 Q_k^2 \varDelta \left(\frac{1}{ns}\right)_k \quad , \tag{8}$$

indem nämlich, wie leicht zu sehen, mit der von uns innegehaltenen Annäherung für die Verhältnisse der Höhen, in welchen der äußerste Randstrahl eines ziem-

lich engen Büschels die einzelnen Flächen schneidet, dieselben für einen parachsialen Strahl geltenden Verhältnisse gesetzt werden können, also

$$\frac{h_k}{h_{k-1}} = \frac{s_k}{s'_{k-1}} \quad ,$$

demnach

$$\frac{h_k}{h_1} = \frac{s_k}{s'_{k-1}} \cdot \frac{s_{k-1}}{s'_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{s_2}{s_1'} \quad .$$

Um die Verundeutlichung des Objekts zu finden, welche durch alle k Flächen zusammen hervorgebracht, also nach der $k$ten Brechung tatsächlich vorhanden ist, hat man nur einfach die einzelnen Bilddeteriorationen zu summieren, also

$$\text{(8a)} \qquad (z_0)_k' = \sum \varDelta(z_0) = a_1^3 \left(\frac{s_1}{n_1}\right)^4 \sum \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^4 Q_k^2 \varDelta \left(\frac{1}{ns}\right)_k \quad .$$

Dieser Ausdruck ist im Anschluß an die Durchrechnung eines parachsialen Strahles bequem zu berechnen. Derselbe gilt ohne jede Einschränkung auf gegenseitigen Abstand oder Zahl der brechenden Flächen.

Hervorzuheben ist, daß der Einfluß der sphärischen Aberration auf die Deutlichkeit der Abbildung bei gegebenem Objektabstand mit der dritten Potenz der numerischen Apertur des einfallenden Büschels wächst (denn der Ausdruck unter dem Summenzeichen bezieht sich ja nur auf Parachsialstrahlen).

Unendlich ferne Objekte. Bei solchen kann die Bildverschlechterung füglich nicht mehr in linearem, sondern muß in ihrem angularen Betrage angegeben werden. Für diesen, $\zeta_0 = \frac{z_0}{s_1}$, ergibt sich leicht aus Gleichung (8) für jede Brechung, $n_1 = 1$ gesetzt,

$$\text{(9)} \qquad \varDelta(\zeta_0) = h_1^3 \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^4 Q_k^2 \varDelta \left(\frac{1}{ns}\right)_k \quad ,$$

also nach k Brechungen

$$\text{(9a)} \qquad (\zeta_0)_k' = \sum \varDelta(\zeta_0) = h_1^3 \sum \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^4 Q_k^2 \varDelta \left(\frac{1}{ns}\right)_k \quad .$$

Der Einfluß der sphärischen Aberration zweiter Potenz ist also für unendlich ferne Objekte dem Kubus der linearen Öffnung des Systems bezw. des einfallenden Büschels proportional.

Der zu summierende Teil der rechten Seite in (9a) ist (wie man aus seiner Dimension ersieht), wenn man geometrisch ähnliche Systeme vergleicht, umgekehrt proportional der dritten Potenz der Brennweite des Gesamtsystems[1]. Bezeichnen wir also den Wert, den diese Summe für die Brennweite 1 des Gesamtsystems hat mit K, so ist

$$(\zeta_0)_k' = \left(\frac{h_1}{f}\right)^3 \cdot K \quad .$$

Die vom ersten Gliede der achsialen sphärischen Aberration abhängige Verundeutlichung eines unendlich entfernten Objekts ist also proportional der dritten Potenz der relativen Öffnung des Systems. Der Faktor K hängt von der spezifischen Zusammensetzung des Systems ab, d. h. von den besonderen Werten der Krümmungen, Brechungsverhältnisse, Abstände der einzelnen Flächen.

[1] Wenn wir voraussetzen, daß das System nicht selbst ein „teleskopisches" sei, gemäß unserer früheren Definition, sondern etwa nur ein Teil eines solchen, z. B. das Objektivsystem eines Fernrohres.

Der Winkelwert des durch die sphärische Aberration verursachten Zerstreuungskreises ist, wie aus (9a) weiterhin zu schließen ist, bei gegebenem Konstruktionstypus unabhängig von der absoluten Größe der Brennweite des Systems.

Wenn daher die Optiker für Fernrohrobjektive des gleichen Typus die relative Öffnung, d. h. das Verhältnis von Öffnung zu Brennweite $(2h:f)$ bei kleinen Dimensionen bis zu $\frac{1}{5}$ steigern, während sie es bei den großen Teleskopen auf $\frac{1}{15}$ bis $\frac{1}{20}$ einschränken, so sind die Gründe hierfür anderwärts zu suchen.

Man kann aus den Formeln (8a) und (9a), wenn dies ein Interesse bietet, auch leicht die im Bilde vorhandene **Längsaberration** berechnen, d. h. die Differenz der Schnittweiten, welche zwischen dem nach k Brechungen austretenden äußersten Rand- und Achsenstrahl vorhanden wäre, wenn die Aberration nur der zweiten Potenz der Öffnung proportional wäre. Man hat hierzu nur die Einführungsgleichung für den Zerstreuungskreis $\frac{1}{2}z = (s_0 - s)\,u$ zu berücksichtigen und den auf das Objekt bezogenen Zerstreuungskreis, gemäß der LAGRANGE-HELMHOLTZschen Gleichung $n'u'y' = n\,u\,y$ wieder in das Bild zu projizieren.

Es wird bei Objekten in endlicher Entfernung

$$(s' - s_0')_k = -\frac{1}{2}\left(\frac{n_1 u_1}{n_k' u_k'}\right)^2 \left(\frac{n_k'}{n_1 u_1}\right)(z_0)_k' = -\frac{1}{2}\beta^2\left(\frac{n_k'}{n_1 u_1}\right)(z_0)_k' \quad ;$$

daraus folgt nach (8a) bei Erweiterung mit $u_k'^2 s_k'^4$:

$$(9\text{b}) \qquad (s' - s_0')_k = -\frac{1}{2}\frac{u_k'^2}{n_k'}\left(\frac{h_1}{h_k}\right)^4 s_k'^4 \sum \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^4 Q_k^2 \varDelta\left(\frac{1}{ns}\right)_k$$

bei unendlich entfernten Objekten, wenn $n_1 = n_k' = 1$ ist, infolge von $\frac{h_1}{u_k'} = f$:

$$(s' - s_0')_k = -\frac{1}{2}\left(\frac{f}{h_1}\right) f(\zeta_0)_k \quad ,$$

woraus mittels (9a) erhalten wird:

$$(9\text{b}) \qquad (s' - s_0')_k = -\frac{1}{2}f^4\left(\frac{h_1}{f_1}\right)^2 \sum \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^4 Q_k^2 \varDelta\left(\frac{1}{ns}\right)_k \quad .$$

Die Formel (8a) wie (9a) haben eine praktische Bedeutung nur dann, wenn die Apertur der wirksamen Büschel eine so geringe ist, daß das erste Glied der sphärischen Aberration die den höheren Potenzen der Apertur proportionalen an Größe erheblich übertrifft. Dies ist bei den Teleskopobjektiven gewöhnlich der Fall, weshalb auf diese Anwendung findende Formeln schon vor langer Zeit — wenn auch anfänglich unter einschränkenden Voraussetzungen — entwickelt und zur Berechnung solcher Objektive benützt worden sind (EULER, BESSEL, HERSCHEL, SEIDEL, vgl. das Literaturverzeichnis am Ende des Kapitels).

In der Gestalt, die wir oben diesen Formeln gegeben haben, gestatten dieselben, wie bereits bemerkt, besonders bequem, wenn man rechnerisch ein parachsiales Büschel durch ein System hindurch verfolgt, daneben den Einfluß jeder einzelnen Brechung auf die Größe der Aberration zu verfolgen und auf diese Weise die Faktoren kennen zu lernen, von denen dieselbe in den verschiedenen möglichen Fällen vorzüglich abhängt. Dieser Vorzug geht verloren, wenn man die unter dem Summenzeichen angedeuteten Operationen ausführt und hierdurch eine Reihe bildet, deren Glieder aus den Radien, Brechungsverhältnissen und Scheitelabständen der brechenden Flächen zusammengesetzt sind. Doch gewährt eine solche Reihenentwickelung bei Systemen einfacherer Art wiederum den Vorteil, daß man die Wirkung des ganzen Systems mathematisch besser diskutieren kann.

Die sphärische Aberration in einfachen Sonderfällen[1].

Die durch eine einzige Brechung hervorgerufene Aberration ist nach (8) dargestellt durch

$$(10)\qquad \Delta(z_0) = (n n)^3 \left(\frac{s}{n}\right)^4 n^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)^2 \left(\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns}\right) .$$

Dieselbe ist also gleich Null 1. wenn $s = 0$ ist, woraus auch $s' = 0$ folgt, also Objekt und Bild im Scheitel zusammenfallen, 2. wenn $s = r$ ist, demnach auch $s' = r$ also Objekt und Bild im Mittelpunkt der brechenden Fläche zusammenfallen, und 3. wenn $n's' = ns$, woraus folgt $s = r + \frac{n'}{n} r$; $s' = r + \frac{n}{n'} r$, d. i. in den aplanatischen Punkten der Kugelfläche. In diesem Falle, ebenso wie in den beiden vorangehenden, sind auch die Aberrationen höherer Ordnung gleich Null, wie wir früher (p. 66) bereits gefunden haben.

Im übrigen hängt das Vorzeichen der Aberration von dem des Faktors $\left(\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns}\right)$ ab, welchen wir auf die Form bringen können

$$\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns} = \frac{n' - n}{n'^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{n' + n}{n}\frac{1}{s}\right) .$$

Eine nähere Diskussion zeigt, daß sowohl bei einer kollektiven als bei einer dispansiven Brechung die Aberration je nach der Lage des leuchtenden Punktes positiv oder negativ, d. h. unter- oder überkorrigiert ist. Nur für ein unendlich entfernte Objekte ist $\Delta(z_0)$ bei einer kollektiven Brechung stets positiv, bei einer dispansiven Brechung stets negativ.

Hat man es mit zwei durch einen endlichen Abstand getrennten Flächen zu tun, so werden die Verhältnisse schon etwas schwerer zu übersehen. Wir verzichten hier auf ein näheres Eingehen; wir wollen nur beiläufig darauf hinweisen, daß man sowohl unter Benützung der aplanatischen Punkte der beiden Flächen als auch unter Berücksichtigung des Umstandes, daß, wie eben bemerkt, die Aberration derselben Fläche je nach der Lage des Objektpunktes verschiedenes Vorzeichen hat, zwei Flächen so zusammensetzen kann, daß die Aberration des Gesamtsystems — etwa einer beiderseits an Luft grenzenden Linse — bei gegebener endlicher Brennweite gleich Null ist.

Die Aberration einer beiderseits an dasselbe Medium grenzenden Linse von verschwindender Dicke, deren Vorderfläche die Krümmung ϱ, deren Hinterfläche die Krümmung ϱ' und deren Substanz den relativen Index n gegen das umgebende Medium hat, für den unendlich fernen Objektpunkt ergibt sich aus (9a), gemessen durch den objektseitigen Winkelwert des Zerstreuungskreises, zu

$$(11)\qquad (\zeta_0)_3' = \zeta = h^3 \left[\frac{n+2}{n}\varphi\varrho^2 - \frac{2n+1}{n-1}\varphi^2\varrho + \left(\frac{n}{n-1}\right)^2\varphi^3\right] ,^{2}$$

wenn $\varphi = (n-1)(\varrho - \varrho')$ die Stärke der Linse ist. Der Koeffizient der Aberration wird also in Funktion von ϱ durch eine Parabel dargestellt, deren Achse senkrecht zur Achse der ϱ-Werte ist.

Damit die Brennweite oder Stärke der Linse bei gegebenem n dieselbe bleiben, muß $\varrho - \varrho' = k$ konstant sein. Wenn man also ϱ variiert, so ist vorausgesetzt, daß ϱ' im gleichen Sinne und um den gleichen Betrag geändert werde. Man bezeichnet eine solche gleichartige Variation von ϱ und ϱ' oft als „Durchbiegen" der Linse.

[1] Vgl. Broca. Aplanatisme et achromatisme; Soc. franç. de phys. 1892. p. 42—50. —
[2] Vgl. Huygens, Dioptrik, 27; Kästner, a. a. O., p. 123.

Die Aberration einer einfachen dünnen Linse ist ein Minimum für

$$\varrho = + \frac{1}{2} \frac{2n+1}{n-1} \frac{n}{n+2} \cdot \varphi$$

und beträgt dann

$$\zeta_{\min} = (h\varphi)^3 \frac{n(4n-1)}{(n-1)^2 4(n+2)} \quad .$$

In der folgenden Tabelle sind für $n = 1{,}5$ und $n = 2{,}0$ die Werte, die ζ bei verschiedener Form der Linse annimmt, zusammengestellt.

	$n = 1{,}5$			$n = 2{,}0$		
Gestalt der Linse	ϱ/φ	ϱ'/φ	$\zeta/(h\varphi)^3$	ϱ/φ	ϱ'/φ	$\zeta/(h\varphi)^3$
Ebene Vorderfläche . . .	± 0	-2	$+9$	± 0	-1	$+4$
Gleichseitig	$+1$	-1	$+\frac{10}{3}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+2$
Ebene Hinterfläche . . .	$+2$	± 0	$+\frac{7}{3}$	$+1$	± 0	$+1$
Günstigste Form (Aberration = Minimum)	$+\frac{12}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$+\frac{15}{7}$	$+\frac{5}{4}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{7}{8}$

Wie man sieht, nehmen die Aberrationen unter sonst gleichen Umständen mit wachsendem n rasch ab.

Wenn der Objektpunkt anders gelegen ist, als oben angenommen, so befolgt die Aberration im wesentlichen dasselbe Gesetz. Nur findet z. B. das Minimum der Aberration dann bei einer anderen Gestalt statt.

Aus (8a) folgt dann (immer für eine dünne Linse vom Brechungsindex n gegen das umgebende Mittel), wenn σ den reziproken Objektabstand und wieder ϱ und φ dieselben Größen wie oben bezeichnen:

$$(11\,b) \quad \begin{cases} (z_0)_2{}' = z = \dfrac{h^3}{\sigma} \Big[\varrho^2 \varphi \dfrac{n+2}{n} - \varrho \Big(2\sigma\varphi \dfrac{2n+2}{n} + \varphi^2 \dfrac{2n+1}{n-1} \Big) \\ \qquad + \Big(\sigma^2 \varphi \dfrac{3n+2}{n} + \varphi^2 \sigma \dfrac{3n+1}{n-1} + \varphi^3 \dfrac{n^2}{(n-1)^2} \Big) \Big] \quad . \end{cases}$$

Indem wir die Diskussion dieses Falles übergehen, wollen wir nur noch die Aberration in einem System von beliebig vielen in Kontakt befindlichen Linsen von zu vernachlässigender Dicke besprechen. Die Brennweiten der Linsen seien gegeben durch deren Reziproken, die „Stärken" $= \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_k \ldots \varphi_p$. Die Krümmungen der dem Lichte zugewandten Flächen seien $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_k \ldots \varrho_p$, die Brechungsindizes der Linsen gegen das sie umgebende Mittel (etwa Luft[1]) $= n_1, n_2 \ldots n_k \ldots n_p$.

Bei unendlicher Entfernung des Objekts ist dann die Aberration gemäß (9a)

$$(12) \quad \begin{cases} \zeta_0{}^{(p)} = h_1{}^3 \sum\limits_{k=1}^{k=p} \Big[\dfrac{n_k+2}{n_k} \varphi_k \varrho_k{}^2 - \dfrac{2n_k+1}{n_k-1} \varphi_k{}^2 \varrho_k - 4 \dfrac{n_k+1}{n_k} \varphi_k \varrho_k \sum\limits_{l=1}^{l=k-1} \varphi_l \\ \qquad + \Big(\dfrac{n_k}{n_k-1}\Big)^2 \varphi_k{}^3 + \dfrac{3n_k+1}{n_k-1} \varphi_k{}^2 \sum\limits_{l=1}^{l=k-1} \varphi_l + \dfrac{3n_k+2}{n_k} \varphi_k \Big\{ \sum\limits_{l=1}^{l=k-1} \varphi_l \Big\}^2 \Big] \quad . \end{cases}$$

[1] Die Fiktion, daß alle Linsen sich in Luft befinden, ist auch dann erlaubt, wenn in Wirklichkeit zwei der anderen Medien verschiedenen Indizes aneinanderstoßen, da man sich diese durch eine unendlich dünne Luftschicht getrennt denken kann, ohne an der Wirkung etwas zu ändern.

Wie man sieht, besteht die ganze Summe aus lauter Gliedern von der Form $G_k = A_k \varrho_k^2 + B_k \varrho_k + C_k$. Das erste Glied dieser Art stellt die Aberration der ersten Linse gegenüber parallel einfallendem Lichte dar, die wir oben näher betrachtet haben. Das $k$te Glied stellt den Zuwachs der Aberration dar, den die $k$te Linse verursacht, auf welche die Strahlen aus der Entfernung $e_k = 1 : \sum_{l=1}^{l=k-1} \varphi_l$ einfallen, nämlich aus dem hinteren Brennpunkt des aus den voranstehenden $(k-1)$ Linsen gebildeten Systems. Die Koeffizienten dieser Glieder hängen daher außer von n_k, ϱ_k und φ_k auch noch von $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{k-1}$ ab.

Der durch jede einzelne Linse bewirkte Zuwachs der Aberration wird also unter den gegebenen Umständen in Funktion ihrer Vorderkrümmung ebenfalls durch je eine Parabel dargestellt, deren Achse zur (Abszissen-Achse der ϱ senkrecht steht, aber für die verschiedenen Linsen verschiedene Lage hat. Denkt man sich die Gesamtheit der Aberrationswerte jeder Linse in dieser Weise graphisch dargestellt, so gewinnt man am besten einen Überblick über die Möglichkeit und die Bedingungen der Aufhebung der Aberration des Gesamtsystems durch gegenseitige Kompensation.

Im Falle zweier Linsen z. B. ist notwendig, daß die Aberration der zweiten Linse für die aus der Entfernung $\frac{1}{\varphi_1}$ einfallenden Strahlen entgegengesetzt gleich sei der der ersten Linse für parallel einfallende Strahlen. Dies wird im allgemeinen nur dann möglich sein, wenn die ersten Brennweiten der beiden Linsen entgegengesetztes Vorzeichen haben, d. h. die eine Linse kollektiv, die andere dispansiv ist, während das Verhältnis der absoluten Größen der Brennweiten ein beliebiges endliches sein kann. Alsdann aber ist die Aufhebung der Aberration auf unendlich viele Arten möglich, denn von dem größeren der beiden Minimalwerte der die Aberrationen darstellenden Parabeln an kommt jeder Ordinatenwert in jeder Parabel zweimal vor. Von da an können daher zu jedem Aberrationswert, d. h. jeder Form der einen Linse zwei Formen der anderen Linse angegeben werden, in welchen sie die Aberration der ersteren aufhebt.

Analytisch ist die Bedingung der aufzuhebenden Aberration erster Ordnung in einem aus zwei Linsen bestehenden System, gemäß (12) dargestellt durch eine quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten.

Wir müssen uns ein näheres Eingehen auf diesen für die Theorie der Fernrohrobjektive wichtigen Fall wegen Mangel an Raum leider versagen, ebenso die Diskussion der in Kombinationen von drei und vier Linsen auftretenden Möglichkeiten.

Außer einer vollständigen Aufhebung der Aberration durch gegenseitige Kompensation kann man nach DOLLOND (vgl. PRIESTLEYS Gesch. p. 520) durch Anwendung mehrerer Linsen auch schon eine erhebliche Verminderung dieser Aberration bewirken. Ersetzt man z. B. eine einfache Linse von der Stärke $\Phi = (n-1)(P - P')$ durch k Linsen gleicher Substanz, gleicher Form (etwa alle gleichseitig oder dergl.) und gleicher Gesamtbrennweite, so daß also $\Sigma \varphi_k = \Phi$, so wird die Aberration der letzteren dargestellt durch einen Ausdruck von der Form $M \frac{1}{k^2} + N \frac{1}{k}$, worin M und N von der Substanz und Form der Linsen abhängen. Die Aberration des Gesamtsystems nimmt also mit wachsendem k schnell ab.

Wenn die Dicken der Linsen gegen deren Radien endlich, oder die Linsen durch größere Intervalle getrennt sind, so erfahren alle diese Sätze erhebliche Modifikationen.

Ganz ebenso wie für einen unendlich fernen Punkt läßt sich aus Gleichung (8) bezw. (8a) für einen in endlichem Abstand gelegenen ein geschlossener Ausdruck

für die Aberration ableiten, wenn das System gegeben ist. Für ein System dünner, sich berührender Linsen läßt er sich aus Gleichung (11 b), die für eine dünne Linse gilt, ableiten, wenn man berücksichtigt, daß der Objektabstand s für jede folgende Linse gleich dem Bildabstand für die vorhergehende ist, daß also für $\sigma = 1/s$ gilt:

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k + \varphi_k = \sigma_1 + \Sigma \varphi_k \quad .$$

Betrachten wir jetzt die Linsen (ϱ, φ, n) als gegeben und suchen die aberrationsfreien Objektabstände, so erhalten wir für eine einzige Linse nach (11 b), $z = 0$ gesetzt, für σ eine quadratische Gleichung; für mehrere am gleichen Orte befindliche dünne Linsen treten weitere Glieder derselben Form hinzu, die also in σ_2, σ_3 u. s. w. quadratisch sind; da diese Größen aber, wie eben gezeigt, mittels einer linearen Substitution durch σ ersetzt werden können, so werden für eine beliebige Anzahl sich berührender dünner Linsen die aberrationsfreien Objektabstände s durch eine in $\sigma = \frac{1}{s}$ quadratische Gleichung geliefert. Ein beliebiges System solcher Linsen bildet daher entweder keinen oder zwei oder alle Achsenpunkte aberrationsfrei (mit Berücksichtigung des ersten Gliedes der Aberration) ab[1].

Wir begegnen also schon hier einer der Grenzen, auf welche wir p. 107 hingewiesen haben.

Die höheren Glieder der sphärischen Aberration auf der Achse.

Das dem Quadrat der Apertur proportionale erste Glied des Ausdrucks für die sphärische Aberration wird die letztere im allgemeinen nur dann einigermaßen vollständig darstellen, wenn die Apertur im Verhältnis zu den Radien der brechenden Flächen sehr klein ist. Da aber aus mehreren Gründen das Bestreben der Konstrukteure von optischen Apparaten darauf gerichtet sein muß, die Apertur möglichst groß zu machen, so sind für eine Berechnung der Aberration in solchen Systemen auch die höheren Glieder der Entwickelung noch zu berücksichtigen.

Wie bereits früher erwähnt (p. 109), hat die Darstellung der Aberration durch eine nach Potenzen der Einfallshöhe, des Einfallswinkels oder dergl. fortschreitende Potenzreihe einen Sinn und Wert überhaupt nur dann, wenn diese Variabele relativ klein ist, da bei größeren Werten entsprechend hohe Potenzen berücksichtigt werden müßten. Die Koeffizienten derselben werden aber bald so kompliziert und enthalten zugleich so hohe Potenzen der verfügbaren Elemente (Radien und Dicken), daß an eine analytische Behandlung derselben kaum zu denken ist. Wir verweisen auf den Abschnitt: Analytische Aberrationstheorien und auf die Literatur am Ende des Kapitels.

Man erreicht natürlich eine vollkommenere Strahlenvereinigung, wenn man gleichzeitig mit dem ersten Gliede das zweite durch geeignete Wahl der Linsenkrümmungen zum Verschwinden bringt. In einem System aus zwei Linsen ist dies bei den verfügbaren Werten der Brechungsindizes meist unmöglich; und auch dann, wenn mehr Linsen zur Verfügung stehen, ist es nicht von vornherein als das beste zu erachten, wenn das erste und zweite Glied der Aberration ganz auf Null gebracht wird, ohne daß man die höheren Glieder mit berücksichtigt, da diese dann unter Umständen einen um so schädlicheren Einfluß ausüben können. Im allgemeinen ist man vielmehr bei dieser, wie bei allen ähnlichen Aufgaben, welche auf eine Erweiterung der Abbildungsgrenzen gerichtet sind, gezwungen, ein gewisses Ausgleichungsverfahren anzuwenden: Man verzichtet darauf, den betreffenden Bildfehler in aller Strenge aufzuheben, und sucht viel-

[1] Diese Berichtigung eines in der ersten Auflage enthaltenen Irrtums verdankt der Verfasser einer Mitteilung von Alb. König und M. v. Rohr.

mehr zu erreichen, daß derselbe innerhalb des gegebenen Gebietes nur überall möglichst klein werde. Dabei kommen die im Eingange dieses Abschnitts genannten beiden Momente zu statten: die beschränkte Schärfe des Auges, welche es überflüssig macht, den „Bildpunkt" unter eine gewisse Größe zu vermindern und die, wenn auch kleine, so doch endliche Länge der Lichtwellen, welche eine Summierung der Lichtstärke auch bei solchen Elementarwellen ergibt, die um geringe Beträge gegeneinander verzögert sind. Von diesem Ausgleichungsverfahren dürfte, in der Anwendung auf den vorliegenden Fall, die übersichtliche Darstellung von GAUSS eine Vorstellung geben, welche dieser in einem Briefe an BRANDES niedergelegt hat. Wir geben dieselbe daher hier wörtlich wieder (nach GEHLERS Physikal. Wörterb., Leipzig 1831, Art. Linsenglas, **6**. 437)[1].

„. . . Ich finde nämlich jetzt durch eine tiefer eindringende Untersuchung, daß die Undeutlichkeit, die in dem Ausdrucke für die Längenabweichung von der vierten Potenz des Abstandes der auffallenden Strahlen von der Achse abhängt, den möglichst kleinsten Totaleinfluß hat, wenn man das Objektiv so konstruiert, daß diejenigen Strahlen, die unendlich nahe bei der Achse einfallen, und diejenigen, die in einiger Entfernung $= R \cdot \sqrt{\frac{6}{5}}$ auffallen würden, (wo $R =$ Radius des Objektivs ist) in einem Punkte A sich vereinigen, wobei das Okular dann so steht, daß man diejenigen Punkte der Achse, wo die Strahlen, die in der Entfernung $= \sqrt{(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\sqrt{6})}\,R$ und $= \sqrt{(\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{6})}\,R$ von der Achse aufgefallen sind, sich alle vereinigen, deutlich sieht. Denken Sie sich nämlich durch diesen Punkt eine auf die Achse senkrechte Ebene, so ist das Bild desto undeutlicher, je größer der Kreis um A ist, den die von einem Punkte des Objekts auf das Objektivglas gefallenen Strahlen füllen, doch so, daß die Intensität der Strahlen an jeder Stelle dieses Kreises mit berücksichtigt werden muß. Hierbei ist nun einige Willkürlichkeit; ich halte es für das Zweckmäßigste, hier nach denselben Prinzipien zu verfahren, die der Methode der kleinsten Quadrate zum Grunde liegen. Ist nämlich ds ein Element dieses Kreises, ϱ die Entfernung des Elementes von A und i die Intensität der Strahlen daselbst, so nehme ich an, daß $\int i \varrho^2 ds$ als das Maß der Totalundeutlichkeit zu betrachten sei, und mache dieses zu einem Minimum. Ich finde dabei folgende Resultate: 1. Konstruierte man das Objektiv so, daß dasjenige Glied der Längenabweichung, welches von dem Quadrate der Entfernung von der Achse abhängt, $= 0$ wird, und setzte das Okular so, daß A dahin fällt, wo die der Achse unendlich nahen Strahlen diese schneiden, so sei der Wert dieses Integrals $= E$. 2. Stellte man aber bei derselben Einrichtung das Okular so, daß das Integral so klein wird, wie es bei dieser Einrichtung werden kann (wobei A der Vereinigungspunkt der in der Entfernung $= R\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ auffallenden Strahlen sein wird), so ist das Integral $= \frac{1}{4}E$. 3. Dagegen ist bei der obigen Einrichtung und der vorteilhaftesten Stellung des Okulars das Integral $= \frac{1}{100}E$, als absolutes Minimum. Obiges Resultat, daß nämlich mit dem Vereinigungspunkte der der Achse unendlich nahen Strahlen ein bloß fingiertes Bild (von Strahlen aus größerer Distanz von der Achse als der Halbmesser des Objektivs vereinigt werden soll, ist anfangs sehr überraschend und paradox scheinend; aber bei näherer Betrachtung sieht man den eigentlichen Grund leicht ein. Jenes erste sogenannte Hauptbild (von Strahlen sehr nahe bei der Achse) ist nämlich dabei gleichsam das Unwichtigste wegen seiner geringen Intensität; viel wichtiger ist, daß die Strahlen von den der Peripherie näheren Ringen des Objektivs unter sich besser zusammengehalten werden, was bei jener Einrichtung am besten erreicht wird. Es tut mir leid, daß die Grenzen eines Briefes jetzt größere Ausführlichkeit nicht gestatten; der scharfe Kalkül läßt sich nichts abstreiten und bei einem vagen Raisonnement übersieht man

[1] Siehe auch GAUSS' Werke **5**. 509.

leicht einen wesentlichen Umstand; allein für den Kenner werden diese Winke schon zureichen.

Allgemein finde ich, daß immer bei der vorteilhaftesten Stellung des Okulars jenes Integral $= \frac{1}{4} E (1 - \frac{8}{5} \mu^2 + \frac{2}{3} \mu^4)$ wird, wenn das Objektiv so konstruiert ist, daß Strahlen aus der Entfernung μR von der Achse sich mit dem (oben sogenannten) Hauptbilde in einem Punkte vereinigen. Dieses ist ein Minimum für $\mu = \sqrt{\frac{6}{5}}$ und ist dann $= \frac{1}{100} E$; für $\mu = 1$ wäre es nur $= \frac{1}{60} E$ und für $\mu =$ unendlich klein $= \frac{1}{4} E$."

Eine Ausführung der von GAUSS angedeuteten Rechenoperationen veröffentlichte J. C. E. SCHMIDT[1]. Zu dem gleichen Resultate wie GAUSS kamen BESSEL[2] und SCHEIBNER[3]; vergl. auch SCHLEIERMACHER[4]. In anderer Weise bestimmten die Lage und Größe des sphärischen Zerstreuungskreises KERBER[5] und v. HÖEGH[6].

Wir haben wiederholt hervorgehoben, daß es zwecklos ist, Spekulationen in dieser Richtung zu weit zu treiben, solange man nicht auch auf die Phase der den Zerstreuungskreis schneidenden „Strahlen", d. h. Elementarwellen, Rücksicht nimmt. Die Aufgabe, die Helligkeitsverteilung in irgend einer Einstellungsebene eines mit sphärischer Aberration behafteten Systems zu bestimmen, kommt in Wahrheit darauf hinaus: die Diffraktionswirkung einer nicht sphärischen, sondern nach bestimmtem Gesetze paraboloidischen, begrenzten Wellenfläche festzustellen, gehört also eigentlich nicht in das Gebiet der geometrischen, sondern der physischen Optik. Die erstere kann nur die Unterlagen für die weitere Behandlung liefern; die so gewonnenen Ergebnisse sind oben mitgeteilt.

Bei Systemen von relativ großer Öffnung, wie den photographischen (Porträt)-Objektiven und namentlich den Mikroskopen genügt auch die Entwickelung des zweiten und dritten Gliedes der sphärischen Aberration nicht, um die tatsächlichen Verhältnisse selbst nur annähernd wiederzugeben. Man ist dann auf das später zu besprechende empirische Hilfsmittel der Durchrechnung angewiesen.

Von Wichtigkeit ist nur — namentlich in praktischer Hinsicht — das allgemeine Ergebnis, welches solche Bemühungen geliefert haben: daß es möglich ist, auch in Büscheln von sehr großem Öffnungswinkel durch geeignete Kombination einer relativ geringen Anzahl von brechenden Flächen die sphärische Aberration praktisch aufzuheben, d. h. auf ein so geringes Maß zu reduzieren, daß ihr Einfluß auf die Bildschärfe unmerklich ist und jedenfalls geringer wird, als der anderer Faktoren, welche eine beliebige Steigerung der Bildschärfe ohnedies verhindern.

Bei Mikroskopen speziell kann der Öffnungswinkel der vom Objekt divergierenden Strahlen nahezu 150° sein und er kann dies selbst in einem höher brechenden Medium als Luft — wodurch ja, wie ohne weiteres ersichtlich und später noch näher dargelegt werden soll, der dioptrische Wert des Büschels entsprechend gesteigert wird. Trotzdem ist eine durchaus befriedigende Aufhebung der sphärischen Aberration in solchen Systemen durch Kombination von nicht mehr als 15 Brechungen, d. h. brechenden Flächen, möglich, mit welchen zugleich noch mehreren anderen wichtigen Bedingungen Genüge geleistet werden kann. Bei Systemen, deren Öffnungswinkel nicht 150° in Luft übersteigt, genügen hierzu bereits 10—12 Brechungen.

---

[1] J. C. E. SCHMIDT, Lehrbuch der analytischen Optik, hrsg. von GOLDSCHMIDT, Göttingen 1834. p. 514 ff. — [2] FR. W. BESSEL, Astronomische Untersuchungen. Königsberg 1841. **1.** — [3] SCHEIBNER, Abh. d. Leipz. Ak. d. Wiss. **11.** 559. 1876. — [4] L. J. SCHLEIERMACHER, Analytische Optik. Darmstadt 1842 **1.** 14 u. 378 ff. — [5] A. KERBER, Centralztg. f. Opt. u. Mech. **8.** 145. 1887; **10.** 147. 1889. — [6] E. v. HÖEGH, Ztschr. f. Instrumentenk. **8.** 117. 1888; vgl. dagegen S. CZAPSKI, ibid., p. 203 und C. MOSER, p. 223.

II. Abbildung eines zur Achse senkrechten Flächenelements durch weitgeöffnete Büschel.

Bedingung des Aplanatismus.

Mit der Aufhebung der sogen. sphärischen Aberration auf der Achse, d. h. mit der Einrichtung eines Systems brechender oder spiegelnder Flächen, daß die von einem auf der Achse gelegenen Punkte ausfahrenden Strahlen wieder in einem auf der Achse gelegenen Punkte — oder sehr kleinen Scheibchen — vereinigt werden, ist die Abbildung des einen Punktes in den anderen gegeben. Da alle Funktionen eines Linsensystems sich stetig ändern, so wird mit der Abbildung eines auf der Achse gelegenen Punktes jedenfalls auch die — wenn auch entsprechend weniger scharfe — Abbildung eines ihm seitlich benachbarten durch ebenso weit geöffnete Büschel eo ipso gegeben sein. In Systemen von erheblicher Öffnung jedoch werden dann im allgemeinen die Aberrationen von gleicher Größenordnung wie die Entfernung des seitlichen Objektpunktes von der Achse. Es wird also ein zu einem Achsenpunkt senkrechtes Flächenelement mit Aberrationen, die seiner eigenen Größe vergleichbar sind, d. h. überhaupt nicht gebildet. Es muß dann vielmehr in den Büscheln, welche die Abbildung des ab-Achsenpunktes vermitteln, eine ganz bestimmte Beziehung unter den konjugierten Strahlen vor und nach dem Durchgang durch das System bestehen, damit die Abbildung auch nur eines unendlich kleinen achsialen Flächenstücks ermöglicht werde.

Wir setzen nichts weiter voraus, als daß ein optisches System ganz beliebiger Zusammensetzung vorliege, welches eine Symmetrieachse besitzt, „zentriert" ist, und in welchem für die Punkte O und O' der Achse die sphärische Aberration aufgehoben ist. Ein bei O zur Achse senkrechtes Flächenelement dq werde (Figur 35) durch die der Achse unendlich nahe verlaufenden Strahlen in das bei O' ebenfalls zur Achse senkrechte Element dq' abgebildet, so daß die lineare Lateralvergrößerung in diesen Elementen $\frac{dy'}{dy} = \beta_0$ ist. Wir betrachten zwei beliebige in derselben Meridianebene liegende Linienelemente von dq und dq', dy und dy'. Die abbildenden Strahlen seien durch eine auf der Achse kreisförmige Blende so begrenzt, daß überall nur Strahlen von der Maximalneigung U gegen die Achse in das System ein- und solche von der Maximalneigung U' aus ihm austreten können. Wir haben nun die Bedingung dafür zu suchen, daß die vom Punkte P auf dy ausgehenden Strahlen in einen Punkt P' auf dy' vereinigt werden.

Figur 35.
Zum Sinussatz. Gesucht wird die Bedingung dafür, daß, wenn O durch die ganze Öffnung in O' abgebildet wird, auch P in P' oder das Element dy in dy' abgebildet wird. Die Zeichenebene ist die Ebene M der Figur 36.

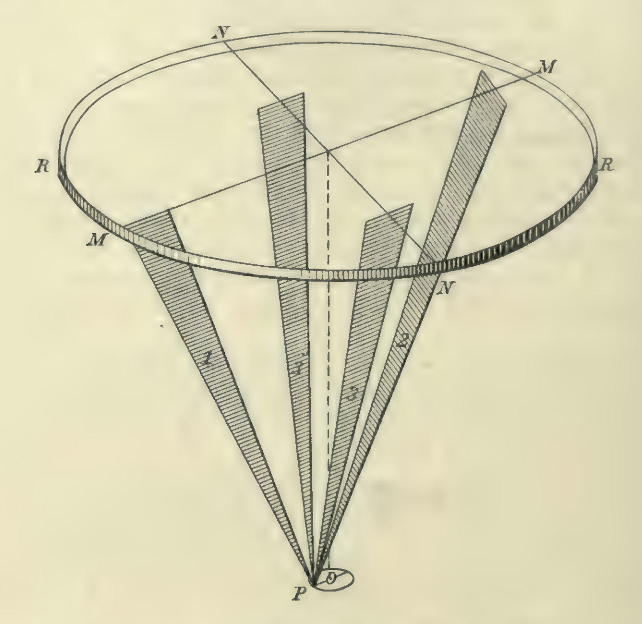
Bei schiefer Brechung haben wir (p. 96) Abbildungen nur in elementaren ebenen Streifen erhalten, und zwar in einer Meridianebene unendlich viele „meridionale Abbildungen", in jeder anderen Ebene je eine „sagittale Abbildung". Wir können mit den bisher entwickelten Hilfsmitteln sofort die folgenden von P ausgehenden ebenen Büschel untersuchen (vgl. Figur 36).

1. Die Meridionalbüschel, die in der dy enthaltenden Meridianebene M verlaufen.

2. Die Sagittalbüschel, die mit den vorigen gemeinsame Hauptachsen haben und in den zu M senkrechten dy enthaltenden Ebenen nahe an M verlaufen.

3. Die Sagittalbüschel, die in allen Ebenen durch dy nahe an dem zu dy senkrechten Meridianschnitt N verlaufen.

1. In der Tangentialebene M (Figur 35, vor. Seite) erhalten wir z. B. um einen beliebigen von O unter dem Neigungswinkel u ausgehenden Strahl als Objektachse und den entsprechenden, bei O' unter dem Winkel u' einfallenden Strahl als Bildachse eine Kollineation der diese Achsen umgebenden elementaren ebenen Streifen. O und O' sind dabei konjugierte Punkte nach der Voraussetzung, daß



Figur 36.

P ist ein Punkt des in O achsensenkrechten Flächenelements dq und des darin enthaltenen Linienelements $OP = dy$. Die von dq ausgehenden Strahlen sind durch den Fassungsring RR begrenzt. Die gezeichneten schmalen ebenen Streifen, die von P ausgehen, werden in dem folgenden Beweise betrachtet.

die sphärische Aberration in ihnen gehoben ist. Ein parachsialer Objektstrahl, der im Abstande $d\eta$ von O verläuft, wird in einen parachsialen Bildstrahl verwandelt, der in einem solchen Abstande $d\eta'$ von O' verläuft, daß $\frac{d\eta'}{d\eta}$ die Lateralvergrößerung β für O und O' ist. Nun ist aber das Konvergenzverhältnis γ in O und $O' = \frac{du'}{du}$; und nach dem LAGRANGE-HELMHOLTZschen Satze ist

$$\beta\gamma = \frac{n'}{n} \quad ,$$

also

$$\frac{d\eta'}{d\eta} \cdot \frac{du'}{du} = \frac{n}{n'} \quad .$$

Zwei in O und O' auf der Symmetrieachse errichtete Senkrechte werden von den beiden parachsialen Geraden, welche ja bis auf unendlich Kleines auch

die Winkel u und u' gegen die Achse bilden, in Abständen dy und dy' geschnitten, so daß

$$dy = \frac{d\eta}{\cos u} \quad , \qquad dy' = \frac{d\eta'}{\cos u'} \quad ,$$

also

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{du \cos u}{du' \cos u'} \quad .$$

Jeder beliebige in der Meridianebene verlaufende Strahl durch P ist aber als parachsialer Strahl einer dieser elementaren Kollineationen, deren Achsen durch O (bezw. O') gehen und die sich durch die Neigungswinkel u (bezw. u') ihrer Achsen unterscheiden, anzusehen. Damit jeder solche Strahl durch P auch wieder durch P' geht, muß der Ausdruck für $\frac{dy'}{dy}$ von u unabhängig sein, also:

$$\text{const.} = \frac{n}{n'} \, \frac{du \cos u}{du' \cos u'} = \frac{n}{n'} \, \frac{d(\sin u)}{d(\sin u')} \quad ;$$

da für $u = 0$ auch $u' = 0$ sein muß:

$$\frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \text{const.} \quad ;$$

der Wert der Konstanten ergibt sich durch Vergleich mit den für unendlich kleine u geltenden Werten:

$$\frac{du}{du'} = \frac{1}{\gamma_0} = \frac{n'}{n} \beta_0 \quad ,$$

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{n'}{n} \beta_0 \quad .$$ [1]

2. Von den Sagittalbüscheln, deren Ebenen senkrecht auf M, der Zeichenebene von Figur 35, stehen, wissen wir nun bereits, daß die Hauptstrahlen das Element dy' an demselben Punkte P durchstoßen. Setzen wir die Strecke $O_1 P = dl$, $O_1 P' = dl'$, so ist

$$dl = \frac{dy}{\sin u} \quad , \qquad dl' = \frac{dy'}{\sin u'} \quad .$$

Sollen P und P' konjugierte Punkte dieser Büschel sein, so muß, da O_1 und O_1' es nach p. 88 sicher sind, das Verhältnis $dl' : dl$, d. i. die Tiefenvergrößerung α dieser sagittalen Abbildung, so beschaffen sein, daß

$$\frac{dy'}{dy} = \alpha \cdot \frac{\sin u'}{\sin u} = \text{const.}$$

Berücksichtigt man, daß nach (Id*) auf p. 47

$$\alpha = - \frac{n}{n'} \, \frac{1}{\gamma^2}$$

---

[1] Man kann dasselbe Resultat auch, wie es in der ersten Auflage geschehen ist, ableiten, indem man ausdrücklich dy als Objekt aller der elementaren tangentialen Abbildungen betrachtet (vgl. „Vergrößerung zur Achse schiefer Strecken", p. 46). Dann ergibt sich der obige Satz als Bedingung dafür, daß die Vergrößerung aller elementaren, tangentialen Abbildungen (aller tangentialen Zonen) dieselbe ist. Streng genommen, ist freilich bei diesen Abbildungen das Bild eines zur Symmetrieachse senkrechten Elements nicht wieder ein solches; aber es kann als solches gelten, wenn man Zerstreuungskreise, die gegen die Dimensionen des Elements selbst unendlich klein sind, vernachlässigt.

und, wie aus Figur 36 hervorgeht,

$$\gamma = \frac{\sin u'}{\sin u} \quad ,$$

so folgt wieder die Bedingung:

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \text{const.} \quad ,$$

die sich schon oben ergab.

3. Bei der oben an dritter Stelle genannten, in einer beliebigen Ebene durch dy stattfindenden sagittalen Abbildung, welche um einen zu dy senkrechten Strahl als Objektachse und um einen zu dy' senkrechten Strahl als Bildachse stattfindet, ist die Lateralvergrößerung $= \frac{dy'}{dy}$. Ist wieder u der Winkel dieser in der Ebene N (s. o.) liegenden Objektachse, u' der der ebenfalls in N liegenden Bildachse mit der Symmetrieachse des Instruments, so ist das Konvergenzverhältnis konjugierter Strahlen in O und O' hier

$$\frac{dv'}{dv} = \frac{\sin u'}{\sin u} \quad .$$

Man erkennt dies. wenn man bedenkt, daß die Objekt- und Bildachse dadurch in konjugierte Strahlen der sagittalen Abbildung übergehen, daß man die Ebene N um einen unendlich kleinen Winkel um die Symmetrieachse dreht.

Es folgt in derselben Weise wie oben:

$$\frac{dy'}{dy} \cdot \frac{\sin u'}{\sin u} = \frac{n}{n'} \quad ,$$

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{n}{n'} \frac{\sin u}{\sin u'} \quad ;$$

soll aber dy durch das ganze Instrument abgebildet werden, so muß für alle diese ebenen sagittalen Abbildungen, die sich durch die Werte von u unterscheiden (von den verschiedenen sagittalen Zonen herrühren) die Vergrößerung dieselbe sein, also folgt wieder

$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{n'}{n} \beta_0 \quad . \tag{4}$$

Die Bedingung der Abbildung eines Paares von Linienelementen durch Büschel verschiedener endlicher Neigung zur Achse ist also für meridionale Büschel die gleiche wie für sagittale: Das Verhältnis der Sinus konjugierter Achsenwinkel muß für die von den konjugierten Achsenpunkten ausgehenden Strahlen innerhalb des betreffenden Winkelraumes ein konstantes sein. Der Wert der Konstanten ist die Vergrößerung der parachsialen Strahlen β_0, multipliziert mit dem Verhältnis der Brechungsexponenten des Objekt- und Bildmediums.

Andere Beweise und Erweiterungen des Sinussatzes.

Hat die gegebene Ableitung den Vorzug, auf die ebenen Büschel zurückzugehen, welche der Anschauung näher liegen und zum Teil Gegenstand der rechnenden Optik sind, so läßt sie doch das Verhalten derjenigen Strahlen un-

bestimmt, die in den oben betrachteten Büscheln nicht enthalten sind[1]. Der folgende einfachste Beweis des Sinussatzes stellt denselben als Bedingung für die Abbildung eines achsensenkrechten Elements durch alle von ihm ausgehenden Strahlen hin. Er folgt aus der p. 162 abgeleiteten CLAUSIUSschen Gleichung für zwei Flächenelemente dq und dq', die durch Elementarbüschel von den Raumwinkeln $d\omega$ und $d\omega'$ und den Neigungen ϑ und ϑ' gegen die Normale der Elemente auf einander abgebildet werden:

$$n^2 \cos\vartheta\, d\omega\, dq = n'^2 \cos\vartheta'\, d\omega'\, dq' \quad .$$

Sollen die Flächenelemente nun durch Systeme endlicher Öffnung, die eine mit der Flächennormale zusammenfallende Symmetrieachse besitzen, auf einander abgebildet werden, so gilt für zwei zwischen denselben Meridianebenen liegende Elementarbüschel:

$$\frac{d\omega}{d\omega'} = \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sin\vartheta'\, d\vartheta'} \quad ,$$

$$\frac{dq'}{dq} = \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \frac{d(\sin^2\vartheta)}{d(\sin^2\vartheta')}$$

und für die Konstanz der Vergrößerung in allen Büscheln folgt der Sinussatz.

Der oben (p. 124—126) angegebene Beweis rührt in der Hauptsache von ABBE[2] her, der den Sinussatz zuerst als dioptrische Bedingung der Abbildung von Flächenelementen durch endlich geöffnete Büschel aufgestellt hat; der im vorangehenden entwickelte Beweis ist von S. CZAPSKI gegeben worden.

Fast gleichzeitig mit ABBE fand v. HELMHOLTZ[3] den Satz durch photometrische Betrachtungen. Auf diese, sowie auf den von HOCKIN[4] für die Tangentialebene gelieferten Beweis werden wir unten zurückkommen.

Bei analytischer Entwickelung der Abbildungsfehler ist der Sinussatz in dem beschränkten Gebiete der „Aberrationen dritter Ordnung" identisch mit der FRAUNHOFERschen Bedingung v. SEIDELS, worauf im folgenden noch eingegangen wird.

Man erkennt aus dem oben gegebenen Beweise am deutlichsten, daß der Sinussatz eine für zentrierte Systeme eintretende geometrische Folgerung aus der allein auf dem Prinzip des kürzesten Lichtweges beruhenden CLAUSIUSschen Gleichung ist.

Aus diesem Prinzip hat M. THIESEN[5] mit Hilfe seiner „charakteristischen Funktion" als Bedingung der Abbildung zweier Ebenen durch beliebige Systeme, ohne irgend andere Voraussetzungen, den Satz abgeleitet, daß der Kosinus des Winkels zwischen einem Objektstrahl σ und einer diesen schneidenden Geraden der Objektebene, t, also $\cos(\sigma, t)$ in einer linearen Beziehung zu der bildseitigen entsprechenden Größe, $\cos(\Sigma, T)$ steht; hieraus ergibt sich für den von uns betrachteten Fall der gewöhnliche Sinussatz.

Für das Prinzip des kürzesten Lichtweges kann auch der MALUSsche Satz eintreten. In der Tat erhielt BRUNS in seiner auf diesem Satze fußenden Eikonaltheorie die folgende noch etwas engere Bedingung punktweise vollzogener Abbildung zweier Flächenelemente:

---

[1] Nach mündlicher Mitteilung ist dieser Beweis von A. KÖNIG und M. v. ROHR auch auf die anderen Strahlen ausgedehnt worden, indem sie sich auf den p. 98 Anm. 1 erwähnten LIPPICHschen Satz stützten. — [2] E. ABBE, Arch. f. mikr. Anat. **9.** 420. 1873; Sitzber. d. Jenaer Ges. f. Med. u. Naturw. oder Rep. f. exp. Physik **16.** 303. 1881. — [3] H. HELMHOLTZ, POGG. Ann. Jubelbd. p. 557. 1874. — [4] CH. HOCKIN, Journ. Roy. Micr. Soc. (2) **4.** 337. 1884. — [5] M. THIESEN, Verhdlg. d. Physik. Gesellsch. zu Berlin 1892.

$$\frac{\cos(\sigma, t)}{\cos(\Sigma, T)} = \text{const.} \quad ,$$

diese Verallgemeinerung des Sinussatzes ist von BRUNS[1] Kosinussatz genannt worden. Auch hier ergibt sich für zentrierte Systeme der gewöhnliche Sinussatz.

Ebene Büschel.

STRAUBEL[2] hat für ebene Büschel eine unter sehr allgemeinen Voraussetzungen gültige Erweiterung des Sinussatzes angegeben. Werden zwei Linienelemente dy und dy' durch elementare Büschel mit ebenen Öffnungswinkeln in einander abgebildet, wobei aber die Ebene des Objektelements und der objektseitigen Büschel mit der des Bildelements und der bildseitigen Büschel nicht zusammenzufallen braucht, so folgert er aus dem Prinzip des kürzesten Lichtweges (w und w' sind die Winkel zwischen den Büscheln und den Normalen der Elemente, dw und dw' die ebenen Öffnungswinkel der Büschel):

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{n}{n'} \frac{\cos w \, d\omega}{\cos w' \, d\omega'}$$

(über die Herleitung s. p. 162).

Sollen die Elemente durch ein Büschel endlicher Öffnung abgebildet werden, so muß für die einzelnen Partialbüschel die Vergrößerung konstant, $\frac{dy'}{dy}$ unabhängig von w sein, daher

$$\frac{d(\sin w)}{d(\sin w')} = \text{const}_1 = C \quad ;$$

$$\sin w = C \sin w' + \text{const}_2 \quad .$$

Für irgend zwei abbildende Strahlen gilt also:

$$\frac{\sin w_1 - \sin w_2}{\sin w_1' - \sin w_2'} = C \quad .$$

Hier müssen also die Differenzen der Sinus der Strahlnormalenwinkel ein konstantes Verhältnis haben.

Trifft ein vom einen Element normal ausgehender Lichtweg normal auf das zweite[3], so ist $\text{const}_2 = 0$ und

$$\frac{\sin w}{\sin w'} = C \quad .$$

Dieser Satz ist ebenfalls unabhängig von der Annahme zentrierter Systeme, von Kollineationen, ja des geradlinigen Strahlenverlaufs.

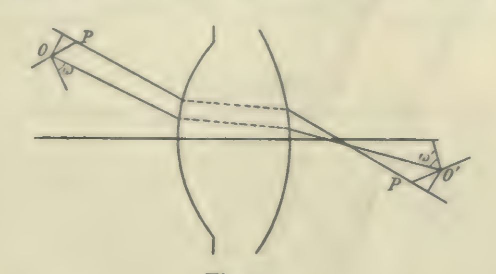
Er gilt aber z. B. in dem von uns untersuchten Falle zentrierter Systeme für die Abbildung von Linienelementen, die in einer Meridianebene, in endlicher

[1] H. BRUNS, Abh. K. Sächs. Ges. **21.** 374. 1895. Die Theorien der charakteristischen Funktion und des Eikonals s. auf p. 155 ff. — [2] R STRAUBEL, Phys. Zeitschr. **4.** 114. 1902. — [3] Es ist hervorzuheben, daß bei räumlicher Abbildung nach dem von BRUNS gegebenen Kosinussatze (s. o.) ein von einem Flächenelement normal ausgehender Lichtweg normal auf dem Bildelement steht. Es folgt daraus, daß bei Abbildung eines Flächenstücks durch beliebig weite Büschelöffnungen die Bildfläche die Wellenfläche eines Büschels ist, das auf der Objektseite die Objektfläche als Wellenfläche hatte, kurz: Wellenflächen werden in Wellenflächen abgebildet; oder auch für die zusammenhängenden Teile des Objekts ist die zur Abbildung benötigte Lichtzeit die gleiche, das ganze Objekt gelangt auf einmal zur Abbildung.

Die Schlüsse, die sich daraus ergeben, wenn man die Abbildung eines Raumstückes voraussetzt, in dem ja dann auch die Lichtzeit konstant sein muß, werden am Ende dieses Abschnitts angegeben.

Entfernung von der Achse, beliebig orientiert liegen; und folgt in diesem Falle leicht aus Betrachtungen, die den früher für die Meridianebene angestellten analog sind.

Seien O und O' zwei von der Achse endlich entfernte Punkte, die durch die ganze endliche Öffnung der Tangentialstrahlen auf einander abgebildet werden. $OP = dy$, $O'P' = dy'$ seien zwei ganz beliebige Elemente, die ebenfalls durch die ganze tangentiale Öffnung abgebildet werden sollen. Längs eines Strahles durch O als Objektachse und des konjugierten durch O' als Bildachse findet wieder eine ebene Kollineation statt. Wie oben läßt sich jeder Strahl durch P und der konjugierte als parachsialer Strahl einer solchen Abbildung auffassen; das Verhältnis, in dem der senkrechte Abstand eines parachsialen Strahles von O zu dem Abstande seines



Figur 37.
Der erweiterte Sinussatz.
Abbildung zweier beliebiger Linienelemente OP und $O'P'$ in der Meridianebene. Auf der rechten Seite der Figur ist statt P zu denken P'.

konjugierten von O' steht, ist aber wieder gleich der Lateralvergrößerung der Abbildung in den konjugierten Punkten O und O', $= \frac{d\eta'}{d\eta}$. Ist der Winkel zwischen der Normalen von dy mit der Abbildungsachse w, derselbe Winkel auf der Bildseite w', so ist

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{d\eta'}{d\eta} \frac{\cos w}{\cos w'} \quad .$$

Außerdem ist wieder

$$\frac{dy'}{d\eta} \cdot \frac{dw'}{dw} = \frac{n}{n'} \quad ,$$

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{n}{n'} \frac{\cos w \, dw}{\cos w' \, dw'} \quad .$$

Damit alle Strahlen durch P auch durch P' gehen, muß wie oben $dy' : dy$ von w unabhängig sein; hieraus folgen wieder die oben abgeleiteten Schlüsse.

Der Brunssche Kosinussatz führt hier noch weiter; er tritt in Geltung, sobald wir auch die Abbildung eines Flächenelements senkrecht zu der betrachteten Meridianebene voraussetzen. Aus ihm folgt für die ebenen in der Meridianebene verlaufenden Büschel, daß der Sinussatz sogar in seiner gewöhnlichen Form gilt, also

$$\frac{\sin w}{\sin w'} = \text{const.} \quad .$$

Die Herkunft des Sinussatzes wird am deutlichsten bei der Beweisführung mittels geometrischer Konstruktion. Ein solcher Beweis ist zuerst von Hockin[1] für achsensenkrechte Elemente in der Tangentialebene eines zentrierten Linsensystems gegeben worden. Wir beweisen durch ähnliche Betrachtungen den erweiterten Satz.

Sind $P_1 P_2$ und $P_1' P_2'$ die beiden auf einander abzubildenden Elemente (deren Längen dy und dy' seien), so ist die Lichtzeit $(P_1 P_1')$ und ebenso $(P_2 P_2')$ unabhängig von dem

[1] Ch. Hockin, Journ. Roy. Micr. Soc. (2) 4. 337. 1884. S. a. J. D. Everett, Phil. Mag. (6) 4. 170. 1902.

Winkel des ausfahrenden Strahles gegen die Normale des Elements; daher ist auch die Differenz $(P_1 P_1') - (P_2 P_2')$ von diesem Winkel unabhängig:

$$(P_1 P_1') - (P_2 P_2') = \text{const.} \quad .$$

Wir wenden diese Gleichung auf zwei unter dem Winkel w von P_1 und P_2 ausgehende, unter w' bei P_1' und P_2' einfallende Lichtwege an. Diese gehören aber zu einem schief zu den



Figur 38.
Geometrischer Beweis des erweiterten Sinussatzes.

Elementen verlaufenden Parallelstrahlenbüschel, von dem wir zwei Wellenflächen erhalten, wenn wir die Senkrechten $P_1 N$ und $P_1' N'$ fällen. Nun besteht Gleichheit der Lichtzeiten zwischen entsprechenden Punkten der Wellenflächen:

$$(P_1 P_1') = (N N') \quad .$$

Es ist aber auch

$$(P_2 P_2') = (P_2 N) + (N N') - (P_2' N') \quad ,$$

also folgt aus diesen drei Gleichungen:

$$(P_2 N) - (P_2' N') = \text{const.}$$

oder

$$d y \sin w - d y' \sin w' = \text{const.} \quad .$$

Für zwei unter den Winkeln w_1 und w_2 von dem ersten Element ausgehende Lichtwege gilt also:

$$\frac{\sin w_1 - \sin w_2}{\sin w_1' - \sin w_2'} = \frac{d y'}{d y} = \text{const.} \quad .$$

Zusammenhang mit der Energetik (Photometrie).

In der Lehre von der Energiestrahlung sind die Strahlen die Wege des Energiestromes. Wenn daher zwei Elemente auf einander abgebildet sind, so wird die von jedem Elemente ausgehende Energie das andere Element vollständig erreichen. Sind die Körper, denen die abgebildeten Flächenelemente angehören, an der ganzen übrigen Oberfläche mit vollkommenen Spiegeln belegt, so ist jede Strahlung von und nach anderen Richtungen und also jede Einwirkung von fremden Körpern und auf solche ausgeschlossen. Haben sich die Temperaturen der beiden Körper ausgeglichen, so darf in diesem abgeschlossenen System nach dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie keine Temperaturdifferenz mehr entstehen: Die von den beiden Körpern aufgenommenen Wärmemengen müssen gleich sein. Nehmen wir die beiden Flächenelemente als „vollkommen schwarz" an, so ist die durch ein jedes Element aufgenommene Wärmemenge gleich der darauf fallenden, und sehen wir von Reflexions- und Absorptionsverlusten innerhalb des optischen Systems ab, so ist sie gleich der von dem anderen Element ausgehenden Energiemenge.

Setzt man die Strahlung eines Elements $d q$ in einer Richtung, die mit der Normale den Winkel ϑ bildet, und den Raumwinkel $d \omega$ umfaßt

$$J \cdot d q \cdot \cos \vartheta \, d \omega$$

und beweist man, was auf energetischem Wege möglich ist (vgl. z. B. DRUDE, Lehrbuch der Optik, p. 456), daß J unabhängig von ϑ ist, so erhält man, wenn das Element auf der Achse eines zentrierten Systems und senkrecht dazu liegt, die gesamte Strahlung von $d q$ unter dem Winkel u zu

$$2 \pi \cdot J \cdot d q \int_0^u \sin \vartheta \cos \vartheta \, d \vartheta = J \cdot d q \cdot \pi \sin^2 u \quad .$$

Ist u' der konjugierte Winkel, so ist die gesamte Strahlung von $d q'$ unter diesem Winkel

$$J' \, d q' \, \pi \sin^2 u' \quad ,$$

und es ist

$$J \, d q \sin^2 u = J' \, d q' \sin^2 u' \quad .$$

Man kann ferner den KIRCHHOFFschen Satz beweisen, daß

$$J : J' = n^2 : n'^2$$ [1].

Daraus folgt der Sinussatz. Um den Schluß bündig zu machen, muß man aber die erwähnten Vorbeweise führen[2].

Übersichtlicher ist die umgekehrte Schlußweise, der Nachweis der KIRCHHOFFschen Gleichung aus dem Sinussatz; oder besser ohne den Umweg über das Integralgesetz, direkt aus der CLAUSIUSschen Gleichung:

$$n^2\, d\,q \cos\vartheta\, d\,\omega = n'^2\, d\,q' \cos\vartheta'\, d\,\omega' \quad .$$

Die Gleichheit der Strahlungen besagt:

$$J\, d\,q \cos\vartheta\, d\,\omega = J'\, d\,q' \cos\vartheta'\, d\,\omega' \quad .$$

Folglich für jedes ϑ_1 bezw. ϑ':

$$J : J' = n^2 : n'^2$$

und für $n = n'$:

$$J = J' \quad ,$$

also unabhängig vom Winkel ϑ.

Gleichheit der von $d\,q$ und $d\,q'$ ausgehenden Strahlungen erhält man natürlich auch, wenn man $d\,q'$ nicht als Oberflächenelement eines strahlenden Körpers betrachtet, sondern nur als Bild von $d\,q$, dessen gedachte Strahlung die wirklich von $d\,q$ ausgehende ersetzen kann. Dies ist der Gang unserer Betrachtungen im VII. Kapitel. Dann liegt aber der erste Hauptsatz zu Grunde.

Auch gilt die Gleichung $J : J' = n^2 : n'^2$ nicht bloß, wenn die Elemente auf einander punktweise abgebildet sind. Sie erfordert nur, daß alle Energie von $d\,q$ auf $d\,q'$ übergeht; daß alle Strahlen von $d\,q$ (ohne Verluste) durch $d\,q'$ gehen. Diese allgemeinere Beziehung ist zuerst (von KIRCHHOFF), sodann der besondere Fall der Abbildung (von CLAUSIUS) behandelt worden. Wir werden die Geltung jener Gleichung auch im allgemeineren Falle erweisen.

Nach ABBE gebrauchen (und beschränken) wir die Bezeichnung „**Aplanatismus**" für die Eigenschaft von Punktepaaren, neben der Bedingung der Strahlenvereinigung auch noch der obigen des konstanten Sinusverhältnisses zu genügen. In diesem Sinne bleiben die früher (p. 66) sogen. aplanatischen Punktepaare der Kugel, nämlich die im Scheitel, die im Mittelpunkt koinzidierenden und die von letzterem in den Entfernungen $c = \frac{n}{n'}\,r$ und $c' = \frac{n'}{n}\,r$ gelegenen als solche bestehen, während z. B. die Brennpunkte des Ellipsoids, sowie der des Paraboloids und der unendlich ferne (für reflektierte Strahlen) diese Eigenschaft nicht besitzen.

Liegt der Objekt- oder Bildpunkt in unendlicher Entfernung, so wird die Bedingung des Aplanatismus oder der Erzeugung kleiner Bilder, wenn die sphärische Aberration in der Achse aufgehoben ist:

$$(4\,\mathrm{a}) \qquad \frac{h}{\sin u'} = \text{const.} = f_0' \quad \text{bezw.} \quad \frac{h'}{\sin u} = \text{const.} = f_0 \quad ,$$

wenn h und h' die Einfallshöhen von Strahlen bedeuten, welche parallel zur Achse einfallen bezw. austreten, u' und u die Neigungswinkel der ihnen konjugierten Strahlen, f_0 und f_0' die Brennweiten der parachsialen Strahlen. Wie man leicht erkennt, ist dann die Brennweite der Partialbüschel im Meridianschnitt $f_t = \frac{d\,h'}{d\,u} = f_0 \cdot \cos u$, also variabel mit u, während dieselbe im Sagittalschnitt $f_s = f_0 = \text{const.}$ ist.

Der erweiterte für ebene Büschel gültige Sinussatz ergibt, wenn Objekt oder Bild im Unendlichen liegen, die Beziehung

[1] G. KIRCHHOFF, POGG. Ann. **109**. 275. 1860; Untersuchungen über das Sonnenspektrum. Berlin 1862; OSTWALDs Klass. Nr. 100. p. 33. — [2] Vgl. STRAUBEL, l. c.

$$\frac{h_1 - h_2}{\sin w_1' - \sin w_2'} = \text{const.}$$

oder

$$\frac{\sin w_1 - \sin w_2}{h_1' - h_2'} = \text{const.} \quad ,$$

wobei $h_1 - h_2$ und $h_1' - h_2'$ den senkrechten Abstand zweier paralleler Strahlen auf der Objekt- und Bildseite bedeuten, die übrigen Zeichen wie oben gebraucht sind.

In einem teleskopischen System lautet der Sinussatz für die unendlich entfernten Punkte auf der Achse

$$\frac{h}{h'} = \text{const.} \quad ,$$

der erweiterte für die ebenen Büschel

$$\frac{h_1 - h_2}{h_1' - h_2'} = \text{const.} \quad .$$

Die genaue Erfüllung der Sinusbedingung ist natürlich desto kritischer, je größer der Winkel U oder U' und damit der Spielraum der überhaupt möglichen Abweichungen des Sinusverhältnisses von der Konstanz ist. Bei Mikroskopobjektiven größerer Apertur können diese Abweichungen bis zu 50% und selbst mehr des Normalwertes gehen. Um ebensoviel variiert dann die Vergrößerung durch die betreffenden Zonen des Objektivs. Unter solchen Umständen ist aber das brauchbare Sehfeld fast gleich Null, die Zerstreuungskreise eines Punktes außer der Achse bei gleichzeitiger Abbildung durch auseinanderliegende Teile der Öffnung werden von gleicher Größenordnung wie seine Entfernung von der Achse, d. h. wie die Bildgröße selbst.

Abbe hat (l. c., p. 310) ein frappantes experimentelles Kriterium für die Konstanz des Sinusverhältnisses angegeben. Mittels desselben konnte er feststellen, daß in allen in Gebrauch befindlichen Mikroskopsystemen größerer Öffnung, woher sie auch stammen mochten, diese Bedingung sehr nahe erfüllt war, trotzdem sie damals den Optikern noch durchaus unbekannt war und diese sämtlich ihre Systeme nur durch Tatonnement, — empirisch unter Kontrolle des Auges — und nicht nach bewußten Regeln konstruierten. So unerläßlich ist ihre Erfüllung für eine befriedigende Wirkung in solchen Fällen.

Die Erfüllung der Sinusbedingung verbürgt nur die Abbildung eines Paares von Flächenelementen. Ihre Erfüllung führt nicht die Abbildung ausgedehnterer Flächen herbei, wenn die Öffnungswinkel der abbildenden Büschel groß sind.

In Systemen geringerer Öffnung kann das brauchbare Bildfeld entsprechend größer sein.

Die Unmöglichkeit des Aplanatismus an zwei benachbarten Achsenpunkten.

Es ist andererseits unmöglich, daß ein System für zwei benachbarte Stellen der Achse zugleich aplanatisch sei. Hierzu müßte ja zunächst die sphärische Aberration für zwei solche Punktepaare aufgehoben sein, und diese Anforderung führt bereits auf eine Bedingung, welche der des Aplanatismus für eine Stelle der Achse widerspricht[1].

[1] E. Abbe, Sitzber. d. Jen. Ges. d. Wiss. und Carl's Rep. f. exp. Physik **16**. 306. 1881; Geometrischer Beweis von Hockin, l. c. p. 339.

Man erhält sie nach ABBE leicht durch ähnliche Betrachtungen, wie diejenigen, die auf den Sinussatz in der Tangentialebene geführt haben.

Bezeichnet man in Figur 35 $O_1 O$ und $O_1' O'$ mit dx und dx', so ist dort:

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{dx'}{dx} \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} \quad .$$

Sollen O und O_1 beide aberrationsfrei abgebildet sein, so ist $\frac{dx'}{dx}$ unabhängig von u, gleich dem Werte der Tiefenvergrößerung für Parachsialstrahlen; also nach Formel (Ia*) p. 47:

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{n'}{n} \beta_0^2 \quad ,$$

wenn β_0 die Lateralvergrößerung für Parachsialstrahlen bedeutet. Also

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{n'}{n} \beta_0^2 \frac{\sin u'}{\sin u} \frac{\cos u}{\cos u'} \quad .$$

Andererseits gilt die oben stets benutzte Gleichung:

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{n}{n'} \frac{du}{du'} \frac{\cos u}{\cos u'} \quad ;$$

durch Vergleich folgt:

$$\frac{du}{du'} = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \beta_0^2 \frac{\sin u'}{\sin u} \quad ,$$

$$d(\cos u) = \left(\frac{n'}{n} \beta_0\right)^2 d(\cos u') \quad .$$

Da die Integrationskonstante bestimmt ist durch das gleichzeitige Verschwinden von u und u', so folgt:

$$(1 - \cos u) = \left(\frac{n'}{n} \beta_0\right)^2 (1 - \cos u') \quad ,$$

$$\frac{\sin \frac{u}{2}}{\sin \frac{u'}{2}} = \frac{n'}{n} \beta_0 \quad , \tag{5}$$

es müßten dann also die Sinus der halben Achsenwinkel in konstantem Verhältnis stehen, was im Widerspruch zu der Bedingung des Aplanatismus (4) steht.

Der Satz ist übrigens ein Spezialfall des STRAUBELschen „erweiterten Sinussatzes“, wenn dieser auf dx und dx' als abzubildende Elemente angewandt wird. Auch gilt er nicht nur für die Achse, sondern für jeden beliebigen in der Tangentialebene verlaufenden Strahl; ja es, besteht unabhängig von allen besonderen Annahmen der Satz:

Werden zwei benachbarte Punkte durch Büschel von ebenem Öffnungswinkel abgebildet wobei die gemeinsame Ebene der Objekt-Punkte und -Büschel nicht mit der Ebene der Bildpunkte und -Büschel zusammenzufallen braucht, so bilden die Sinus der halben Winkel konjugierter Strahlen gegen die Verbindungslinie der beiden Objekt- bezw. Bildpunkte ein konstantes Verhältnis. Denn dann gilt für die Entfernungen der Punkte dx und dx' und die Winkel der Strahlen gegen die Normalen auf diesen Elementen w und w' der erweiterte Sinussatz. Weil aber für $w = \frac{\pi}{2}$ auch $w' = \frac{\pi}{2}$ sein muß, ist

$$(1 - \sin w) = \text{const.}\ (1 - \sin w')$$

und für die Winkel u und u' gegen dx und dx':

$$1 - \cos u = \text{const.}\,(1 - \cos u') \quad ,$$

$$\frac{\sin \frac{u}{2}}{\sin \frac{u'}{2}} = \text{const.} \quad .$$

Man kann nach den Gleichungen (2) bezw. (4) und (5) berechnen, welche Aberration in einem aplanatischen System — unabhängig von jeder weiteren Annahme über die Zusammensetzung und sonstigen Eigenschaften desselben — eintritt, wenn der Objektpunkt auf der Achse verschoben wird und andererseits, wie die Lateralvergrößerung eines für zwei benachbarte Achsenpunkte aberrationsfreien Systems in beiden Hauptschnitten nach dem Rande hin variiert.

Eine solche Untersuchung ergibt für den ersteren Fall, also für ein System, welches der Gleichung (4) genügt, daß, wenn der Objektpunkt auf der Achse im Sinne der Lichtbewegung verschoben wird, dann in dem konjugierten Bildpunkte stets sphärische Überkorrektion eintritt, wofern der Öffnungswinkel der abbildenden Büschel auf der Objektseite der größere ist — und umgekehrt. Bezeichnet nämlich dx_0' die Verschiebung des Bildpunktes, die der Verschiebung dx des Objektpunktes für parachsiale Strahlen entspricht, dx' dieselbe Verschiebung für Strahlen der Neigung u zur Achse, so ist wieder wie oben (Figur 35):

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{dx'}{dx}\,\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} \quad .$$

Hier ist aber $\frac{dy'}{dy} = \text{const.} = \beta_0$ und $\frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{n'}{n} = \beta_0$ nach Gleichung (4).

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{\sin u}{\sin u'} \cdot \frac{\cos u'}{\cos u} = \frac{n'}{n}\,\beta_0^2\,\frac{\cos u}{\cos u'} \quad ,$$

$$\frac{dx_0'}{dx} = \alpha = \frac{n'}{n}\,\beta_0^2 \quad ;$$

also

$$dx' = dx_0'\,\frac{\cos u'}{\cos u} \quad .$$

Für große u und kleine u' kann daher dx' ein Vielfaches von dx_0' werden und es ist bei Werten von $u > 57^0$ der Zerstreuungskreis der so eingetretenen Aberration am Orte des Bildes der parachsialen Strahlen sogar größer als der Zerstreuungskreis, welcher aus der bloßen Fokusdifferenz entspringt, wenn das Objekt im aplanatischen Objektpunkt verbleibt, das Bild aber in einer anderen als der konjugierten Ebene aufgefangen wird oder wenn das Objekt um dx verschoben und sein Bild in der ursprünglichen Ebene beobachtet wird.

Diese Erwägungen sind namentlich für die Theorie des Mikroskops von Belang, dessen stärkere Systeme infolge dieser Verhältnisse nur bei einer bestimmten Bildentfernung („Tubuslänge") gute Bilder geben.

Ferner folgt

$$\frac{dx' - dx_0'}{dx} = \frac{n'}{n}\,\beta_0^2\left(\frac{\cos u}{\cos u'} - 1\right) \quad .$$

Mittels

$$\frac{\cos u'}{\cos u} - 1 = \frac{\cos^2 u' - \cos^2 u}{\cos u\,(\cos u' + \cos u)} = \frac{\sin^2 u - \sin^2 u'}{\cos u\,(\cos u' + \cos u)}$$

$$= \frac{\sin^2 u'}{\cos u\,(\cos u' + \cos u)}\left[\left(\frac{n'}{n}\,\beta_0\right)^2 - 1\right]$$

folgt daraus

$$\frac{dx' - dx_0'}{dx} = \frac{n'}{n} \beta_0^2 \cdot \frac{\sin^2 u' \left(\frac{n'^2}{n^2} \beta_0^2 - 1\right)}{\cos u (\cos u' + \cos u)} .$$

In erster Annäherung gilt:

$$\frac{dx' - dx_0'}{dx} = \frac{1}{2} \frac{n'}{n} \beta_0^2 \left[\left(\frac{n'}{n} \beta_0\right)^2 - 1\right] u'^2 .$$

Dann wächst also die sphärische Aberration bei der Verschiebung um dx von einem aplanatischen Punkte aus mit der vierten Potenz der Vergrößerung.

In einem Systeme andererseits, das für zwei benachbarte Paare von Achsenpunkten aberrationsfrei ist, das also der Gleichung (5) genügt, wächst die Lateralvergrößerung eines zur Achse senkrechten Linienelements mit dem Neigungswinkel u des einfallenden Hauptstrahles im Sagittalschnitt nach der ebenfalls unschwer abzuleitenden Gleichung

$$\beta_s = \beta_0 \frac{\cos\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos\left(\frac{u'}{2}\right)}$$

und in der Einfallsebene, im Meridionalschnitt, nach der Gleichung

$$\beta_t = \beta_0 \frac{\cos\left(\frac{u'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{u}{2}\right)} \cdot \frac{\cos u}{\cos u'} .$$

Für den beim Mikroskop vorliegenden Fall, daß u' klein gegen u (β sehr groß) ist, wird annähernd

$$\beta_s = \beta_0 \cos\left(\frac{u}{2}\right) \quad ; \qquad \beta_t = \beta_0 \frac{\cos u}{\cos\left(\frac{u}{2}\right)}$$

und

$$\frac{\beta_s}{\beta_t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos u} + 1\right) .$$

Die Vergrößerung nimmt dann in beiden Hauptschnitten mit wachsendem u ab, jedoch in ungleichem Grade, so daß β_t im Verhältnis zu β_s immer kleiner wird. Einem Punkte der Objektebene, welcher in der seitlichen Entfernung dy von einem der aberrationsfreien Achsenpunkte sich befindet, entspricht in der Bildebene der parachsialen Strahlen eine Ellipse, deren Dimensionen bei endlicher Größe von u auch in endlichem Verhältnis zu den Dimensionen des von den parachsialen Strahlen entworfenen Bildes selbst ($dy' = \beta_0\, dy$) stehen. Die Halbmesser dieser Zerstreuungsellipse ϱ_s, ϱ_t stehen zu der Bildgröße z. B. für $u = 60^0$ in dem Verhältnis

$$\frac{\varrho_t}{dy'} = 0{,}42 \qquad \frac{\varrho_s}{dy'} = 0{,}13 .$$

Bei einem Öffnungswinkel von 0,1 hingegen (Fernrohre) ist die Differenz der Vergrößerungen auf dem Achsen- und Randstrahl nur 0,1 $^0/_0$.

Das Resultat dieser Betrachtungen gipfelt also darin, daß gänzlich unabhängig von der Zusammensetzung eines optischen Systems und kraft der allgemeinen Gesetze, denen jede mit den Mitteln der Dioptrik hervorgebrachte Strahlen-

änderung und somit auch Strahlenvereinigung unterworfen ist, mit beliebig weit geöffneten Büscheln, entweder nur ein zur Achse senkrechtes Flächenelement oder ein unendlich kleines Stück der Achse selbst in ein entsprechendes scharf abgebildet werden kann. Die eine Anforderung steht im Widerspruch mit der anderen, und beide stehen im Widerspruch mit den Bedingungen kollinearer Abbildung endlicher Räume bei endlichen Divergenzwinkeln. Denn für diese hatten wir gefunden (p. 46):

$$\frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} u'} = \frac{n' y'}{n y} = \text{const.}$$

Die Gleichung $\frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} u'} = \text{const.}$ läßt sich andererseits offenbar als die geometrisch notwendige Bedingung für die ähnliche, eine Hauptachse besitzende Abbildung auch nur zweier paralleler, achsensenkrechter endlicher Ebenen in zwei entsprechende unter endlichen Divergenzwinkeln nachweisen, und es läßt sich dann weiter zeigen, daß, wenn diese gegeben ist, mit Notwendigkeit die Abbildung des ganzen unendlichen Raumes in einen entsprechenden, nach den Gesetzen der Kollinearität folgt[1]. Mit den Mitteln der Dioptrik jedoch ist, wie wir eben gesehen haben, die scharfe Abbildung auch nur eines unendlichen kleinen, nach drei Dimensionen ausgedehnten Objektraumstückes unter großen Divergenzwinkeln eine Unmöglichkeit.

Ausgenommen ist der Fall $u = u'$. Dann ist nach der obigen Gleichung:

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{n'}$$

Dies trifft in den (positiven und negativen) Knotenpunkten zu. Dort ist in der Bezeichnungsweise und nach den Formeln von p. 47

$$\beta = \mp \frac{n}{n'} = \pm \alpha$$

Die Leistung des Instruments beschränkt sich also hier darauf, das abzubildende Raumelement um den Knotenpunkt im umgekehrten Verhältnis der Brechungsexponenten der beiden Räume zu vergrößern, oder, da meist beiderseits dasselbe Medium an das Instrument grenzt, das Raumelement in gleicher Größe abzubilden. Dieser bevorzugte Fall ist also gewöhnlich wertlos.

Außerdem kann $u = u'$ sein, indem

$$u = u' = 0$$

ist, was bei teleskopischer Abbildung eines unendlich fernen Punktes gilt. Dieser Fall ist ebenfalls für das vorliegende Problem (Abbildung eines Raumelements) ohne Bedeutung.

Hieraus folgt *a fortiori*, daß eine Abbildung eines endlichen Raumstücks in ein anderes nur in dem trivialen Falle $u = u'$ oder $\beta = -\frac{n}{n'}$ möglich ist, der durch den ebenen Spiegel verwirklicht wird. Einen sehr einfachen Beweis dieses Satzes werden wir später kennen lernen.

Es bleibt uns der andere Teil des hier vorliegenden Problems zu behandeln übrig, nämlich wie weit es möglich ist, die von selbst gegebenen Grenzen der Abbildung dahin zu erweitern, daß mittels enger (elementarer) Büschel endliche Flächen- oder Raumteile abgebildet werden.

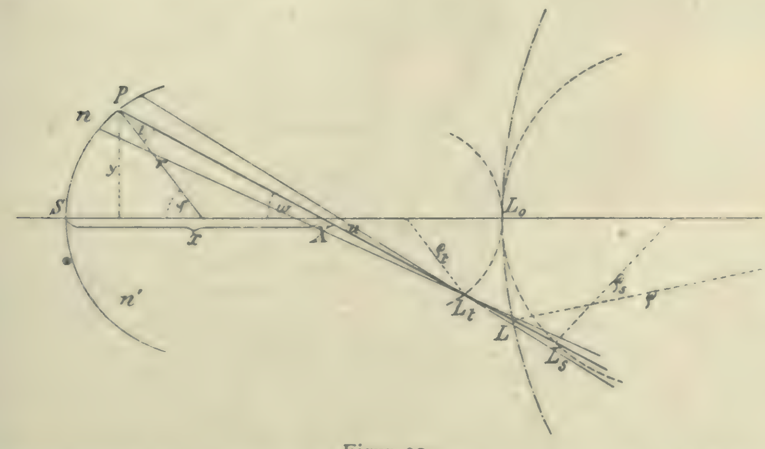
[1] Jeder Strahl ist durch die Durchschnittspunkte mit den beiden Ebenen festgelegt. Es ist leicht zu zeigen, daß alle Strahlen durch einen Punkt ihn wieder homozentrisch abbilden. Die Umkehrung dieses Satzes bei MAXWELL, vgl. S. 29.

III. Die Abbildung ausgedehnter Flächen durch unendlich enge Büschel.

In bezug auf diese fehlt es uns an Sätzen von gleicher Allgemeinheit wie die Sinusbedingung für den vorher betrachteten Fall einer ist. Wir können daher nicht viel mehr tun als die Bedingungen zu formulieren, die man an eine solche Abbildung stellen muß.

1. **Der Astigmatismus.** In erster Linie ist erforderlich, daß in den abbildenden Büscheln, wenn diese zunächst als unendlich dünne angenommen werden, der Astigmatismus gehoben sei. Andernfalls findet ja eine Abbildung, d. h. ein Entsprechen von Objekt- und Bildpunkten überhaupt nicht statt, sondern jedem Objektpunkte entsprechen zwei getrennte, zu einander und zur Büschelachse senkrechte Linien, deren Größe der Öffnung des nach dem Bilde zu konvergierenden Büschels und ihrer gegenseitigen Entfernung proportional ist.

Eine allgemein gültige Bedingung für die Aufhebung des Astigmatismus in Büscheln, die von den verschiedenen Punkten eines endlichen Objektes aus-



Figur 39.

Ein unendlich dünnes Büschel, das die brechende Fläche in P, die Achse in X schneidet, und dessen Brennlinien in L_t und L_s liegen. Die angedeuteten Rotationsflächen durch L_t und L_s sind die „meridionale“ und „sagittale“ Bildfläche, die sich bei der Betrachtung aller Elementarbüschel ergeben.

gehen, ist meines Wissens noch nicht mathematisch formuliert worden. Praktisch ist dieser Astigmatismus natürlich in allen Systemen größeren Sehfeldes (Okularen, Lupen, photographischen Objektiven) mehr oder minder gehoben — meist unwillkürlich, da die Kombination von Brechungen verschiedenen Charakters, wie sie zur Erfüllung irgend welcher anderer an das Linsensystem gestellter Anforderungen nötig und üblich ist, von selbst eine teilweise Kompensation auch dieses Fehlers mit sich bringt.

Nur für die Aufhebung des Astigmatismus in zur Achse des Systems sehr schwach geneigten Büscheln läßt sich eine (algebraische) Bedingungsgleichung herleiten.

Ein Büschel von dem halben Öffnungswinkel u falle gegen die Achse geneigt auf eine beliebige Fläche SP (Figur 39). Der Hauptstrahl treffe die Fläche in der Höhe y über der Achse, die Achse in der Entfernung $SX = x$ vom Scheitel und unter dem Winkel w. Die halbe lineare Öffnung des Büschels senkrecht zur Zeichnungsebene sei am Schnittpunkt mit der brechenden Fläche

$= h$, die Schnittweiten der sagittalen und tangentialen Büschel $= s$ bezw. t. Nach der Brechung seien die durch sie veränderten Größen wie früher durch oberen Index unterschieden. Wir wollen dann als Maß für die durch den Astigmatismus hervorgerufene Bildverschlechterung den Durchmesser des zwischen den beiden Bildlinien gelegenen Zerstreuungskreises nehmen. Dieser liegt von den beiden Bildlinien bei L_s und L_t in Entfernungen, die sich verhalten wie die entsprechenden Schnittweiten $PL_s = s$ und $PL_t = t$ selber (vgl. p. 24). Sein Radius r berechnet sich hiernach zu

$$\mathfrak{r} = h \cdot \frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{s}}{\frac{1}{t} + \frac{1}{s}} \quad .$$

Da bei geringer Neigung des Büschels zur Achse des Systems auch der Astigmatismus nur gering sein kann, wollen wir für $\frac{1}{t} + \frac{1}{s}$ den Wert $\frac{2}{s}$ setzen, so daß der Durchmesser des Zerstreuungskreises

$$2\,\mathfrak{r} = \mathfrak{d} = h \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right) s$$

wird.

Ist u der (unendlich kleine) halbe Öffnungswinkel des Büschels, also $u = \frac{h}{s}$, so wird durch Multiplikation mit $n\,u$ beiderseits

$$n\,u \cdot \mathfrak{d} = h^2\, n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right) \quad ,$$

daher die durch die Brechung an der einen (etwa der k ten) Fläche bewirkte Änderung

$$\Delta\,(n\,u \cdot \mathfrak{d}) = h^2\,\Delta\,n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right) \quad .$$

Bezeichnet wieder $(\mathfrak{d}_0)_k$ bezw. $(\delta_0)_k'$ den Durchmesser des Kreises im Objekt, dessen Bild gemäß den Fundamentalformeln nach Ort und Größe der tatsächliche Zerstreuungskreis vor bezw. nach der Brechung des Büschels an der betrachteten (k ten) Fläche des Systems ist, so haben wir wie früher (p. 114):

$$n_k'\,u_k'\,\mathfrak{d}_k' = n_1\,u_1\,(\mathfrak{d}_0)_k'$$

und

$$n_k\,u_k\,\mathfrak{d}_k = n_1\,u_1\,(\mathfrak{d}_0)_k \quad ,$$

also

(1) $$\Delta\,(\mathfrak{d}_0) = \frac{h^2}{n_1\,u_1}\,\Delta\,n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right) \quad .$$

Den rechter Hand stehenden zweiten Faktor fanden wir aber früher (p. 93) streng

$$\Delta\,n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right) = (n \sin i)^2\,\Delta \left(\frac{1}{n\,t}\right) \quad .$$

In der hier berücksichtigten Näherung kann auf der rechten Seite

$$\sin i = i = w - \varphi = y \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{r}\right)$$

und t kann gleich s gesetzt werden, wo unter s auch die Schnittweite SL_0 eines

von dem Achsenpunkte desselben ursprünglichen Objekts ausgehenden parachsialen Büschels verstanden werden darf. Wir erhalten demnach

$$(2) \qquad \Delta(\mathfrak{d}_0)_k = \frac{h_k^2}{n_1 u_1} y_k^2 \left[n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x} \right) \right]_k^2 \Delta \left(\frac{1}{n s} \right)_k$$

und wenn wir wie früher mit h_1^2 und y_1^2 erweitern und die Invariante der Brechung für die Achsenschnittpunkte des Hauptstrahles mit Q_x bezeichnen, also

$$Q_x = n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x} \right) = n' \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x'} \right) \quad ,$$

so wird schließlich

$$(2\,\mathrm{a}) \qquad \Delta(\mathfrak{d}_0)_k = \frac{h_1^2 y_1^2}{n_1 u_1} \left(\frac{h_k}{h_1} \right)^2 \left(\frac{y_k}{y_1} \right)^2 Q_x^2 \Delta \left(\frac{1}{n s} \right)_k \quad .$$

Hierin ist $\frac{y_k}{y_1}$ in ganz derselben Weise aus den $x_1 \ldots x_k'$ zu berechnen, wie $\frac{h_k}{h_1}$ aus den $s_1 \ldots s_k'$ (p. 115).

Bei unendlich entfernten Objekten und $n_1 = 1$ ist der angulare Wert des auf das Objekt bezogenen Zerstreuungskreises

$$(2\,\mathrm{b}) \qquad \Delta(\delta_0)_k = h_1 y_1^2 \left(\frac{h_k}{h_1} \right)^2 \left(\frac{y_k}{y_1} \right)^2 Q_x^2 \Delta \left(\frac{1}{n s} \right)_k$$

und

$$\sum_{k=1}^{k=p} \Delta(\mathfrak{d}_0)_k = 0 \quad \text{bezw.} \quad \sum_{k=1}^{k=p} \Delta(\delta_0)_k = 0$$

wird die Bedingung für die Beseitigung des Astigmatismus in einem aus p Flächen bestehenden optischen System.

Ist der Astigmatismus nicht nur für die der Achse nahen Teile des Objekts, sondern für dessen ganze Ausdehnung gehoben, so ist damit eine Abbildung desselben innerhalb der hier gewählten Beschränkung (nämlich auf enge Büschel) erreicht. Doch pflegt man an diese Abbildung noch zwei weitere Forderungen zu stellen, die je nach dem Zwecke des Instruments verschieden stark betont werden.

Man wünscht nämlich meist noch

2. daß einem ebenen Objekt ein ebenes Bild entspreche und
3. daß das Bild in allen seinen Teilen dem Objekt ähnlich sei.

2. **Die Wölbung des Bildes.** Bedingungen der (annähernden) Bildebenung. Das durch die Brechung unendlich dünner Büschel in einem beliebigen optischen System hervorgebrachte Bild einer endlichen Ebene kann eine irgendwie gestaltete Rotationsfläche sein mit gleicher Achse wie das System selbst, und zwar entspricht, wenn der Astigmatismus in den wirksamen Büscheln nicht aufgehoben ist, den sagittalen und den tangentialen ebenen Partialbüscheln je eine besondere Bildfläche. Im Scheitel berühren beide Flächen einander und die Ebene des idealen Bildes. Von den Krümmungen, welche die Bildflächen in diesem Scheitel besitzen, läßt sich eine einfache Beziehung nachweisen.

Ein gegebenes System entwerfe von einer zur Achse senkrechten Ebene im Objektraume ein Bild, dessen Krümmungsradius im Scheitel $= \varrho_0'$ sei. Analog sei ϱ_0 der Krümmungsradius der Objektfläche, deren an der gleichen Stelle der Achse von demselben System entworfenes Bild eine Ebene ist, d. h. wenigstens im Scheitel die Krümmung Null hat. ϱ und ϱ' seien die Krümmungsradien eines beliebigen anderen Paares konjugierter Flächen, deren Scheitel an den gleichen Stellen der Achse liegen. Dann gilt

$$(3) \qquad \Delta\left(\frac{1}{n\varrho}\right) = \frac{1}{n'\varrho'} - \frac{1}{n\varrho} = \frac{1}{n'\varrho_0'} = -\frac{1}{n\varrho_0} \quad ,$$

wenn n und n' die Brechungsindizes des Objekt- und Bildraumes sind.

Der Beweis ergibt sich daraus, daß der Abstand einer Objekt- oder Bildfläche von der sie berührenden Ebene an irgend einer Stelle bis auf Glieder, die von den vierten und höheren Potenzen dieses Abstandes abhängen, gleich ist dem halben Quadrate der Entfernung dieser Stelle von der Achse, dividiert durch den Krümmungsradius der betreffenden Fläche. Andererseits sind die der Achse parallelen Tangentialabstände zusammengehöriger Flächenpaare dioptrisch einander konjugiert gemäß der Formel für die Tiefenvergrößerung $\alpha = \frac{n'}{n}\beta^2$, worin α das Verhältnis der eben genannten Achsenentfernungen ist.

Es ist somit die Größe $\pm\frac{1}{n\varrho_0}$ oder $\mp\frac{1}{n'\varrho_0'}$ das richtige Maß für das, was man „Bildkrümmungsvermögen“ eines Systems in bezug auf zwei konjugierte Achsenpunkte nennen könnte.

Jede Ebene, also auch diejenige, welche die Bildflächen im Scheitel berührt, schneidet aus den abbildenden unendlich dünnen Strahlenbüscheln, wie wir früher gesehen haben, Ellipsen heraus, deren Achsen aber bei geringen Neigungswinkeln der Büschel als gleich groß angesehen werden können. Wenn man das Bild auf jener Ebene auffinge, so würden diese Schnitte die Zerstreuungskreise sein, als welche infolge der Bildkrümmung die Bilder außerachsialer Punkte in ihr erscheinen. Eine einfache Betrachtung zeigt, daß die Zunahmen, welche der Durchmesser dieser Zerstreuungskreise bei einer Brechung erfährt, wenn man sie wie früher (p. 114) auf die Objektseite zurückbezieht, einerseits proportional sind dem Bildkrümmungsvermögen und außerdem proportional der numerischen Apertur und dem Quadrate des abgebildeten Objekthalbmessers Y_1 des einfallenden Büschels. Nämlich

$$(4) \qquad \Delta(\sigma_0)_k = n_1 u_1 Y_1^2 \Delta\left(\frac{1}{n\varrho_0}\right)_k = -n_1 u_1 Y_1^2 \Delta\left(\frac{1}{n'\varrho_0'}\right)_k \quad ,$$

wenn u_1 die halbe angulare Öffnung des einfallenden Büschels ist.

Was nun endlich den Wert dieses Bildkrümmungsvermögens anbetrifft, so hängt derselbe von den Elementen des Linsensystems in folgender Weise ab (vgl. Figur 39).

Wenn der Radius der brechenden Fläche, wie früher mit r, die Indizes der an sie grenzenden Medien mit n und n' bezeichnet werden, wenn ferner die Achsen der einfallenden Büschel die Achse des Systems in der Entfernung x vom Scheitel schneiden, die der gebrochenen in der Entfernung x', welche letztere mit x natürlich in der Beziehung steht, daß

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x_0}\right) = Q_x = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x_0'}\right) \quad ,$$

wenn endlich der Scheitel der Objektfläche von dem der brechenden um s_0, der der Bildfläche von derselben um s_0' entfernt ist, wobei wieder

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0}\right) = Q_s = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s_0'}\right) \quad ,$$

so ist die durch die betreffende Brechung bewirkte Krümmungszunahme für die im Äquatorialschnitt gelegenen Strahlen

$$(5) \qquad \Delta\left(\frac{1}{n\varrho_s}\right) = \frac{1}{r}\Delta\left(\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{Q_x}{Q_x - Q_s}\right)^2 \Delta\left(\frac{1}{n s_0}\right) \quad ;$$

für die im Meridianschnitt gelegenen

$$\Delta\left(\frac{1}{n\varrho_t}\right) = \frac{1}{r}\,\Delta\left(\frac{1}{n}\right) - 3\left(\frac{Q_x}{Q_x - Q_s}\right)^2 \Delta\left(\frac{1}{n s_0}\right) \quad . \tag{6}$$

Die Bildkrümmung hängt also außer von den die Brechung selbst bedingenden Elementen n, n', r, s noch wesentlich mit von der Lage des Punktes ab, in welchem sich die Hauptstrahlen der abbildenden Büschel kreuzen.

Zur Ableitung dieser Gleichungen kann man ebenso verfahren, wie wir oben bei der Betrachtung der sphärischen Aberration (p. 110 ff.) ausführlich auseinandergesetzt haben. Man entwickelt die Werte der beiden Abschnitte, in die ein Hauptstrahl durch die Achse des Systems geteilt wird, nach Potenzen der Kugelöffnung φ und zerlegt dann die Ausdrücke für die Invarianten der Brechung schiefer sagittaler bezw. tangentialer Büschel, nämlich

$$\mathfrak{Q}_s = \frac{n}{s} - \frac{n\cos i}{r} = \frac{n'}{s'} - \frac{n'\cos i'}{r} \qquad \text{(p. 89)}$$

und

$$\mathfrak{Q}_t = \frac{n\cos^2 i}{t} - \frac{n\cos i}{r} = \frac{n'\cos^2 i'}{t'} - \frac{n'\cos i'}{r} \qquad \text{(p. 91)}$$

in den konstanten und den von φ^2 abhängigen Teil unter steter Vernachlässigung aller von noch höheren Potenzen von φ abhängigen Glieder. Die Gleichsetzung der Faktoren von φ^2 führt nach einigen Reduktionen auf die obigen Gleichungen, die zuerst von ZINKEN, gen. SOMMER[1], auf anderem Wege gefunden wurden.

Der Vergleich der Formeln (5) und (6) — die gemäß dem oben angeführten mit (4) zu kombinieren sind — mit denjenigen, welche die durch die sphärische Aberration in der Achse hervorgerufene Verundeutlichung des Objekts angeben, zeigt den nahen Zusammenhang beider Größen. (Die p. 114 ff. mit Q_k bezeichnete Größe ist der Wert, den die hier mit Q_s bezeichnete an der $k$ten Fläche hat.)

Die Bedingung dafür, daß ein System zentrierter brechender Flächen von einem in gegebener Lage befindlichen ebenen Objekt mittels Strahlenbüscheln beider Art, deren Achsen sich an gegebener Stelle kreuzen, in erster Näherung, d. h. im Scheitel, nur ein einziges, d. h. anastigmatisches Bild entwerfe, wird gegeben durch:

$$\sum\left[\Delta\left(\frac{1}{n\varrho_s}\right) - \Delta\left(\frac{1}{n\varrho_t}\right)\right] = 0$$

oder

$$\sum\left(\frac{Q_x}{Q_x - Q_s}\right)^2 \Delta\frac{1}{n s} = 0 \quad . \tag{6a}$$

Soll das Bild außerdem eben sein, so wird erfordert

$$\sum\frac{1}{r}\,\Delta\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \quad ; \tag{5a}$$

wo die Summation über alle brechenden Flächen zu erstrecken ist. Dies ist die berühmte PETZVALsche[2] Gleichung. Man kann nach A. KÖNIG und M. v. ROHR

---

[1] H. ZINKEN, genannt SOMMER, Unters. über die Dioptrik der Linsensysteme. Braunschweig 1870. p. 51 ff., vgl. auch POGG. Ann. **122.** 563. 1864. — [2] J. PETZVAL, Bericht über die Ergebnisse einiger dioptrischer Untersuchungen. Pest 1843. p. 27; Bericht über optische Untersuchungen. Sitzber. Wien. Akad. d. Wiss. **24.** 97. 1857. Über die Nichtigkeit der gegen PETZVALS Darstellung erhobenen Einwände vgl. M. v. ROHR, Theorie und Geschichte des photogr. Objektivs, Berlin 1899, p. 270, wo nachgewiesen wird, daß PETZVAL, der die Gleichung 5a allein als Bedingung eines im Scheitel ebenen Bildes hinstellte, unter dem „Bilde" stets ein solches verstanden hat, in dem der Astigmatismus bereits gehoben ist.

zeigen, daß (6a) mit der früher (Formel 2a, S. 139) gefundenen Bedingung für das Verschwinden des Astigmatismus zusammenfällt.

Der auf das Objekt zurückbezogene astigmatische Zerstreuungskreis wird nämlich nach (4) und (6):

$$2\, n_1\, u_1\, Y_1^2 \sum \left(\frac{Q_x}{Q_x - Q_s}\right)^2 \Delta \frac{1}{n\, s} \quad .$$

Nun gilt für die $k$te Fläche:

$$Q_{kx} - Q_{ks} = n_k \left(\frac{1}{s_k} - \frac{1}{x_k}\right) = \frac{n_k}{s_k\, x_k}(x_k - s_k)$$

$$= \frac{n'_{k-1}}{s_k\, x_k}(x'_{k-1} - s'_{k-1}) \frac{s'_{k-1}\, x'_{k-1}}{s'_{k-1}\, x'_{k-1}} = n'_{k-1}\left(\frac{1}{s'_{k-1}} - \frac{1}{x'_{k-1}}\right) \frac{h_{k-1}}{h_k}\, \frac{y_{k-1}}{y_k}$$

$$= \frac{h_1}{h_k}\, \frac{y_1}{y_k}\, n_1' \left(\frac{1}{s_1'} - \frac{1}{x_1'}\right) = \frac{h_1}{h_k}\, \frac{y_1}{y_k} (Q_{1x} - Q_{1s}) \quad .$$

Daher wird der Zerstreuungskreis:

$$\frac{2\, n_1\, u_1\, Y_1^2}{(Q_{1x} - Q_{1s})^2} \sum \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^2 \left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2 Q_x^2\, \Delta \frac{1}{n\, s} = \frac{2\, n_1\, u_1\, Y_1^2}{(Q_{1x} - Q_{1s})^2} \cdot A$$

$$= \frac{2\, u_1\, Y_1^2\, s_1^2\, x_1^2}{n_1 (x_1 - s_1)^2} A = \frac{2\, u_1\, y_1^2}{n_1\, x_1^2} s_1^2\, x_1^2\, A = \frac{2\, h_1^2\, y_1^2}{n_1\, u_1} A \quad . \text{ q. e. d.}$$

Bei einem System in Kontakt befindlicher Linsen von kleiner, zu vernachlässigender Dicke (vgl. p. 118), in deren gemeinsamem Scheitel sich die Hauptstrahlen der wirksamen Büschel kreuzen — wie ein solches in erster Näherung durch das Objektiv eines astronomischen Fernrohres repräsentiert wird — werden alle $x = 0$, der Ausdruck $\frac{Q_x}{Q_x - Q_s} = 1$, demnach die Bedingungen der Ebenheit

$$(5^*) \qquad \sum \frac{1}{r} \Delta \left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

und

$$(6^*) \qquad \sum \Delta \left(\frac{1}{n\, s}\right) = 0 \quad .$$

Der Ausdruck $\Delta \left(\frac{1}{n\, s}\right)$ läßt sich nach p. 70 transformieren in

$$\Delta \left(\frac{1}{n\, s}\right) = \frac{1}{r} \Delta \left(\frac{1}{n}\right) - Q_s\, \Delta \left(\frac{1}{n^2}\right) \quad ;$$

Gleichung (6*) geht daher in Verbindung mit (5*) über in

$$(6^*) \qquad \sum Q_s\, \Delta \left(\frac{1}{n^2}\right) = 0 \quad .$$

Denkt man sich, wie p. 118, die Linsen alle in Luft befindlich und werden die Reziproken ihrer Brennweiten wieder mit φ, die Brechungsindizes der Linsensubstanzen mit n bezeichnet, so lassen sich die Gleichungen (5*) und (6*) weiter transformieren in

$$(5^{**}) \qquad \sum \left(\frac{1}{n} \varphi\right) = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum \left(1 + \frac{1}{n}\right) \varphi = 0 \quad ,$$

welche letztere in Verbindung mit (5**) schließlich in

$$\sum \varphi = \Phi = 0$$

übergeht (wo Φ die Gesamtstärke des Systems bezeichnet).

Die letztere zeigt, daß unter den angenommenen Verhältnissen die Ebenung des Bildes sich nur bei einem, wie eine Planparallelplatte wirkenden System von der Brennweite ∼ erreichen läßt.

Der Betrag der Krümmung des von den Sagittalschalen herrührenden Bildes eines ebenen Objekts ist bei einem solchen System in Kontakt befindlicher dünner Linsen

$$(7)\qquad \varrho_s' = \sum \varDelta(\varrho_s') = -\sum \frac{n+1}{n}\,\frac{1}{f} = -\sum \frac{n+1}{n}\,\varphi \quad ,$$

in dem von den Tangentialstrahlen herrührenden Bilde

$$(8)\qquad \varrho_t' = \sum \varDelta(\varrho_t') = -\sum \frac{3n+1}{n}\,\frac{1}{f} = -\sum \frac{3n+1}{n}\,\varphi \quad ,$$

also beide unabhängig vom Orte des Objekts und Bildes.

3. Die **Verzeichnung** (Distortion) des Bildes betrachten wir an einer späteren Stelle (im Kapitel über die Strahlenbegrenzung).

IV. Die Abbildung ausgedehnter Objekte durch Büschel endlicher Öffnung.

Wir haben bisher das eine Mal diejenige Erweiterung der Abbildungsgrenzen betrachtet, welche durch Zusammenfügen der Partialabbildungen mehrerer von demselben Punkte der Achse ausgehender und wieder nach einem Punkte der Achse konvergierender Elementarbüschel erreichbar ist. Die andere entsprechende Aufgabe war die, die Abbildungen solcher Elementarbüschel zusammenzusetzen, deren Hauptstrahlen sich zwar ebenfalls vor und nach der Brechung durch das System in einem Punkte seiner Achse schneiden, deren Spitzen aber auf einer von diesen Kreuzungspunkten um einen beliebigen endlichen Abstand entfernten Fläche liegen. Im ersteren Falle handelte es sich darum, die Abbildung eines — im Grenzfalle unendlich kleinen — Flächenelements durch beliebig weit geöffnete Büschel herbeizuführen; im zweiten Falle wurden die Bedingungen gesucht, unter welchen die Abbildung eines endlichen Flächenstücks möglich ist, hier aber durch Büschel, die — in thesi — ihrerseits unendlich eng sind.

Dem praktischen Bedürfnis bei der Konstruktion optischer Instrumente würde nun durch eine an sich noch so vollständige Lösung weder des einen noch des anderen Problems genügt werden. In der Wirklichkeit könnte man natürlich weder mit den — durch noch so weite Büschel vermittelten — Bildern von wirklichen Flächenelementen etwas anfangen, noch mit Bildern, die beliebig ausgedehnt, aber durch unendlich enge Strahlenbüschel hervorgebracht wären. Es handelt sich hier vielmehr immer darum, Bilder endlicher Objekte durch Büschel endlicher Öffnung zu erzielen, und nur der Nachdruck, der auf den einen oder andern dieser beiden Faktoren gelegt wird, variiert innerhalb sehr weiter Grenzen von Fall zu Fall, je nach dem Zwecke und Charakter des Instruments von den Mikroskopobjektiven hoher Apertur auf der einen Seite durch die photographischen und Fernrohrobjektive hindurch bis zu den Lupen und Okularen auf der anderen Seite.

Hier finden nun von vornherein zunächst ähnliche Betrachtungen Anwendung wie die, mit welchen wir am Eingange dieses Abschnitts (p. 105 ff.) die von selbst stattfindende Erweiterung der Abbildungsgrenzen nach beiden in Betracht kommenden Richtungen hin erläutert haben. Von selbst wird infolge der dort aufgeführten beiden Momente — physiologische Unempfindlichkeit des beobach-

tenden Auges gegen mangelhafte Bildschärfe und Wellennatur des Lichtes — die genügend scharf abgebildete Fläche stets eine, wenn auch kleine, so doch endliche Ausdehnung haben, falls die Sinusbedingung erfüllt ist, und ohne weiteres wird man die Öffnung der eine größere Fläche abbildenden Büschel, wenn auch sehr eng, so doch endlich wählen dürfen, wenn die Bedingungen für die Abbildung derselben Fläche durch unendlich enge Büschel erfüllt sind; von selbst endlich wird man im letzteren Falle auch noch die jener ursprünglichen Fläche auf der Achse benachbarten hinreichend scharf abgebildet finden.

Um noch weiter zu gehen, um die Abbildung etwas größerer Flächen durch relativ weite Büschel zu erzielen — wie sie z. B. Zweck und Aufgabe mehrerer zur Photographie dienender Systeme ist — ist man wieder fast ganz auf den Weg empirischen Suchens der hierzu geeigneten Linsenkombinationen angewiesen, sei es, daß dieses auf dem Papiere, durch trigonometrische Verfolgung der wirksamen Strahlengruppen, sei es, daß es experimentell, durch systematische Beobachtung des Endeffekts geschieht, den wirklich ausgeführte Versuchslinsen verschiedener Konstruktion ergeben. Nur noch einen Schritt weiter hat die mathematische Theorie auf diesem Wege geführt.

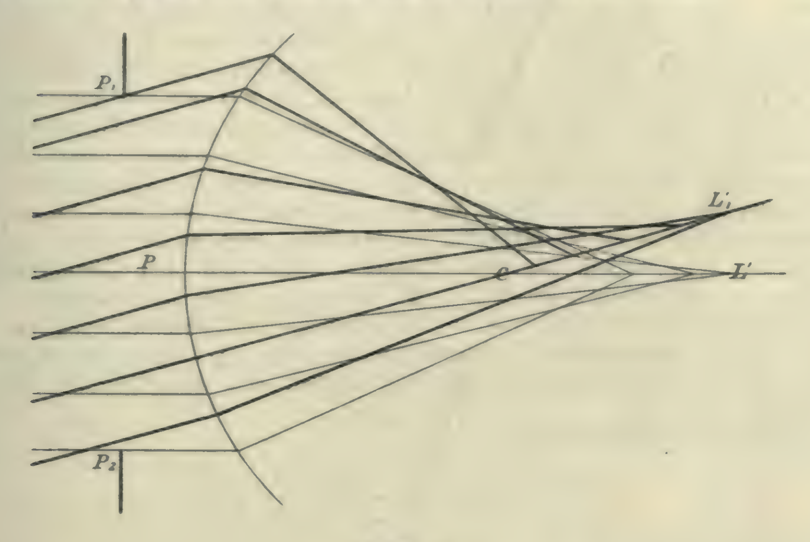
Die Unsymmetrie in tangentialen schiefen Büscheln (Die Koma).

Vergegenwärtigt man sich nämlich die Hinweise, die aus den oben entwickelten Eigenschaften der Aberrationen bereits zu entnehmen sind, so ist folgendes einzusehen: wenn in einem, von einem Achsenpunkte aus divergierenden Büschel die dem Quadrat der Öffnung proportionale sphärische Aberration aufgehoben ist, so wird ein zur Achse schwach geneigt einfallendes Büschel im allgemeinen keinen gleich scharfen Bildpunkt ergeben. Es wird ein solches Büschel, wie früher bereits wiederholt hervorgehoben, zunächst astigmatisch sein, selbst wenn es unendlich eng ist. Wenn aber auch der Astigmatismus gemäß Formel (2), p. 139, aufgehoben wäre, so würde die Abbildung des ein wenig seitlich von der Achse gelegenen Punktes mittels eines Büschels von der Öffnung des achsialen doch eine unvollkommenere sein. Unterscheiden wir wieder die beiden Strahlengruppen, welche in der Einfallsebene des (die Achse kreuzenden) Hauptstrahles und senkrecht zu ihr verlaufen. Für die letzteren wird bei geringer Neigung des Hauptstrahles im allgemeinen die Strahlenvereinigung vergleichbar sein mit der des Achsenpunktes infolge der dort stattfindenden Symmetrie zur Meridianebene. Im ersten Hauptschnitt hingegen wird sich schon bei relativ geringer Neigung des Hauptstrahles eine Unsymmetrie des Büschels bemerklich machen, die der von vornherein niedrigeren Ordnung der Strahlenvereinigung in diesem Schnitte (vgl. p. 91) entspricht.

Sei, um dies näher zu erläutern, PL' (Figur 40) die Achse des optischen Systems. An irgend einer Stelle der Achse befinde sich die zu ihr konzentrische Blende $P_1 P_2$, die gemäß ihrer Lage und Größe die nötige Abblendung des einfallenden Büschels bewirkt. Ein Strahlenbüschel, welches von einem seitlichen Punkte des Objekts ausgehend diese Blende passiert, hat dann schon gegenüber der ersten und ebenso weiter gegenüber allen folgenden Flächen einen anderen Charakter als das der Achse parallele. Würde sein Hauptstrahl infolge der besonderen Lage der Blende zufällig den Krümmungspunkt C der ersten Fläche passieren, so würde es durch diese Fläche allerdings noch ganz ebenso modifiziert werden als das vorher betrachtete achsiale. Dies würde sich dann aber schon an der nächsten Fläche anders verhalten, wenn nicht etwa alle Flächen konzentrisch zur Blendenmitte sind[1]. Im allgemeinen wird das seitliche Büschel schon die erste Fläche so

[1] Bei den in der Anmerkung auf p. 70 genannten Konstruktionen findet also der im folgenden besprochene Bildfehler nicht statt.

treffen, daß sein Hauptstrahl, der die Blendenmitte passierende Strahl, nicht durch deren Zentrum geht. Ein durch dieses Zentrum gezogener Strahl des Büschels (dieses unbegrenzt gedacht) CL_1 (welcher unter Umständen dem wirklichen Büschel gar nicht angehört) markiert dann diejenige Achse, symmetrisch zu welcher — schematisch gesprochen — das einfallende seitliche Büschel die gleiche Ausdehnung haben dürfte wie das achsiale, wenn die Strahlenvereinigung in dem durch diese Fläche hervorgebrachten Bilde des seitlichen Punktes den gleichen Charakter haben sollte wie im Achsenpunkte. Tatsächlich fallen daher Strahlen ein, welche die Öffnung dieses ideellen Büschels nach der einen Seite jedenfalls überschreiten, Strahlen also, auf welche die Aberrationen an der betreffenden Fläche einseitigen und größeren Einfluß haben, als auf dieses.



Figur 40.
Die Entstehung der Koma.

Zwei Parallelstrahlenbüschel, die durch die Blende $P_1 P_2$ auf eine Kugel mit dem Mittelpunkt C auffallen. In beiden sind auf der Zentralen ($C L$ und $C L_1'$) die Aberrationen in gleicher Weise konstruiert. Das zur Achse $P C$ schiefe Büschel zeigt unsymmetrische und stärkere Aberrationen als das achsenparallele.

An jeder folgenden Fläche ist — je nach der Lage dieser Fläche, d. h. ihres Mittelpunktes zu der die Strahlen begrenzenden Blende — das Verhältnis der Öffnung des für diese Fläche konstruierbaren ideellen Büschels zu der des tatsächlich herausgeblendeten ein anderes; aber an allen Flächen sind diese Verhältnisse im allgemeinen von einander verschieden und an jeder wird daher das schiefe Büschel anders modifiziert als das achsiale.

Wir haben also das Resultat, daß das von einem seitlichen Objektpunkte ausgehende, durch irgend eine Blende beschränkte Büschel im ersten Hauptschnitt einen anderen Charakter hat, als bei gleicher Apertur das von dem achsialen Objektpunkte und auch als das von demselben seitlichen Punkte ausgegangene sagittale Büschel. Oder auch:

Die brechenden Flächen haben auf seine Konstitution nach der einen Seite seines Hauptstrahles hin anderen Einfluß, als nach der anderen Seite hin. Das Büschel wird also durch diese Brechungen unter schiefer Inzidenz innerhalb des ersten Hauptschnittes unsymmetrisch. Seine Konstitution wird im allgemeinen diejenige sein, welche man erhält, wenn man in einem endlichen Büschel allgemeiner Art (Figur 6, p. 21) durch einen der Achse parallelen Schnitt

einen Teil absondert. Der übrig gebliebene Teil kann die Achse selbst, d. h. die Spitze der Kaustik enthalten oder auch nicht; das hängt von den jeweiligen Verhältnissen ab. Im allgemeinen aber wird jedenfalls das durch meridionale Strahlen erzeugte Bild eines seitlichen Objektpunktes statt eines Punktes das Stück einer kaustischen Kurve sein.

Dieses Kurvenstück wird gebildet durch die ersten Bildpunkte der sukzessive auf einander folgenden Elementarbüschel, in welche man sich das größere Büschel zerlegt denken kann. Da es senkrecht zu der Bildlinie jener Elementarbüschel steht, so breitet es dieselbe in einen schweifartigen Zerstreuungsfleck aus, der von manchen Optikern „Koma" genannt wird. Wir haben nun früher (p. 90) die Orte der Bildpunkte dieser Elementarbüschel dadurch gefunden, daß wir die Gleichung $n \sin i = n' \sin i' = Q$, welche den Zusammenhang zwischen den Richtungen des einfallenden und des gebrochenen Strahles angibt, nach dem Zentriwinkel der brechenden Kugelfläche φ, variierten. Die Gleichsetzung der von $d\varphi$ unabhängigen Glieder in dem Ausdruck für $dQ/d\varphi$ vor und nach der Brechung ergab die, bis auf Größen von der Ordnung $d\varphi$ genauen Gleichungen (3), (3a) und (3b) p. 91, welche den Zusammenhang zwischen t und t' einerseits, den Konstanten der brechenden Fläche r, n, n' und denen des Hauptstrahles i, i' andererseits feststellen. Um jetzt die Beschaffenheit des fraglichen Stückes der kaustischen Kurve in erster Näherung zu ermitteln, liegt es nahe, die Variation der Größen t, t' selber mit dem Winkel φ oder mit den Öffnungswinkeln der ein- und austretenden Büschel u, u' (Figur 23, p. 67) zu bestimmen. Man erhält diese mit Fortsetzung jenes zur Ermittelung der Grundbeziehung zwischen t und t' selber angewandten Verfahrens, indem man $dQ/d\varphi$ nochmals nach φ variiert und in den Endgleichungen nur Größen von der Ordnung $d\varphi$ berücksichtigt.

Setzen wir vorübergehend

$$\frac{1}{r}\frac{dQ}{d\varphi} = n \cos i \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right) = Q^* \quad , \tag{1}$$

dann ergibt sich nach einigen einfachen Umformungen

$$\frac{1}{r}\frac{dQ^*}{d\varphi} = Q^{**} = -Q\left(\frac{1}{r} - \frac{\cos i}{t}\right)^2 - Q\,Q^*\frac{1}{n\,t} + \frac{n \cos^3 i}{t^3}\frac{dt}{du} \tag{2}$$

Sei in Figur 41 $PA = t$; der Schnittpunkt des dem Strahl PA benachbarten Strahles QA mit seinem nächsten Nachbar RC sei B, also $QB = t + dt$. Daher $dt = QB - PA$ und dies in genügender Annäherung $= -(PE + DA)$, wenn D und E die Schnittpunkte der um A mit AB und AQ geschlagenen Bögen mit dem Strahl PA sind. Weiter ist $PE = r \sin i\, d\varphi$ und DA genügend nahe $= 2\,d\tau$, wenn wir CA mit $d\tau$ bezeichnen. Also

$$dt = -2\,d\tau - r\,d\varphi \sin i \quad ,$$

$$\frac{dt}{du} = -2\frac{d\tau}{du} - r\frac{d\varphi}{du}\sin i = -2\frac{d\tau}{du} - \frac{t \sin i}{\cos i} \quad .$$

Hiernach wird schließlich nach einigen Zusammenziehungen

$$Q^{**} = -\frac{Q}{r^2} - 3\,Q\,Q^*\frac{1}{n\,t} - 2\,n\frac{\cos^3 i}{t^3}\frac{d\tau}{du} \tag{2a}$$

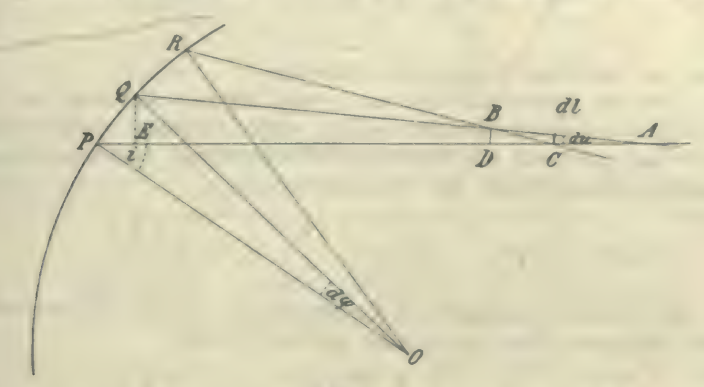
und ganz entsprechend kann man ohne weiteres auch

$$Q^{**} = -\frac{Q}{r^2} - 3\,Q\,Q^*\frac{1}{n'\,t'} - 2\,n'\frac{\cos^3 i'}{t'^3}\frac{d\tau'}{du'} \tag{2b}$$

setzen. Daher

$$(3) \qquad \Delta\left(n\frac{\cos^3 i}{t^3}\frac{d\tau}{du}\right) = -\frac{3}{2}\,Q\,Q^*\,\Delta\left(\frac{1}{n\,t}\right)$$

für jede beliebige endliche Neigung der Hauptstrahlen, d. h. für jeden Betrag der Größen i und i'. (Die in dieser Gleichung auftretende Größe $d\tau/du$ hat bekanntlich die einfache geometrische Bedeutung, daß sie gleich dem halben Krümmungsradius der kaustischen Kurve an der betrachteten Stelle C ist.)



Figur 41.
Die Variation der Schnittweite der Tangentialbüschel mit der Kugelzone.

Wenn in dieser Weise ein Büschel von der Öffnung $PCR = 2\,du$ wirksam wäre, so würde es als Bild eines Punktes eine im ersten Hauptschnitt liegende Linie liefern. Als dieses Bild wollen wir die engste Einschnürung des wirksamen Büschels, bei C, ansehen. Seine Größe ist

$$dl = d\tau \cdot du \quad .$$

Bezeichnet man die Länge PQ des durch das einfallende Büschel in Anspruch genommenen Bogens der Kugelfläche mit dh (wo dann mit genügender Annäherung $PR = 2\,dh$ ist), so hat man weiterhin

$$\frac{\cos i}{t} = \frac{du}{r\,d\varphi} = \frac{du}{dh} \quad ,$$

was in Verbindung mit

$$\frac{d\tau}{du} = \frac{dl}{du^2}$$

ergibt

$$\Delta\left(n\frac{\cos^3 i}{t^3}\frac{d\tau}{du}\right) = \Delta\left[n\left(\frac{du}{dh}\right)^3\frac{dl}{du^2}\right] = \frac{1}{dh^3}\,\Delta(n\,du\,dl) \quad .$$

Werden jetzt wieder mit $(dl_0)_k$ und $(dl_0)_k'$ die Größen bezeichnet, welche die vor und nach der $k$ten Brechung vorhandenen Zerstreuungslinien, auf das Objekt zurückbezogen, besitzen, so erhält man auf der linken Seite der Gleichung (3)

$$\frac{n_1\,du_1}{dh_k^{\,3}}\,\Delta(dl_0)_k \quad .$$

Daher ist schließlich

$$(4) \qquad \Delta(dl_0)_k = \frac{3}{2}\,(n_1\,du_1)^2\left(\frac{dh_k}{n_1\,du_1}\right)^3 Q_k\,Q_k^*\,\Delta\left(\frac{1}{n\,t}\right)_k$$

oder, da

$$du_1 = \frac{dh_1\cos i_1}{t_1} \quad ,$$

$$(4\text{a})\qquad \Delta(d\,l_0)_k = \frac{3}{2}(n_1\,d\,u_1)^2\left(\frac{t_1}{n_1\cos i_1}\right)^3\left(\frac{d\,h_k}{d\,h_1}\right)^3 Q_k\,Q_k^*\,\Delta\left(\frac{1}{n\,t}\right)_k\ ,$$

worin

$$(5)\qquad \frac{d\,h_k}{d\,h_1} = \frac{\dfrac{\cos i_1'}{t_1'}}{\dfrac{\cos i_2}{t_2}}\cdot\frac{\dfrac{\cos i_2'}{t_2'}}{\dfrac{\cos i_3}{t_3}}\cdot\cdots\cdots\frac{\dfrac{\cos i'_{k-1}}{t'_{k-1}}}{\dfrac{\cos i_k}{t_k}}\ ,$$

ebenfalls für jede endliche Neigung des Büschels.

Lassen wir, wie früher, das Zeichen d weg, welches andeuten soll, daß die betreffenden Größen unendlich klein von der ersten Ordnung sind, so lautet der Ausdruck für die durch die $k$te Brechung hervorgerufene Änderung der auf das Objekt zurückbezogenen Größe der Zerstreuungslinie l_0

$$(6)\qquad \Delta(l_0)_k = \frac{3}{2}(n_1\,u_1)^2\left(\frac{t_1}{n_1\cos i_1}\right)^3\left(\frac{h_k}{h_1}\right)^3 Q_k\,Q_k^*\,\Delta\left(\frac{1}{n\,t}\right)_k\ .$$

Liegt das Objekt in unendlicher Entfernung, so ist die Winkelgröße λ der auf dasselbe bezogenen Zerstreuungslinie gegeben durch

$$(7)\qquad \Delta(\lambda_0)_k = \frac{3}{2}\,h_1^{\,2}\left(\frac{1}{\cos i_1}\right)^3\left(\frac{h_k}{h_1}\right)^3 Q_k\,Q_k^*\,\Delta\left(\frac{1}{n\,t}\right)_k$$

und die lineare oder angulare Größe der durch alle p-Brechungen zusammen hervorgerufenen Zerstreuungslinie, $l_0^{(p)}$ bezw. $\lambda_0^{(p)}$ wird wie früher erhalten, indem man über $\Delta(l_0)_k$ bezw. $\Delta(\lambda_0)_k$, von $k = 1$ bis $k = p$ summiert.

Wenn die wirksamen Büschel mit der Achse des Systems nur geringe Winkel bilden, ihre Hauptstrahlen wieder vor und nach der Brechung an der $k$ten Fläche die Achse in der Entfernung x bezw. x' vom Scheitel dieser Fläche unter dem Winkel w bezw. w' und die Fläche selbst in der Höhe y über der Achse schneiden, so hat man wie früher

$$Q = n\sin i = n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x}\right)y = y\,Q_x$$

und

$$Q^* = n\cos i\left(\frac{\cos i}{t} - \frac{1}{r}\right) = -\,n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{t}\right) = -\,n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)$$

zu setzen, wo s die Schnittweite des vom Achsenpunkte des Objekts ausgegangenen Strahles vor der $k$ten Brechung ist, also in unserer früheren Bezeichnung hier $\lim Q^* = -\,Q_s$.

Daher wird schließlich unter Weglassung des Index k

$$(8)\qquad \Delta(l_0) = -\,\frac{3}{2}(n_1\,u_1)^2 y_1\left(\frac{s_1}{n_1}\right)^3\left(\frac{h}{n_1}\right)^3\left(\frac{y}{y_1}\right) Q_x\,Q_s\,\Delta\left(\frac{1}{n\,s}\right)$$

oder auch

$$(8\text{a})\qquad \Delta(l_0) = -\,\frac{3}{2}(n_1\,u_1)^2(n_1\,w_1)\left(\frac{s_1}{n_1}\right)^3\left(\frac{x}{n_1}\right)\left(\frac{h}{h_1}\right)^3\left(\frac{y}{y_1}\right) Q_x\,Q_s\,\Delta\left(\frac{1}{n\,s}\right)$$

und analoge Ausdrücke ergeben sich für $\Delta(\lambda_0)$.

Dieselben zeigen die Abhängigkeit des fraglichen Fehlers von der Apertur und Neigung des einfallenden Büschels und weisen ihrer mathematischen Form nach wieder auf die nahe Verwandtschaft mit den anderen bisher betrachteten Aberrationen hin.

In dem wiederholt betrachteten Sonderfalle, daß die Dicken und Entfernungen aller Linsen zu vernachlässigen sind und daß die Hauptstrahlen der Büschel durch den nahezu gemeinsamen Scheitel der Linsen gehen, ist

$$Q_s = n w = \ldots\ldots = n_1 w_1 = n_2 w_2 = \ldots = n_k w_k \quad ,$$

daher

$$\Delta(l_0) = -\frac{3}{2}(n_1 w_1)(n_1 u_1)^2 \left(\frac{s_1}{n_1}\right)^3 Q_s \Delta\left(\frac{1}{n s}\right) \quad , \tag{9}$$

$$\Delta(\lambda_0) = -\frac{3}{2}(n_1 w_1) h_1^3 Q_s \Delta\left(\frac{1}{n s}\right) \quad . \tag{10}$$

Es ist von L. SEIDEL[1] und A. KERBER[2] gezeigt worden, daß die Nullsetzung des Ausdrucks (8), die als FRAUNHOFERsche Bedingung von L. SEIDEL abgeleitet wurde (1855), in einem sphärisch korrigierten Linsensystem mit der Sinusbedingung bei Beschränkung auf die Aberrationen dritter Ordnung übereinstimmt.

Die analytischen dioptrischen Theorien; die fünf Bildfehler Seidels[3].

Die oben wiedergegebene, von ABBE herrührende getrennte Behandlung der Abbildungsfehler führt zwar bei der Betrachtung der einzelnen Fehler weiter, als dies sonst geschieht, aber sie gewährt in der hier vorgetragenen Form[4] keine Übersicht über den Zusammenhang zwischen der Zahl der möglichen Fehler und dem Grad der Annäherung, der der Berechnung zugrunde liegt.

Der erste, der eine solche Übersicht besessen und seine Theorie wohl viel weiter ausgebaut hatte, als man bisher anzunehmen pflegte, war J. PETZVAL (vgl. M. v. ROHR, Theorie und Geschichte des photographischen Objektivs, Berlin 1899, p. 263, dessen Darstellung dem Folgenden zu Grunde liegt). Den Beweis liefert neben PETZVALS eigenen, freilich ohne Beweise gegebenen und deshalb vielfach angegriffenen Mitteilungen, die glänzende praktische Erprobung seiner Theorie durch das PETZVALsche Porträtobjektiv, das nicht auf Grund des Probierens mit trigonometrischer Durchrechnung, sondern mittels allgemein gültiger Formeln berechnet worden ist.

Definiert man einen von einem Objektpunkt P ausgehenden Strahl durch die Koordinaten dieses Punktes in einer achsensenkrechten (Objekt-)Ebene ξ, η und zwei andere Größen, x, y[5], die des entsprechenden Bildstrahles durch die Koordinaten des Durchstoßungspunktes in der GAUSSschen Bildebene ξ' η' und zwei andere entsprechend gewählte Größen x', y', so werden bei Änderung von x und y um Δx und Δy sich im allgemeinen nicht nur x' und y', sondern auch ξ' und η' (um $\Delta\xi'$ und $\Delta\eta'$) ändern.

Man setzt nun in allen analytischen dioptrischen Theorien voraus, daß das Gesichtsfeld sowohl als die Öffnung kleine Größen von einer bestimmten Ordnung sind. Es sind also hier ξ, η, x, y kleine Größen, und wenn man etwa ξ' und η'

---

[1] L. SEIDEL, herausgeg. von FINSTERWALDER, Ber. Münch. Ak. d. Wissensch. **28.** 395. 1898. — [2] A. KERBER, Beiträge zur Dioptrik. 5. Heft. Leipzig 1899. — [3] Zitate der Literatur am Ende dieses Kapitels. — [4] In einer demnächst erscheinenden theoretischen Publikation der Mitarbeiter der Firma ZEISS in Jena wird von A. KÖNIG und M. v. ROHR die ABBEsche Theorie weiter ausgebaut, so daß sie aus der geometrischen Anschauung heraus die vollständigen SEIDELschen Formeln liefert, womit man zugleich auch die bisher unvollständige geometrische Interpretation der zehn SEIDELschen auf analytischem Wege abgeleiteten Glieder erhalten wird. — [5] Bei PETZVAL die Achsenwinkel seiner Projektionen, bei SEIDEL die Koordinaten seines Durchstoßungspunktes mit einer anderen, der „Öffnungs"ebene. In dieser werden entweder Polarkoordinaten gebraucht, oder es ist, und diese Festsetzung wollen wir hier zugrunde legen, x die meridionale (radiale) Koordinate (der Achsenabstand), y die dazu senkrechte sagittale („laterale" SEIDELS). Die z- und ζ-Achse ist die Achse des Systems.

nach Potenzen der ungestrichenen Variabeln entwickelt, so kann man diese Reihen schon bei niedrigen Gliedern abbrechen. Das gleiche gilt von den Reihenentwickelungen von $\Delta\xi'$ und $\Delta\eta'$.

Fehlen nun aber die ersten oder überhaupt einige der niedrigsten Potenzen der Reihenentwickelung von $\Delta\xi'$ und $\Delta\eta'$, so spricht man von einer Abbildung des Punktes P. Sind z. B. $\Delta\xi'$ und $\Delta\eta'$ von der $m$ten Ordnung im Verhältnis zu ξ, η, x, y, so nennt man die in der Bildebene entstehende Lichterscheinung ein Bild $m$ter Ordnung von P. Da man die ξ, η, x, y und die entsprechenden gestrichenen so wählt, daß bei gleichzeitiger Umkehrung der Vorzeichen von ξ, η, x, y die gestrichenen Koordinaten ebenfalls ihr Vorzeichen umkehren, ihren absoluten Wert aber nicht ändern, so wird die Reihenentwickelung der ξ', η', x', y' nach den ξ, η, x, y nur Produkte mit ungeraden Ordnungzahlen enthalten[1]; und dasselbe gilt für die Entwickelungen von $\Delta\xi'$ und $\Delta\eta'$ nach denselben Argumenten. Es gibt also nur ungerade Ordnungen der Bilder.

Die Bedingung für das Zustandekommen eines Bildes $m$ter Ordnung besteht darin, daß in den Reihenentwickelungen von $\Delta\xi'$, $\Delta\eta'$ die Glieder der dritten, fünften . . . $(m-2)$. Ordnung verschwinden. Die Entwickelung dieser Koeffizienten aus den Elementen des Systems (Radien, Brechungsexponenten, Abständen) bildet die eigentliche Schwierigkeit der Aufgabe. Diese Koeffizienten sind nicht unabhängig von einander und ihre Nullsetzung ergibt weniger Gleichungen als ihre Zahl beträgt.

Hiernach stellt sich diese analytische Theorie als Fortsetzung der Gaussschen dar; und diese beschäftigte sich mit den Bildern dritter Ordnung. Das Verschwinden der Koeffizienten erfordert nach Petzval

für die Glieder dritten Grades 5 Gleichungen
„ „ „ fünften „ 12 „
„ „ „ siebenten „ 20 „

Ein Bild fünfter Ordnung erfordert also die Lösung von fünf Fehlergleichungen, ein solches von siebenter Ordnung die Lösung von 5 + 12 Fehlergleichungen u. s. w. Die Berechnung der Koeffizienten wird mit wachsender Ordnungszahl sehr viel schwieriger und verwickelter. Petzval ist angeblich bis zu Bildern neunter Ordnung gelangt. Er hat jedoch seine Resultate nicht veröffentlicht[2], und wir verdanken alle Kenntnis in dieser Hinsicht den Arbeiten L. Ph. Seidels.

Seidel bedient sich statt der Radien, Abstände u. s. w. anderer, aus diesen abzuleitender besonders zweckmäßiger Größen, die er „die auf eine bestimmte Objektentfernung bezogenen Elemente des Systems“ nennt; in diesen drückt er die Koeffizienten der Glieder dritter Ordnung aus.

Behalten wir die oben eingeführten Bezeichnungen bei, legen aber die $\xi\zeta$-Ebene durch den leuchtenden Punkt, so daß für ihn $\eta = 0$ wird, so haben wir in einer Reihenentwickelung von $\Delta\xi'$ und $\Delta\eta'$ nach den Potenzen der ungestrichenen Größen die folgenden zehn Produkte dritter Ordnung:

$$x^3 \quad x^2 y \quad x y^2 \quad y^3$$
$$x^2 \xi \quad x y \xi \quad y^2 \xi$$
$$x \xi^2 \quad y \xi^2$$
$$\xi^3$$

Die mit geraden Potenzen von y multiplizierten Koeffizienten sind offenbar die Ausdrücke der meridionalen, die mit ungeraden Potenzen von y multiplizierten die der sagittalen Abweichungen.

[1] Bei der Betrachtung von Longitudinalaberrationen würden natürlich gerade Potenzen auftreten. — [2] Eine Kontrolle seiner Angaben über die Zahl der Koeffizienten ist daher unmöglich, mit Ausnahme derjenigen bis zu der fünften Ordnung, die Anzahl der letzteren ist (nach mündlicher Mitteilung) von Alb. König wieder bestimmt worden.

Für $\xi = 0$ (den Achsenpunkt) bleibt der Strahl immer in der Meridianebene, die durch seine erste Richtung festgelegt ist, und seine Abweichungen müssen proportional sein der dritten Potenz seines Abstandes von der Achse in der Öffnungsebene. Daher müssen $x \cdot x^2$ und $x \cdot y^2$, sowie $y \cdot x^2$ und $y \cdot y^2$ alle denselben Koeffizienten haben. Die Vernichtung dieses Koeffizienten ist die Bedingung der Aufhebung der sphärischen Aberration auf der Achse. Die Rechnung ergibt ferner, daß $x^2 \xi$ und $y^2 \xi$ nur in der Verbindung $(3x^2 + y^2)\xi$ auftreten, und daß der Koeffizient dieser Verbindung gleich ist dem Koeffizienten von $2xy\xi$; es bleiben somit fünf verschiedene Koeffizienten. Der letzte, mit ξ^3 multipliziert, bedeutet einen Fehler, der von der Ausgangsrichtung des Lichtstrahles unabhängig ist, der nur eine gleiche radiale Verschiebung für alle vom Objektpunkte ausgehenden Strahlen bewirken, also nicht auf die Schärfe der Abbildung, sondern nur auf die Richtigkeit der Zeichnung von Einfluß sein kann.

Indem nun $\Delta\xi'$ in der Bildebene die radialen (meridionalen) $\Delta\eta'$ die lateralen (sagittalen) Abweichungen des Durchstoßungspunktes des Strahles bedeutet, ist nach dem Gesagten:

$$\Delta\xi' = Ax(x^2 + y^2) + B\xi(3x^2 + y^2) + C\xi^2 x + E\xi^3 \quad ,$$
$$\Delta\eta' = Ay(x^2 + y^2) + 2B\xi xy + D\xi^2 y \quad .$$

Die $ABCDE$ verschwinden, wenn fünf andere Ausdrücke, aus denen sie sich zusammensetzen und die SEIDEL mit S(1) ... S(5) bezeichnet, verschwinden; die Summen S(1) ... S(5) heißen die fünf SEIDELschen Bildfehler; und es bedeutet (natürlich immer für eine in den „Elementen“ enthaltene Objektentfernung):

S(1) = A) = 0 das Verschwinden der sphärischen Aberration auf der Achse; **wenn außerdem**

S(2) = 0, so wird ein seitlich von der Achse gelegener Punkt in einer Ebene ohne radiale, in einer anderen ohne laterale Fehler abgebildet, das heißt es entstehen zwei Brennlinien, die in der auf p. 24 angegebenen Weise in den zwischenliegenden Ebenen in einander übergehen. Verändert der Objektpunkt seine Achsenentfernung, so bleibt keine der beiden Brennlinien in derselben achsensenkrechten Ebene; oder die zu der ganzen Objektebene (die eine solche Ausdehnung besitzt, daß deren fünfte Potenz vernachlässigt werden kann, mit einer Öffnung, deren fünfte Potenz ebenfalls zu vernachlässigen ist) gehören zwei gekrümmte Flächen, F_1 und F_2, die den Achsenpunkt gemein haben, und auf F_1 sind alle Objektpunkte durch laterale, auf F_2 durch radiale Bildlinien abgebildet.

Ein achsensenkrechtes Element, das von einer höheren Ordnung als der dritten klein ist, wird daher durch Büschel, deren Öffnung wie oben von der dritten Ordnung ist, schon beim Bestehen dieser beiden Bedingungen punktweise abgebildet, indem in der Ausdehnung seines Bildes die Brennflächen zusammenfallen. Die Bedingung S(2) = 0 leistet daher in dem betrachteten Gebiet der Aberrationen dritter Ordnung dasselbe wie der Sinussatz unter allgemeineren Voraussetzungen, nämlich die Abbildung eines Elements durch weite Büschel, wenn der Achsenpunkt sphärisch korrigiert ist. Wie wir bereits oben bei der ABBEschen Ableitung derselben Bedingung als der für die Komafreiheit achsennaher Punkte maßgebenden angegeben haben, ist diese Übereinstimmung von SEIDEL selbst und anderen erwiesen worden. Die Gleichung S(2) = 0 ist von SEIDEL zu Ehren FRAUNHOFERS, der sie in dem berühmten Königsberger Heliometerobjektiv schon 1825 erfüllt hatte, die FRAUNHOFERsche Bedingung genannt worden. — Tritt zu den früheren Bedingungen noch

S(3) = 0, so fallen F_1 und F_2 in eine Bildfläche zusammen, der Astigmatismus verschwindet.

S(4) = 0 bedeutet, daß diese Bildfläche eine Ebene ist.

S(5) = 0 ist die Bedingung richtiger Zeichnung in dieser Ebene.

SEIDEL hatte an die FRAUNHOFERsche Bedingung sofort dieselben Unter-

suchungen angeschlossen, die wir auf p. 132—136 im Zusammenhange mit dem Sinussatze mitgeteilt haben, jedoch im Gebiete der Aberrationen dritter Ordnung, während die dort angeführten Sätze für beliebige Öffnungen galten. Er entwickelte die sogenannte Herschelsche Bedingung, den Ausdruck dafür, daß eine Änderung des Objektabstandes eine möglichst kleine Aberration des Achsenpunktes erzeugt. Er zeigte, daß diese mit der Fraunhoferschen nur dann verträglich ist, wenn in unserer Bezeichnung

$$u = u' \quad .$$

Aus diesem Resultat, das mit dem von uns erhaltenen übereinstimmt, hat er zuerst die Schlüsse gezogen, die wir an jener Stelle abgeleitet haben.

Seidel hat ferner den schon von Petzval ausgesprochenen Satz bewiesen, daß mit einander berührenden Flächen nicht einmal die fünf Bedingungen für die Abbildung einer Ebene in eine andere befriedigt werden können, so daß man wenigstens einigen der brechenden Flächen einen merklichen Abstand erteilen muß.

Seidels Theorie ist insbesondere von Finsterwalder fortgebildet worden. A. Kerber hat u. a. eine eigene elegante Ableitung der Seidelschen Formeln gegeben. Die verwandte Literatur befindet sich unten zusammengestellt.

Die praktische Aufhebung der Abbildungsfehler. Die Zonen.

Die Bemerkungen, die wir schon über die praktische Aufhebung der Aberration auf der Achse gemacht haben, gelten zum größten Teile nun auch für die übrigen Abbildungsfehler. In den meisten Fällen sollen dieselben in weiteren Grenzen verschwinden als die von uns angegebenen Näherungsformeln oder als überhaupt gegenwärtig angebbare, aus den Daten des Systems berechenbare Ausdrücke richtig sind. (Die Sinusbedingung allein gilt für jede noch so große Öffnung, aber sie ist dann auch nicht aus den Daten des Systems berechenbar). Solche Formeln dienen daher gewöhnlich, wenn sie angewandt werden, nur zur „Vorrechnung“, während die endgültige Bestimmung der Systeme durch Probieren mittels trigonometrischer Durchrechnung (vgl. p. 66—68) ausgeführt wird[1].

Anleitungen und Beispiele zu solchen Rechnungen aus der praktischen Optik: Handbuch der angewandten Optik von A. Steinheil u. E. Voit. Leipzig 1891. A. Gleichen, Lehrbuch der geometrischen Optik. Leipzig u. Berlin 1902. p. 430 (sphärische Korrektion), p. 443 (Astigmatismus). Für erstere ist auch in Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik, 2. Bd., 1. Abt. (Optik, von O. Lummer), Braunschweig 1897, ein Beispiel gerechnet.

Über die Seidelschen trigonometrischen Formeln zur Durchrechnung schiefer Strahlen siehe p. 68; ferner B. Wanach, Zeitschr. f. Instrumentenk. **20.** 161. 1900. H. Harting, ebenda, p. 234.

Deren Zweck ist es, die sphärische Aberration und die Abweichungen von der Sinusbedingung in der ganzen Öffnung, den Astigmatismus, die Bildkrümmung und Verzeichnung im ganzen Gesichtsfelde möglichst klein zu machen; und man

---

[1] Arbeiten, die, zum Teil auch aberrationstheoretischen Inhalts, insbesondere auf die Konstruktion optischer Instrumente (Vorrechnung oder Durchrechnung) eingehen: G. B. Airy, Phil. Mag. **25.** 155. — C. A. und H. A. Steinheil, Gött. Nachr. Nr. 6. p. 131; Nr. 8. p. 211 1865. — A. Steinheil, Münch. Sitzungsber. 1867. p. 284; Photogr. Mitteilungen **18.** p. 123 u. 146. 1881/82; Zentralztg. f. Opt. u. Mech. **2.** 195. 1881; Münch. Sitzungsber. 1883; Astr. Nachr. **109.** 208. 1884. — H. Krüss, Mitteilungen d. Math. Ges. Hamburg 1880. — K. Moser (s. u.). — A. Kramer (s. u.). — Ad. Martin, Ann. Scient. de l'École norm. sup. (2) **6.** Suppl. Nr. 1. 1877; Bull. Soc. franç. de photogr. (2) **9.** 473—537. 1893. — E. Wallon, Bull. Soc. franç. de photogr. (2) **10.** 337—345. 378. 1894. — C. V. L. Charlier, Vierteljahrsschr d. Astron. Ges. **31.** 266. 1896; Zeitschr. f. Instrumentenk. **18.** 253. 1898. — R. Steinheil, Zeitschr. f. Instrumentenk. **17.** 338. 1897. — H. Harting, Wien. Ber. **107.** Abt. II, p. 624. 1898; Zeitschr. f. Instrumentenk. **18.** 357. 1898; **19.** 104. 138. 272. 1899; Wien. Ber. **108.** Abt. II, p. 1387. 1899; Ztschr. f. Intrumentenk. **20.** 230. 1900. — E. v. Höegh, Zeitschr. f. Instrumentenk. **19.** 37. 1899.

erreicht diesen Zweck meistens dadurch, daß man für einen (endlichen) Öffnungswinkel U die Schnittweite und Vergrößerung mit den parachsialen zusammenfallen läßt; und indem man für je einen (endlichen) Gesichtsfeldwinkel Ω den Astigmatismus, die Bildkrümmung und die Verzeichnung aufhebt. Man bezeichnet ein solches System als sphärisch (oder in bezug auf die Sinusbedingung) für den Öffnungswinkel U korrigiert (oder bei unendlich entfernten Objekten etwa für die Einfallshöhe H); und ebenso als für den Gesichtsfeldwinkel Ω anastigmatisch oder geebnet oder verzeichnungsfrei.

Für die zwischen liegenden Werte des Öffnungswinkels werden die Schnittweiten und Vergrößerungen nach der einen oder anderen Seite abweichen und ebenso werden für die zwischenliegenden Werte des Gesichtsfeldwinkels die sagittale und die tangentiale Bildfläche aus der parachsialen Bildebene in irgend welcher Weise ausbiegen, die Vergrößerung zu groß oder zu gering sein. Diese im allgemeinen geringen Abweichungen werden Zwischenfehler oder Zonenfehler, kurz „Zonen" genannt[1].

Man pflegt die Zonen der sphärischen Aberration und die der Sinusbedingung als Funktion der Öffnung nach M. v. ROHR, sowie nach P. RUDOLPH die Differenz der Einstellungsweite des meridionalen und sagittalen Bildpunktes gegen die Bildweite der Parachsialstrahlen als Funktion des Gesichtsfeldwinkels graphisch darzustellen, indem man die Öffnung oder den Gesichtsfeldwinkel als Ordinaten, die genannten Abweichungen als Abszissen aufträgt.

Eine größere Zusammenstellung vergleichbarer, auf Grund trigonometrischer Durchrechnung gezeichneter Kurven, die den bis jetzt erreichten „Korrektionszustand" verschiedener Typen von Systemen und seine historische Entwickelung erkennen läßt, ist bisher nur im Gebiete der photographischen Optik von M. VON ROHR[2] geliefert worden.

Literatur der analytischen Aberrationstheorien. Daß homozentrische Büschel die Eigenschaft der Homozentrizität durch Reflexion an einer Kugelfläche verlieren, hat wohl zuerst ROGER BACON um das Jahr 1600 (Tractatus de speculis, vgl. WILDE, Gesch. d. Optik I, p. 99) klar ausgesprochen und erwiesen; in bezug auf sphärische Linsen KEPLER (Dioptrice 1611, Prop. 59), welcher darum auch bereits paraboloidische Flächen vorschlug, um diesem Mangel zu begegnen. Weitere Ausbildung der Lehre von der Abweichung wegen der Kugelgestalt — meist beschränkt auf die Betrachtung von Achsenpunkten — durch die älteren Forscher: J. GREGORY, Optica promota, London 1663. — Is. BARROW, Lectiones opticae, London 1669. — J. NEWTON, Opticks, London 1704, lib. I, pars 1, prop. 7, Lect. opt. p. 165. — CHR. HUYGHENS, Dioptrica. Op. posth. II, Amstelod. 1728. — R. SMITH u. KÄSTNERs früher zitierte Werke (p. 26). — Ferner in besonderer Anwendung auf die Objektive von Fernrohren durch L. EULER, Mém. Ac. Berlin von 1747, 1757, 1761, 1762, 1766 (mehrere Abhandlungen) — CLAIRAUT, Mém. Ac. Paris von 1756, 1757, 1762 (desgl.) — KLINGENSTIERNA, Tentamen de defin. et corrig. aberrat. rad. lum. Petrop. 1762. — D'ALEMBERT, Opusc. math. IV Paris 1764. Mém. Ac. Paris von 1764, 1765, 1767. — J. BOSCOVICH, Dissert. 5 ad Dioptricam pertinentes, Vindob. 1767. — BÉGUELIN, Mém. Ac. Berlin von 1762, 1763, 1769 und

L. EULER, Dioptricae pars prima (de explicatione principiorum, ex quibus constructio tam telescopiorum quam microscopiorum est petenda); pars secunda (de constructione telescopiorum dioptricorum cum appendice de constructione telescopiorum catoptrico-dioptricorum); pars tertia (de constructione microscopiorum tam simplicium quam compositorum). Petersb. Akad. d. Wiss. 1769—71. EULER hat die Aberration dritter Ordnung eines Achsenpunktes unter Vernachlässigung der Dicken aus den Elementen des Systems zuerst abgeleitet.

Von den Leistungen aller dieser gibt eine übersichtliche Darstellung: S. KLÜGEL in der Vorrede zu seiner Analytischen Dioptrik, Leipzig 1778, die eine Bearbeitung des sehr umfangreichen EULERschen Werkes ist. S. auch PRIESTLEY, Geschichte der Optik, übersetzt von KLÜGEL. Leipzig 1776. Gleichzeitig mit KLÜGELs Werk erschien: CH. LAGRANGE, Théorie des lunettes, Mém. Ac. Berlin 1778.

In den außerordentlich zahlreichen, dem vorigen Jahrhundert angehörigen Bearbeitungen

---

[1] Auf Grund der physikalischen Lichttheorie wurden die Zonen behandelt von K. STREHL, Ztschr. f. Instrumentenk. **20.** 267. 1900; **22.** 213. 1902. — [2] M. v. ROHR, Theorie und Geschichte des photographischen Objektivs, Berlin, J. SPRINGER, 1899, worin die erwähnten Kurven für 49 Objektive gegeben werden.

des vorliegenden Gegenstandes, wie auch schon bei EULER, CLAIRAUT u. a., wird meistens die sphärische Aberration in und außer der Achse in Verbindung mit den im folgenden Kapitel zu behandelnden chromatischen Abweichungen erörtert. Die wichtigsten dieser Abhandlungen und Werke sind: J. F. W. HERSCHEL, On the aberration of compound lenses and object glasses. Phil. Trans. von 1821, p. 222, teilweise reproduziert in desselben Verfassers On Light. Encycl. Metrop. 1827. Deutsche Übersetzung von SCHMIDT. Stuttgart 1831. p. 115. (Aberration für Achsenpunkte unter Vernachlässigung der Linsendicken und -abstände. Resultat: Gleichung 12, p. 118). — G. SANTINI, Teorica degli strumenti ottici. Padova 1828. **1.** 114 bis 138 und 235—242. — S. STAMPFER, Über die Theorie der achromatischen Objektive bes. der FRAUNHOFERschen. Jahrb. d. k. k. polyt. Instit. **13.** 52. 1828 und Unters. der von Herrn ROGER vorgeschlagenen Verbesserungen in der Konstruktion achromatischer Fernrohre, ibid. **14.** 108. 1829. — J. J. LITTROW, Zeitschr. f. Phys. u. Math. von BAUMGARTNER und v. ETTINGSHAUSEN, **3.** 129. 185. 1827; **4.** 257. 1828 und Dioptrik, Wien 1830, p. 50—70 (daselbst ausführliches Literaturverzeichnis am Schluß). — G. W. BRANDES, Art. Linsenglas in GEHLERS Physikal. Wörterbuch Bd. **6.** Leipzig 1831. — Über W. R. HAMILTONS Entdeckung der Glieder dritter Ordnung (1834) s. unten auf p. 164. — L. J. SCHLEIERMACHER gibt in POGG. Ann. **14.** 1. 1828, eine Übersicht, in BAUMGARTNER und v. ETTINGSHAUSENS Zeitschr. f. Phys. u. Math. **9.** 1. 161. 454; **10.** 171. 329, den Anfang desjenigen, was er in seiner „analytischen Dioptrik", Darmstadt 1842 (nur Bd. 1 erschienen) fortgesetzt und ausgeführt hat. (Dies ist eine der vollständigsten Untersuchungen, die jemals über diesen Gegenstand angestellt worden sind die Entwickelungen leider sehr schwerfällig und daher unübersichtlich; keine allgemeinen Resultate.) — I. A. GRUNERT, Optische Untersuchungen Bd. **2.** Leipzig 1847. (Diskussion der verschiedenen möglichen Fernrohrobjektivkonstruktionen.) — J. PETZVAL, Bericht über die Ergebnisse einiger dioptrischer Untersuchungen. Pest 1843. Tagebl. d. 32. Vers. deutscher Naturf. u. Ärzte in Wien. Nr. 4. 1856; Wiener Sitzber. **24.** 50. 92. 129. 1857; **26.** 33. 1857; **31.** 213. 1858 (s. oben p. 141 u. 149). — L. SEIDEL, Zur Theorie der Fernrohrobjektive. Astr. Nachr. **35.** 302. 1852. (Sphärische Aberration erster Ordnung in der Achse ausgedrückt durch neue Variable: die relativen Neigungswinkel und Schnitthöhen eines parachsialen Strahles). — Derselbe, Zur Dioptrik, Entwickelung aller Glieder dritter Ordnung, welche den Weg eines außerhalb der Ebene der Achse gelegenen Lichtstrahles durch ein System brechender Flächen bestimmen. Astr. Nachr. **43.** 289. 1855. (Entwickelung der oben (p. 150 ff.) besprochenen analytischen Theorie: Vollständigste Darstellung aller Aberrationen dritter Ordnung: achsiale Aberration, Coma, Astigmatismus, Bildwölbung, Verzerrung durch algebraische Formeln.) Eine übersichtliche Darstellung seiner Ergebnisse hat SEIDEL (neben dem auf p. 149 erwähnten Beweise) in einer aus seinem Nachlaß von S. FINSTERWALDER herausgegebenen Arbeit, Abh. Münch. Ak. d. Wiss. II. Kl. **28.** 395—422. 1898, gegeben. Auf SEIDEL fußen: G. A. KELLER, Entwickelung der Glieder fünfter Ordnung. Gekrönte Preisschrift. München 1865 (Beschränkung auf den Achsenpunkt — dieselbe Aufgabe wurde gleichzeitig von BAUER in Carls Rep. d. Phys. behandelt — und S FINSTERWALDER, Die von optischen Systemen größerer Öffnung und Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. Abh. Münch. Ak. d. Wissensch. **17.** 519—587. 1891 (Untersuchung der Brennfläche der von einem außerachsialen Objektpunkt ausgegangenen Strahlen nach dem Durchgang durch ein zentriertes System. Zusammenhang der Durchstoßungspunkte in der Diaphragmenebene mit denen in einem das Bild auffangenden Schirm. Intensitätsverteilung im Zerstreuungsbilde bei verschiedener Lage der Blenden und der Schirmebene). Die übrigen auf SEIDELS Publikationen folgenden Abhandlungen nehmen merkwürdigerweise auf diese keinen Bezug und stehen ihr größtenteils in der Schärfe und dem Umfang der Behandlung nach. Das sonst vortreffliche Werk von O. F. MOSSOTTI, Nuova teoria degli strumenti ottici. Pisa 1859, fußt noch ganz auf den Arbeiten von LAGRANGE, SANTINI und BIOT, ohne Kenntnis selbst derer von GAUSS. — H. ZINKEN-SOMMER, Untersuchungen über die Dioptrik der Linsensysteme. Braunschweig 1870, vgl. p. 141. — P. A. HANSEN, Dioptrische Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen der Kugelgestalt. Abh. Leipz. Akad. d. Wiss. **10.** 697—784. 1874. — W. SCHMIDT, Die Brechung des Lichtes in Gläsern u. s. w. Leipzig 1874 (bes. § 4). — W. SCHEIBNER, Dioptr. Unters., insbes. über das HANSENsche Objektiv. Abh. Leipz. Akad. d. Wissensch. **11.** 541—620. 1876. — C. MOSER, Die Grundformeln der Dioptrik für den praktischen Gebrauch entwickelt. Sitzber. böhm. Akad. d. Wissensch. Prag 1881, insbes. p. 22—28 (sehr aphoristisch, aber erschöpfend und elegant in der Entwickelung). Ergänzungen in dess. Verf. Die einfache achromatische Linse als Landschaftsobjektiv. EDERS Jahrb. f. Photogr. 1889, und Über Fernrohrobjektive, Zeitschr. f. Instrumentenk. **7.**, insbes. p. 225—238. 1887. — L. BILLOTTI, Teoria degli strumenti ottici con applic. ai telesc. ed alla fotogr. celeste. Publ. del R. Osserv. di Brera. Milano 1883, insbes. p. 87 ff. — A. KRAMER, Theorie der zwei- und dreiteiligen astronomischen Fernrohrobjektive. Berlin 1885. — Über M. THIESEN, Beiträge zur Dioptrik. Sitzber. Berl. Akad. d. Wissensch. **35.** 799. 1890 vgl. das Folgende. Er entwickelt wiederum die Glieder der dritten Ordnung. — C. V. L. CHARLIER, Über den Gang des Lichtes durch ein System von sphärischen Linsen. Upsala 1893. Nochmalige Entwickelung der allgemeinen Gestalt der Aberrationsformeln der dritten Ordnung, ebenfalls ohne Kenntnis der Vorgänger. Diskussion und Anwendung seiner Formeln in: Entwurf einer analytischen Theorie zur Konstruktion von astronomischen und photographischen Objek-

tiven. Vierteljahrsschr. d. astron. Gesellsch. **31.** 266. 1896. — A. KERBER, Beiträge zur Dioptrik. 1.—5 Heft. Leipzig 1895—99. vgl p. 152. — H. BRUNS, Das Eikonal, Sächs. Akad.-Ber. **21.** 325. 1895, gehört wesentlich zum Gegenstand des folgenden Abschnitts. — A. GULLSTRAND, Allgemeine Theorie der monochromatischen Aberrationen und ihre nächsten Ergebnisse für die Ophthalmologie. Upsala 1900.

Allgemeine Theorie der optischen Instrumente, die charakteristische Funktion oder das Eikonal.

Die erwähnten Aberrationstheorien oder Theorien der optischen Instrumente gehen von der Voraussetzung zentrierter Kugelflächen aus. Sie liefern in erster Annäherung die GAUSSsche Theorie[1], die Sätze über die Brennpunkte, Vergrößerung u. s. w., die wir im zweiten Kapitel in anderer Weise herleiteten. Wir machten nämlich die einzige Annahme, daß ein Raum in den anderen punktweise durch Strahlen abgebildet sei. Dann sind die beiden Räume „kollinear verwandt" und die obigen Sätze ergeben sich, ohne Annahme über das optische System, als „Eigenschaften der Kollineation, in ein optisches Gewand gekleidet" (BRUNS).

In der vorliegenden Darstellung wird diese ABBEsche Theorie als die Untersuchung der Eigenschaften des Idealzustandes betrachtet, dem sich die ausführende Optik in der einen oder anderen Weise zu nähern bestrebt ist. Es ist bereits gezeigt worden und wird nochmals zu besprechen sein, daß die spezifisch optischen Gesetze (z. B. in der Form des MALUSschen oder des FERMATschen Satzes) eine eigentliche Verwirklichung des durch die Gesetze der Kollineation[2] bestimmten Strahlenganges nicht zulassen. Wir haben bei der Betrachtung des wirklichen Strahlenganges meist bestimmte Formen optischer Systeme zugrunde gelegt. Man kann aber auch für den wirklichen Strahlengang eine Theorie aufstellen, die keine bestimmten Systeme voraussetzt und die wir eine allgemeine Theorie der optischen Instrumente nennen wollen.

In dieser Form hat BRUNS das Problem hingestellt, das er mit seiner Eikonalfunktion gelöst hat. Er hat jedoch Vorgänger gehabt, deren bedeutendster, W. R. HAMILTON, fast dieselbe allgemeine Lösung auf ganz anderem Wege gefunden und bereits ein Jahrzehnt vor GAUSS' berühmter Untersuchung zentrierter Systeme aufgestellt hatte, also vor der Mehrzahl aller Arbeiten, die uns erst eine Kenntnis der Wirkungsweise spezieller Systeme vermittelt haben; und MAXWELL hat als erster von der HAMILTONschen Methode in der ausgesprochenen Absicht Gebrauch gemacht, die von der Wahl spezieller Systeme unabhängigen Eigenschaften der optischen Instrumente zu finden.

Das Wesen dieser Theorien besteht darin, daß sie die Wirkung jedes Instruments mit Hilfe einer Funktion darstellen, deren Form die verschiedenen Instrumente charakterisiert („charakteristische Funktion"), während ihre Existenz ein Ausdruck der allgemeinen optischen Gesetze ist (des MALUSschen Satzes oder des Prinzips des kürzesten Lichtweges). Eine solche Funktion ist zuerst von HAMILTON[3] aufgestellt worden. Wir haben sie für eine einfachste Klasse von optischen Systemen bereits abgeleitet (p. 19 u. 20). Jetzt sei ein beliebiges Instrument vorausgesetzt.

Durch ein solches gelangt von einem beliebigen Punkte xyz zu einem an-

[1] Die erste Annäherung gilt natürlich ebenso für alle anderen zentrierten Rotationsflächen, wie schon des öftern bemerkt worden ist. — [2] Die wir im Gegensatze zu jenen als geometrische bezeichnen. BRUNS (EIKONAL) bedient sich einer anderen Ausdrucksweise, indem er seine allgemeine Theorie der optischen Instrumente, die rein geometrische Folgerungen des MALUSschen Satzes enthält, als geometrische Theorie anspricht. — [3] Vgl. das auf p. 20 Gesagte, insbes. W. R. HAMILTON, Trans. Irish Acad. **17.** 1. 1837. Auch POGG. Ann. **28.** 633. 1833.

deren $x'y'z'$ im allgemeinen ein Strahl. Der Weg dieses Strahles ist durch den Fermatschen Satz:

$$\delta \Sigma n l = 0$$

bestimmt.

Hamilton faßt nun die so bestimmte Weglänge zwischen den beiden Punkten xyz und $x'y'z'$ (nach der Wellentheorie die Zeit, die das Licht beim Übergange von dem einen Punkte zum andern braucht) als eine Funktion dieser sechs Koordinaten (und eines Index der Farbe, den wir hier nicht berücksichtigen wollen) auf. Die Koordinaten xyz und $x'y'z'$ können dabei, wie Maxwell bemerkt, auf zwei verschiedene, beliebig gelegene Koordinatensysteme bezogen sein.

In der Tat, denken wir uns den reduzierten Lichtweg in der Form $\Sigma n l$ als Funktion von xyz, $x'y'z'$ und der k verfügbar freien Koordinaten von einer Anzahl von Zwischenpunkten α ausgedrückt, etwa als

$$\Phi(xyz\ x'y'z'\ \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ .\ .\ .\ .) \quad ,$$

so werden die letzteren Koordinaten durch die k Gleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} = 0\ .\ .\ .\ .$$

eliminiert werden können, so daß der Ausdruck Φ übergeht in

$$F(xyz\ x'y'z') \quad .$$

Die durch diese Funktion ausgedrückte Abhängigkeit des reduzierten Lichtweges von der Lage der Endpunkte charakterisiert das optische System. Daher heißt F die charakteristische Funktion des Systems.

Betrachten wir ein Strahlenbüschel, das von dem Punkte xyz divergiert, das also die Kugeln um ihn als Zentrum zu Orthogonalflächen hat, so wird zufolge des Malusschen Satzes nach dem Durchtritt durch das optische System wieder eine Schar paralleler Orthogonalflächen vorhanden sein. Beim Beweis dieses Satzes ergab sich aber auch, daß zwischen einer der ursprünglichen und einer der neu entstandenen Orthogonalflächen auf jedem möglichen Strahlenwege die optische Länge die gleiche war. Daher ist (wenn ich etwa die optische Weglänge von einer unendlich kleinen Kugel um den Punkt xyz aus messe) die Gleichung der Orthogonalflächen nach der letzten Brechung oder Spiegelung:

$$F(xyz\ x'y'z') = \text{const.} \quad ,$$

worin wir xyz als feste, $x'y'z'$ als laufende Koordinaten ansehen wollen. (In der Undulationstheorie ist das einfach die Gleichung der Welle, in die das optische System die eintretende Kugelwelle verwandelt hat.)

Daher hat der von xyz kommende Strahl, der durch irgend ein $x'y'z'$ geht, als Normale zu diesen Flächen, die Richtungskosinus:

$$\alpha' : \beta' : \gamma' = \frac{\partial F}{\partial x'} : \frac{\partial F}{\partial y'} : \frac{\partial F}{\partial z'} \quad .$$

Denke ich mir $x'y'z'$ als leuchtenden Punkt, so werden die von ihm ausgehenden Strahlen orthogonal zu den Flächen

$$F(xyz\ x'y'z') = \text{const.}$$

stehen, wenn ich jetzt $x'y'z'$ als feste Größen, xyz als laufende Koordinaten betrachte. Der Strahl, der von $x'y'z'$ ausgehend xyz erreicht, hat daher die Richtungskosinus

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z} \quad .$$

Nach dem Prinzip von der Umkehrbarkeit der Strahlenwege ist dies aber derselbe Strahl durch $x y z$, der das System in umgekehrter Richtung durchdringend auf $x' y' z'$ traf.

Die Kenntnis der charakteristischen Funktion für irgend ein System brechender oder spiegelnder Flächen liefert also folgenden Zusammenhang zwischen zwei beliebigen Punkten $x y z$, $x' y' z'$ und den Richtungskosinus der durch sie gehenden, sich in einander fortsetzenden Strahlen (die Faktoren $-n$ und n' ergeben sich sofort aus der Bedeutung der charakteristischen Funktion, wenn man die je drei Gleichungen quadriert und addiert):

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{n}\frac{\partial F}{\partial x} \quad , \quad \beta = -\frac{1}{n}\frac{\partial F}{\partial y} \quad , \quad \gamma = -\frac{1}{n}\frac{\partial F}{\partial z} \quad , \\ \alpha' = +\frac{1}{n'}\frac{\partial F}{\partial x'} \quad , \quad \beta' = \frac{1}{n'}\frac{\partial F}{\partial y'} \quad , \quad \gamma' = \frac{1}{n'}\frac{\partial F}{\partial z'} \quad . \end{cases}$$

Diese Gleichungen bestimmen zu jedem $x y z$ und $\alpha \beta \gamma$ die entsprechenden gestrichenen Größen, also zu jedem (durch einen Punkt und eine Richtung charakterisierten) Objektstrahl den konjugierten Bildstrahl, sie drücken also aus, daß, und wenn F gegeben ist, wie der eine Raum in den anderen „strahlenweise abgebildet" ist, worin die Wirkung jedes Systems ohne weitere Annahme besteht. Da die hier gebrauchten sechs Bestimmungsstücke eines Strahles nicht unabhängig sind, so folgen für die charakteristische Funktion die Differentialgleichungen:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = n^2 \quad ,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)^2 = n'^2 \quad .$$

Da die optischen Längen in den Medien vor und hinter dem Durchtritt des Lichtes durch das optische System stets einfach anzugeben sind, so ist das System offenbar bereits genügend charakterisiert durch die optische Länge der Lichtwege zwischen den Punkten je einer Fläche im ersten und im letzten Medium, also durch eine Funktion der $2 \cdot 2$ Koordinaten in diesen Flächen. Eine derartige charakteristische Funktion hat zuerst THIESEN[1] aufgestellt und benutzt, offenbar selbständig, ohne Kenntnis der Vorgänger.

Mit ganz anderen Hifsmitteln hat neuerdings BRUNS[2] eine solche Funktion wiederum von neuem entwickelt. Er charakterisiert einen Strahl durch vier Variable, die Koordinaten des Durchstoßungspunktes in der Grundebene $x = 0$, $y = h$, $z = k$ und die zwei Richtungskosinus gegen die y- und z-Achse, p und q. Ein Büschel erhält man, wenn diese vier Strahlenkoordinaten von zwei Parametern abhängig gemacht werden. Wählt man als solche p und q selber, so ist die Bedingung dafür, daß das Büschel flächennormal ist,

$$\frac{\partial h}{\partial p} = \frac{\partial k}{\partial q} \quad .$$

Bezeichnet man nun die Koordinaten des dem Strahl $h k p q$ entsprechenden Bildstrahles mit $H K P Q$, wo etwa durch

$$H = A(h, k, p, q) \quad ,$$

$$K = B(h, k, p, q) \quad ,$$

[1] M. THIESEN, Ber. Berl. Akad. d. Wissensch. **35.** 799. 1890 und Verhandl. d. physik. Gesellsch. zu Berlin 1892; vgl. auch J. CLASSEN, Math Optik. Leipzig 1901. — [2] H. BRUNS, Das Eikonal. Leipzig 1895 (aus den Abhandl. d. math.-phys. Kl. d. Kgl. Sächs. Ges. **21.** 325. 1895).

$$P = C(h, k, p, q) \quad ,$$
$$Q = D(h, k, p, q) \quad ,$$

eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den zweimal vier Größen festgesetzt ist, so fordert der Malussche Satz, daß

$$\text{wenn } \frac{\partial h}{\partial p} = \frac{\partial k}{\partial q} \quad , \quad \text{auch } \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{\partial K}{\partial Q} \text{ ist.}$$

Diese Bedingung führt auf sechs partielle Differentialgleichungen zwischen den Ableitungen der Funktionen $ABCD$, als den Ausdruck der Malusschen Bedingung. Transformationen, die diesen Gleichungen genügen, gehören aber zu den in neuerer Zeit eingehend studierten Berührungstransformationen.

Die Beziehung zwischen Objekt- und Bildraum, die bei der Abbeschen Voraussetzung, daß beide Räume punktweise aufeinander abgebildet sind, in einer Kollineation bestand, besteht hier, bei einer nur strahlenweise aber dem Malusschen Satze entsprechend vollzogenen Abbildung in einer Berührungstransformation. In deren geometrischen Eigenschaften sind daher ebenso wie dort in den Eigenschaften der Kollineation alle allgemeinen Gesetze der betrachteten Abbildung enthalten.

Die Haupteigenschaft dieser Transformationen ist aber, daß eine Funktion E von h, k, H, K existiert, mit deren Hilfe sich die obigen vier Abbildungsgleichungen in der Form schreiben lassen:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} np &= \frac{\partial E}{\partial h} \quad , \\ nq &= \frac{\partial E}{\partial k} \quad , \\ -NP &= \frac{\partial E}{\partial H} \quad , \\ -NQ &= \frac{\partial E}{\partial K} \quad , \end{aligned} \right.$$

wo n und N Konstanten (die Brechungsexponenten des Raumes der Objektstrahlen und des Raumes der Bildstrahlen) sind. Die Existenz dieser Funktion oder die Integrabilität des Ausdrucks

$$dE = n(p\,dh + q\,dk) - N(P\,dH + Q\,dK)$$

ist notwendig und hinreichend zur Erfüllung der Bedingungsgleichungen, die den Malusschen Satz aussprechen. Die Funktion E nennt Bruns das Eikonal. Jede dem Malusschen Satze gehorchende Strahlenbeziehung zweier Räume besitzt ein Eikonal[1] und wird durch das Eikonal vollständig charakterisiert, da sich die Abbildungsgleichungen in der angegebenen Weise daraus ableiten lassen.

Erst Klein[2] hat gezeigt, daß das Eikonal identisch ist mit der charakteristischen Funktion in der zuletzt erwähnten (Thiesenschen) Form, daß es nichts anderes bedeutet als die optische Länge zwischen den Punkten je einer Ebene im ersten und einer Ebene im letzten Medium in ihrer Abhängigkeit von den Koordinaten in diesen Ebenen, wenn man die letzteren als $x\,y$-, bezw. als $x'\,y'$-Ebene wählt. Dann verwandeln sich nämlich die Gleichungen (1) in die Gleichungen (2).

[1] Bei Berücksichtigung der anderen von Bruns angegebenen Formen solcher Funktionen, die wir hier außer acht lassen, gibt es im allgemeinen 16 Eikonale derselben Abbildung. — [2] F. Klein, Ztschr. f. Math. u. Phys. 46. 372. 1901.

Man kann von einer solchen Funktion in zweierlei Weise Gebrauch machen. Erstens, indem man sie für bestimmte gegebene Systeme berechnet und deren Eigenschaften daraus ableitet. Dies ist insbesondere für zentrierte Kugelflächen (und zum Teil für Prismen) von Hamilton, Maxwell (s. u.), Thiesen (l. c.), Bruns (l. c. p. 414) geschehen, bedeutet aber in den meisten Fällen keine Verbesserung gegenüber den gewöhnlichen früher genannten Ableitungen dieser Eigenschaften, da man hier wie dort auf Annäherung mittels Potenzreihen angewiesen ist. Zweitens, indem man die allen Systemen gemeinsamen, der Liniengeometrie angehörenden Eigenschaften aufsucht.

Diese letztere in dieser Weise von Bruns formulierte Problemstellung ist es, die uns die hier zu besprechenden Sätze der allgemeinen Theorie der optischen Systeme oder der Strahlenabbildung liefert. Thiesen und Bruns finden auf diese Weise Ansätze, um die Existenzmöglichkeit von Abbildungsarten zu behandeln, die irgend welchen vorgegebenen Bedingungen genügen. So untersucht z. B. Bruns, ob eine strahlenweise mit dem Malusschen Satze vollzogene Abbildung eines Raumes in einen anderen möglich ist, die homozentrische Büschel in homozentrische überführt, also die Gesetze der Kollineation verwirklicht, wie wir es im zweiten Kapitel voraussetzten. Bruns erhält das Resultat, daß dies nur in einem trivialen, von uns auf p. 136 bereits angegebenen Falle möglich ist.

Klein[1] hat einen einfachen Beweis dafür gegeben, daß die kollineare Beziehung mit den optischen Gesetzen — er wählt die Form des Brechungsgesetzes — nur in diesem trivialen Falle verträglich ist. Er zeigt, daß die Transformationsgleichung für eine Gerade, die das Snelliussche Gesetz ausdrückt, die Eigenschaft hat, daß eine Gerade durch einen der beiden „imaginären Kreispunkte“ $\left(\text{Koordinaten } \frac{1}{0}, \frac{i}{0} \text{ und } \frac{1}{0}, -\frac{i}{0}\right)$ der Einfallsebene, eine Minimalgerade, wieder in eine Minimalgerade verwandelt wird. Es folgt daraus, daß auch bei einer beliebigen Anzahl solcher Transformationen der ganze „unendlich ferne Kugelkreis“ fest bleibt. I n s o f e r n w i r a n n e h m e n, d a ß d a b e i e i n e e i n - e i n d e u t i g e P u n k t b e z i e h u n g e n t s t e h t, muß diese wegen der festen Lage des Kugelkreises die einer bloßen Ähnlichkeitstransformation sein.

Klein beweist sodann durch eine einfache Betrachtung, daß die Dimensionen des Bildraumes gegen den Objektraum im umgekehrten Verhältnis der Brechungsquotienten vergrößert sind. Wenn nämlich eine ähnliche Abbildung stattfindet, so läßt sich leicht aus dem Prinzip der gleichen optischen Weglängen aller Abbildungswege eines Punktes folgern, daß die Lichtzeit zwischen Objekt- und Bildpunkt auch für alle Objektpunkte dieselbe ist. — Dieses Resultat haben wir schon oben p. 128, Anm. 3 erhalten. — Daraus ergibt sich sofort das Verhältnis der Dimensionen zu $\frac{n}{n'}$.

Es mag hier daran erinnert werden (vgl. p. 152), daß d i e s e s R e s u l t a t für zentrierte Flächen und im Bereiche der dritten Ordnung schon von L. Seidel (l. c.) 1856 abgeleitet war.

Der erste, der derartige Fragen in dem hier besprochenen allgemeinen Sinne als die der Existenzmöglichkeit von Abbildungen unter Weglassung der Verwirklichungweisen untersuchte, war J. C. Maxwell in der oft zitierten Abhandlung: On the general laws (vgl. p. 29) (1858). Er bewies, daß eine achsensymmetrische Abbildung zweier Objektebenen, sogar bei Zulassung von Bildkrümmung und Verzeichnung nur in dem Falle möglich ist, den wir soeben besprochen haben.

Er wies auch bereits darauf hin, daß die Geradlinigkeit der Strahlen im Objekt- und Bildraume eine — auch allen anderen hier erwähnten Untersuchungen

[1] F. Klein, Ztschr. f. Math. u. Phys. 46. 1901.

außer denen HAMILTONS zugrunde liegende — Voraussetzung des von ihm gefundenen Satzes ist und gab ein Gesetz für die Variation des Brechungsindex eines Raumes an, bei dem alle Punkte dieses Raumes durch kreisförmige Strahlen in andere Punkte abgebildet werden. — Hiervon ist wohl zu unterscheiden das Vorkommen kontinuierlich variablen Brechungsvermögens im optischen System, das ganz in den Rahmen dieser Betrachtungen gehört.

Dagegen finden THIESEN[1] und später BRUNS, daß die Abbildung der Punkte einer beliebigen Fläche auf die einer beliebigen anderen und zwar bei beliebiger Wahl der Punktebeziehung, ein Eikonal noch nicht bestimmt; daß also noch unendlich viele Abbildungen der Strahlen eines Raumes in die eines anderen die verlangte Aufgabe erfüllen. Dabei ergibt sich, daß in den Büscheln, die zwei Flächenelemente auf einander abbilden, der Kosinus des Winkels zwischen einem Strahl und einer Tangente des Elements zu dem Kosinus des Winkels zwischen den konjugierten Stücken in einem festen Verhältnis steht (Kosinussatz). Hieraus folgt für zentrierte Systeme der Sinussatz. Dieser, freilich auf anderem Wege gefundene Satz, ist bis jetzt der praktisch wichtigste der allgemeinen hier zu besprechenden Theorie, wir haben ihn, wie einige andere ähnliche hierher gehörige Sätze aus praktischen Gründen vorweggenommen (p. 126 – 136).

Die Forderung einer Abbildung der Punkte der unendlich fernen Ebene des Objektraumes auf die einer endlich entfernten des Bildraumes ist, wie BRUNS zeigt, bei perspektivisch richtiger Zeichnung unvereinbar mit der Forderung, daß auch die unendlich ferne Ebene des Bildraumes in eine endliche des Objektraumes abgebildet wird. Da ein sogen. „symmetrisches" Linsensystem, das die erste Forderung erfüllt, von selbst auch die zweite erfüllen muß, so kann ein solches System nicht perspektivisch richtig zeichnen — ein Ergebnis, das wir bei der Betrachtung der Verzeichnung wieder antreffen werden (Kap. VII). Für ein symmetrisches Linsensystem mit den verlangten Eigenschaften ist das Eikonal völlig bestimmt, die notwendige Verzeichnung berechenbar; BRUNS findet des Näheren bei symmetrischen Systemen: „wenn bei gegebener Öffnung hinreichende Korrektheit der Zeichnung verlangt wird, so läßt sich die Bildschärfe durch keine Wahl der brechenden Flächen über eine bestimmte im voraus festzusetzende Grenze steigern", der man bei den besten Konstruktionen bereits sehr nahe gekommen ist.

Die Frage, ob ein Eikonal für irgend welche Bedingungen gefunden werden kann, ist aber durchaus zu trennen von der nach den optischen Hilfsmitteln, mit denen die durch das Eikonal dargestellte Abbildung zu verwirklichen ist. Wenn man innerhalb des Systems Medien zuläßt, in denen die Lichtgeschwindigkeit beliebig von der Richtung abhängt, so ist die Aufgabe, ein optisches System für eine gegebene charakteristische Funktion zu finden, nach THIESEN[2] leicht lösbar; für isotrope Medien, die aber kontinuierlich in einander übergehen dürfen, ist der Ansatz gleichfalls von THIESEN gegeben worden. Ob dagegen jede Strahlenbeziehung zweier Räume durch die praktischen Hilfsmittel dargestellt werden kann, d. h. durch eine endliche Anzahl von Brechungen und Spiegelungen und wie die zu einem bestimmten Eikonal gehörigen Systeme gefunden werden können, ist ein noch nicht erledigtes Problem[3]. In dieser Richtung hat HAUSDORFF[4] weiter gearbeitet, der sich aber auf infinitesimale Abbildungen beschränkt (Abbildungen mit unendlich kleinen Unterschieden der Brechungsexponenten oder solche durch ein beiderseits vom selben Medium begrenztes System unendlich benachbarter

[1] Die Fassung des Folgenden ist nach BRUNS gegeben, bei THIESEN ergibt sich nur eine lineare Beziehung zwischen den beiden Kosinus. — [2] M. THIESEN, Verhandl. d. Phys. Gesellsch. 11. Jahrg. Nr. 2. 1902. — [3] Vgl. E. ABBE, Carls Rep. **16**. 306. — [4] F. HAUSDORFF, Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. Math. Phys. Kl. **48**. 79. 1896.

brechender Flächen) und die Existenz eines „idealen Fernrohrobjektivs“ unwahrscheinlich gemacht hat.

„Die Erledigung solcher und ähnlicher Fragen ist notwendig, wenn man in der *allgemeinen* Theorie der optischen Systeme über den gegenwärtigen Stand wesentlich hinauskommen will. Solange die praktische Optik bei der Zusammensetzung einer größeren Zahl von Brechungen auf den zur Zeit allein gangbaren Weg des numerischen Ausprobierens angewiesen ist, sind die tatsächlich erreichten Erfolge wesentlich das Ergebnis einer durch Geschicklichkeit und lange Übung erworbenen Kunst, die sich der einzelne immer erst neu anzueignen hat, die aber nicht, wie auf anderen theoretisch vollständig durchgearbeiteten Gebieten, in Form eines Gebäudes von fertigen und allgemeingültigen Lehrsätzen überliefert werden kann. Unzweifelhaft beruhen die Leistungen der heutigen Mikroskop- und Kameraobjektive auf der unbewußten Innehaltung bestimmter, allgemeiner Gesetze, deren strenge Formulierung erst die Einsicht in den wahren Grund des erzielten Erfolges verschaffen würde. Ein Beispiel hierfür ist der von ABBE gelieferte Nachweis, daß in der Optik der Sinussatz bereits vor seiner Auffindung, also unbewußt, befolgt worden ist“ (BRUNS, Das Eikonal, p. 397).

Die Anwendung der charakteristischen Funktion auf elementare Abbildungsräume. Nach dem oben Gesagten kann man einen Strahl mittels der charakteristischen Funktion durch eine Reihe von Medien mit sprungweise oder stetig veränderlichem Brechungsverhältnis hindurch verfolgen, also z. B. seine Durchstoßungspunkte mit beliebigen Ebenen angeben. Durch Differenziation dieser Formeln erhielten KIRCHHOFF[1] und CLAUSIUS[2] Ausdrücke, die gestatten, die Breite eines Büschels, das von einem gegebenen Punkte ausgeht, in beliebigen Ebenen mittels der charakteristischen Funktion („Lichtzeit“) anzugeben. Aus ähnlichen Betrachtungen lassen sich zwei neuerdings von STRAUBEL[3] gegebene Sätze herleiten, von denen oben mehrfach Gebrauch gemacht wurde:

Wenn ein von einem Punkte ausgehendes unendlich dünnes {ebenes / räumliches} Büschel[4] mit dem Öffnungswinkel {dw / $d\omega$} an einer beliebigen anderen Stelle {die lineare Breite ds' / den Querschnitt dq'} besitzt, und — bei derselben optischen Anordnung — ein anderes von einem Punkte des Elements {ds' / dq'} in genau entgegengesetzter Richtung ausgehendes Elementarbüschel vom {räumlichen / ebenen} Öffnungswinkel {dw' / $d\omega'$} im ersten Punkte {die lineare Breite ds / den Querschnitt dq} besitzen würde, so ist für die ebenen Büschel

$$n\, ds\, dw = n'\, ds'\, dw' \quad ,$$

für die räumlichen

$$n^2\, dq\, d\omega = n'^2\, dq'\, d\omega' \quad .$$

Die „ebenen Büschel“ brauchen dabei nicht in derselben Ebene zu verbleiben.

Steht das {Linienelement / Flächenelement} nicht senkrecht zum Büschel, sondern bildet mit ihm den Winkel {w / ϑ}, so ist, wenn wir jetzt das {Linienelement dl / Flächenelement df} nennen:

$$n \cos w\, dw\, dl = n' \cos w'\, dw'\, dl' \quad ,$$

$$n^2 \cos \vartheta\, d\omega\, df = n'^2 \cos \vartheta'\, d\omega'\, df' \quad .$$

[1] G. KIRCHHOFF, POGG. Ann. **109**. 275. 1860: und Untersuchungen über das Sonnenspektrum u. s. w. 2. Aufl. Berlin 1862: oder OSTWALDS Klassiker Nr. 100. — [2] R. CLAUSIUS, POGG. Ann. **121**. 1. 1864: Mechan. Wärmetheorie, 3. Aufl. **1**. 315. 1887. — [3] R. STRAUBEL, Phys. Zeitschr. **4**. 114. 1902. — [4] Die Sätze für ebene Büschel sind keine Spezialisierung der für räumliche Büschel geltenden, werden daher besonders angeführt.

Diese Sätze setzen voraus, daß die Büschelbreiten von gleicher Größenordnung wie ihre Öffnungswinkel sind. Dies findet in dem zuerst von Clausius betrachteten Falle der Abbildung beider Elemente auf einander nicht mehr statt. Dann kann man aber die obigen Sätze zweimal (zuerst auf das Objekt und eine in den Strahlengang gelegte Schnittebene, sodann auf die letztere und das Bild) anwenden und erhält: Wenn zwei $\begin{matrix}\text{Linien}\\ \text{Flächen}\end{matrix}$elemente $\begin{matrix} dl, & dl' \\ df, & df' \end{matrix}$ durch Elementarbüschel mit den $\begin{matrix}\text{ebenen}\\ \text{räumlichen}\end{matrix}$ Öffnungswinkeln $\begin{matrix} dw, & dw' \\ d\omega, & d\omega' \end{matrix}$ auf einander abgebildet werden, so gilt

$$n \cos w \, dw \, dl = n' \cos w' \, dw' \, dl' \quad ,$$

$$n^2 \cos \vartheta \, d\omega \, df = n'^2 \cos \vartheta' \, d\omega' \, df' \quad .$$

Nur die Form dieser Sätze stimmt mit den obigen überein, die Beziehungen der Elemente zu einander haben sich geändert, indem den Winkel-, Linien-, Flächenelementen jetzt solche derselben Art entsprechen.

Die zweite Gleichung ist schon von Clausius abgeleitet worden und als Claususssche Gleichung bekannt; ferner führt sie, wie p. 127 angegeben worden ist, für Elemente senkrecht zur Achse zentrierter Systeme sofort zum Sinussatz. Die Gleichung für ebene Büschel führte, wenn man nur annahm, daß die Linienelemente durch endliche Büschel abgebildet werden sollen, zu dem erweiterten Sinussatz (p. 128).

Beide Gleichungen lassen sich auch als Erweiterungen der Helmholtz-Lagrangeschen Gleichung (p. 77)

$$\beta \gamma = \frac{n}{n'}$$

ansprechen, da diese früher nur für spezielle Systeme abgeleitet worden war. Es ist zu bemerken, daß die Claususssche Ableitung nicht nur allgemeinere Gültigkeit besitzt, sondern auch älter ist wie die von Helmholtz.

Die Gleichung für ebene Büschel gestattet auch, die Sätze über die homozentrische Abbildung, die wir auf p. 103 mit Benutzung der Eigenschaften der Kollineation nur für spezielle Systeme abgeleitet hatten, für beliebige Systeme auszusprechen, was auch von Abbe ursprünglich geschehen ist.

Es gehören also diese Sätze in die in Rede stehende allgemeine Theorie.

Für die Theorie enger Büschel[1] ist die charakteristische Funktion außer von Hamilton selbst von Helmholtz[2] und besonders von Maxwell benutzt worden. Die Methode dieser und ähnlicher (auch der zuletzt erwähnten) Untersuchungen besteht immer in einer Entwickelung der charakteristischen Funktion um einen Hauptlichtweg und Weglassung höherer Potenzen der Variabeln. Der allgemeine Fall eines aus beliebigen Medien mit stetig oder unstetig veränderlichem Index bestehenden Systems wurde von Maxwell[3], Larmor[4] und Herman[5] behandelt.

Maxwell[6] wandte seine Resultate außer auf prismatische, besonders auf achsensymmetrische Anordnungen des Systems an. Bei den letzteren findet die

[1] Besser ist der in der Überschrift des Abschnitts gebrauchte Ausdruck. Ein Büschel (engl. pencil) ist eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von Strahlen, und wird durch die früher erwähnte Funktion V (p. 20) bestimmt, hier handelt es sich immer um eine vierfache Mannigfaltigkeit, die von Maxwell zum Unterschied „a beam of light" genannt wird (Cambr. Phil. Soc. Proc. **1.** 173), um die Strahlen, die von allen Punkten einer Fläche nach allen einer anderen gehen, unter denen sich alle Strahlen des betrachteten Raumes überhaupt befinden. — [2] H. Helmholtz, Hdb. d. physiol. Opt. 1. Aufl., Leipzig 1867, p. 238 (Wissensch. Abh., II, 147, Leipzig 1883). — [3] J. Cl. Maxwell, Proc. of the London Math. Soc. **6.** 1874; Coll. Papers **2.** 381. — [4] J. Larmor, Proc. London Math. Soc. **20.** 181. 1889; **23.** 165. 1892. — [5] R. A. Herman, Quat. Journ. **27.** 191. 1895. — [6] J. Cl. Maxwell, l. c., und ibid. zweite Abhandlung; auch Coll. Papers **2.** 439.

Entwickelung natürlich um die Symmetrieachse statt. Bei Berücksichtigung der ersten Glieder ergab sich nun hier wieder gänzlich unabhängig von der Art des Instruments die „GAUSSsche Theorie". Dieselbe Tatachse ist auch von THIESEN[1] und BRUNS[2] wieder abgeleitet worden, es besteht also in der nächsten Umgebung der Achse einer beliebigen symmetrischen Anordnung die Beziehung der Kollineation.

Das Entstehen dieser Kollineation, die in endlichen Räumen, wie wir bereits wissen, unmöglich ist, erläutert KLEIN[3] in folgender Weise, wobei er sich auf die Strahlen einer Meridianebene beschränkt. Die Bildstrahlen (charakterisiert durch die Geradenkoordinaten u', v') gehen aus den Objektstrahlen (u, v) hervor durch die Abbildungsgleichungen

$$u' = \varphi(u, v) \quad , \qquad v' = \psi(u, v) \quad .$$

Es genugt, diese Funktionen als analytische vorauszusetzen, sie in die TAYLORsche Reihe um einen Strahl $u_0 v_0$[4] zu entwickeln und nur die linearen Glieder beizubehalten, um zu der gesuchten Beziehung zu gelangen:

$$du_0' = a\,du_0 + b\,dv_0$$
$$dv_0' = c\,du_0 + d\,dv_0$$

$$\frac{du_0'}{dv_0'} = \frac{a\dfrac{du_0}{dv_0} + b}{c\dfrac{du_0}{dv_0} + d}$$

Wenn $\dfrac{du_0}{dv_0}$ alle beliebigen Werte annimmt, so erhält man alle Punkte der Geraden $u_0 v_0$ als Schnittpunkte mit allen Geraden $u_0 + du_0$, $v_0 + dv_0$, das Entsprechende gilt von $\dfrac{du_0'}{dv_0'}$. Berucksichtigt man also nur Gerade, die unendlich nahe an $u_0 v_0$, $u_0' v_0'$ liegen, so sind die Punkte von $u_0' v_0'$ nach der obigen Gleichung eindeutig projektiv den Punkten von $u_0 v_0$ zugeordnet.

Man erhält nach KLEIN[5] mit diesen einfachen Mitteln leicht eine Übersicht des ganzen Vorganges der Strahlenabbildung. Einer Kurve, als Geradengebilde (Enveloppe) aufgefaßt (Punkte entsprechen einander nicht!), entspricht eine bestimmte Bildkurve. Alle Objektkurven, die $u_0 v_0$ enthalten, besitzen Bildkurven, die $u_0' v_0'$ enthalten. Alle Objektkurven, die für $u_0 v_0$ dasselbe $\dfrac{du}{dv}$ besitzen, die also $u_0 v_0$ in demselben Punkte berühren, berühren $u_0' v_0'$ infolge der eindeutigen Beziehung zwischen $\dfrac{du_0}{dv_0}$ und $\dfrac{du_0'}{dv_0'}$ ebenfalls in demselben Punkte („Berührungstransformation", s. o.)[6].

Im Spezialfalle können die Kurven in Geradenbüschel durch den Berührungspunkt zerfallen (solche sind ja auch Geradengebilde, die $u_0 v_0$ enthalten). Ein solches Objektstrahlenbüschel wird im allgemeinen nicht in ein homozentrisches Büschel, sondern in irgend eine Kurve abgebildet werden („Kaustik").

Aber die Berührungspunkte verschiedener Objektgeradengebilde (Kurven oder zerfallende Kurven) mit einer Objektgeraden $u_0 v_0$ stehen zu den Beruhrungspunkten der entsprechenden Geradengebilde mit der Bildgeraden $u_0' v_0'$ nach der oben gefundenen Gleichung in projektiver Beziehung (Dieser Satz kommt ohne Vernachlässigungen zustande!)

Es werden also auf zwei einander entsprechenden Geraden projektive Punktreihen durch die Beruhrungspunkte entsprechender Kurven (oder Strahlenbüschel) definiert. Ist die Abbildung symmetrisch zu einer Objektgeraden G und der entsprechenden Bildgeraden G', so müssen die Bilder von (Kurven, die G berühren oder, im allein interessierenden Spezialfalle, von) Geradenbüscheln, die G enthalten, das sind aber G' berührende Kaustiken, wegen der Symmetrie zu G' in G' eine Spitze haben (Figur 42, folgende Seite).

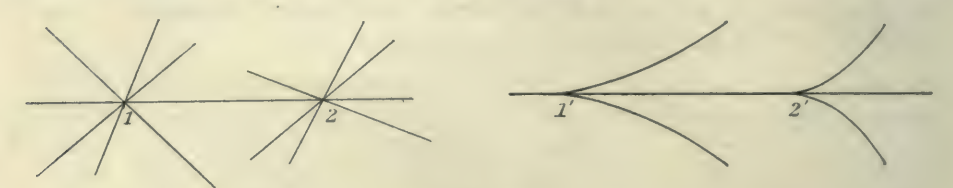
Diese Spitzen 1', 2' sind also den objektseitigen Brennpunkten auf der Achse, 1, 2, projektiv zugeordnet.

Die Beschränkung auf die ersten Glieder der Entwickelung bedeutet die Vernachlässigung der Kaustiken bis auf die nächste Umgebung der Spitzen.

---

[1] M. THIESEN, Sitzungsber. Berl. Akad. d. Wissensch. **35.** 804. 1890. — [2] H. BRUNS, Eikonal, p. 410. — [3] F. KLEIN, l. c., p. 380. KLEIN bedient sich der dieser Geradenbeziehung dual entsprechenden Punktebeziehung und übersetzt sein Resultat wieder in die duale Form zurück. — [4] Die Achse nimmt innerhalb der einzelnen Meridianebenen keine ausgezeichnete Stellung ein, sondern erhält sie nur dadurch, daß sie allen Meridianebenen angehört. — [5] Wir benutzen hier eine dem Verf. gütigst zur Verfügung gestellte Nachschrift des Kollegs von F. KLEIN. — [6] Es ist hier zu bemerken, daß durch die Beschränkung KLEINs auf ebene Strahlenfelder die MALUSsche Bedingung wegfällt. Sie ist dann unter Voraussetzung der Stetigkeit ohne weiteres erfüllt.

Bei Berücksichtigung höherer Potenzen erhält man Aberrationsformeln. In diesen kommen aber nicht wie z. B. bei SEIDEL die Elemente des Systems (Radien, Dicken, Abstände) vor, sondern Ableitungen der charakteristischen Funktion. Sie würden also nur dann direkt brauchbar werden, wenn man für das betrachtete System oder den betrachteten Systemtypus die charakteristische Funktion berechnete. Das ist meistens nicht ausführbar und auch wenn es möglich ist, stellt diese Methode einen Umweg gegenüber der direkten auf einer Erweiterung der GAUSSschen Betrachtungen beruhenden für zentrierte Kugelflächen geltenden Berechnung dar. Dagegen leistet die Ableitung der Abbildungsfehler mit der charakteristischen Funktion den Nachweis, „daß die gewöhnliche Be-



Figur 42.

Eine Objektgerade mit zwei Büscheln, die diese Gerade enthalten; und die entsprechende Bildgerade mit den Kaustiken, die aus den Büscheln infolge der strahlenweise vollzogenen Abbildung hervorgehen. Diese Abbildung ist symmetrisch um die beiden Geraden vorausgesetzt.

handlung der sogenannten sphärischen Aberrationen großenteils Sätze enthält, die von der Erzeugungsweise der dort betrachteten strahlenweisen Abbildungen ganz unabhängig sind" (BRUNS).

So hat MAXWELL z. B. die ZINKEN-SOMMERschen Formeln, THIESEN[1] die fünf SEIDELschen Abbildungsfehler (ebenso wie später BRUNS) aus der bloßen Bedingung einer zentrierten Abbildung hergeleitet. Aber auch diese Resultate hat HAMILTON unzweifelhaft schon besessen, wie FINSTERWALDER[2] im Vorwort zu einer aus dem Nachlasse SEIDELS herausgegebene Abhandlung nachgewiesen hat. Er hat nach einem vorläufigen kurzen Bericht[3] nicht nur die SEIDELschen Resultate (in der bereits charakterisierten praktisch nicht verwendbaren Form), sondern auch einen Teil der neueren von FINSTERWALDER abgeleiteten Ergebnisse gekannt.

V. Die chromatischen Abweichungen dioptrischer Systeme. Die Theorie der Achromasie.

In den vorangehenden beiden Abschnitten ist immer von dem Brechungsexponenten eines Mediums schlechthin die Rede gewesen, als wenn derselbe eine eindeutige Konstante des betreffenden Mediums wäre. Tatsächlich ist aber, wie bei früherer Gelegenheit bereits kurz erwähnt (p. 8), der Brechungsexponent aller bisher untersuchten Substanzen von der Wellenlänge des Lichtes abhängig gefunden worden, $n = f(\lambda)$. Die Auseinandersetzungen der vorigen Ab-

[1] Der SEIDELS Arbeiten offenbar nicht gekannt hat und unabhängig zu demselben Resultate gelangt ist. — [2] Sitzber. d. math.-phys. Kl. d. Akad. d. Wiss. zu München **28**. 395. 1898. — [3] W. R. HAMILTON, On some Results of the View of a Characteristic Function in Optics, in Rep. of the third meeting af the British Association held at Cambridge in 1833. London 1831. p. 360.

schnitte darüber, auf welche Weise die geometrisch mögliche allgemeine optische Abbildung in Systemen zentrierter Kugelflächen realisiert werden könne, sei es von selbst, sei es — in erweitertem Gebiete — durch geeignete Anordnung der wirksamen Flächen, sind daher erschöpfend nur bei Verwendung einfarbigen Lichtes oder für den besonderen Fall rein katoptrischer Systeme; denn bei der Reflexion ist $n' = -n$, also $n'/n = \text{const}$ für jedes λ. Wenn aber das Licht, wie gewöhnlich, weiß oder überhaupt zusammengesetzt ist und wenn Brechungen in dem betrachteten System wirksam sind, so wird durch die Änderung der Brechungsexponenten mit der Wellenlänge eine entsprechende Variation aller Faktoren der Abbildung mit der Wellenlänge (Farbe) des angewandten Lichtes herbeigeführt. Ebensowohl die Grundfaktoren der Abbildung durch eine, und infolgedessen auch durch beliebig viele brechende Flächen (p. 72 ff.) — also die Lage der Brennebenen und die Größen der Brennweiten jedes Systems — zeigten sich uns früher abhängig von den Brechungsexponenten der Medien, als auch die im vorangehenden Abschnitt betrachteten Ausdrücke für die verschiedenen Bildfehler. Beide sind also in dioptrischen Systemen Funktionen der Wellenlänge. Infolgedessen werden, wie schon NEWTON, der Entdecker der Dispersion, für die einfachsten Fälle nachwies[1], von einem Objekte, welches zu gleicher Zeit Licht verschiedener Wellenlänge ausstrahlt, durch ein dioptrisches System Bilder entworfen, deren Lage auf der Achse, Vergrößerung und qualitative Eigenschaften im allgemeinen sämtlich mit der Farbe variieren.

Man bezeichnet diese Variationen der Bildeigenschaften mit der Wellenlänge als chromatische Aberrationen oder Abweichungen wegen der Farbenzerstreuung.

Dieselben bilden für den wesentlichen Zweck der optischen Systeme: deutliche Bilder zu erzeugen, ein ebenso großes und unter Umständen sogar ein vergleichsweise noch größeres Hindernis, als z. B. die Variation der Schnittweiten u. s. w. der von einem Objektpunkt ausgegangenen Strahlen mit der Öffnung des Büschels oder mit seiner Neigung gegen die Achse, d. h. als die im vorigen Abschnitt unter dem Gesamtnamen „sphärische Aberrationen" (oder Abweichungen wegen der Kugelgestalt der abbildenden Flächen) zusammengefaßten Bildfehler. Und jener Zweck der optischen Instrumente würde offenbar bei allen dioptrischen Systemen nur sehr unvollkommen erreicht, wenn es nicht möglich wäre, durch geeignete Anordnung und Wahl der das System konstituierenden Einzelelemente diese Variationen der Bildeigenschaften mit der Wellenlänge zu kompensieren — in ganz ähnlicher Weise, wie gleichzeitig die Variationen der Strahlen von einerlei Farbe mit Apertur und Neigung des Büschels aufgehoben werden. Man bezeichnet die Ausführung dieser Kompensation als Achromatisierung und ihr Ergebnis als **„Achromasie"**.

Da alle Eigenschaften eines Linsensystems, einschließlich der Aberrationen, mit von dessen Medien und daher auch von der Wellenlänge abhängen, so kann in bezug auf sie alle Achromasie erstrebt und hergestellt werden. In diesem Sinne kann man, wie von den chromatischen Fehlern, so auch von einer Achromasie der Bildorte, der Vergrößerung, der Brennweiten und ebenso der Verzerrung, Bildwölbung u. s. w. sprechen. Es ist aber — aus Gründen, die im Verlaufe der weiteren Darstellung von selbst hervortreten werden — die Herstellung aller dieser verschiedenen Arten der Achromasie für die Erzeugung deutlicher, d. h. von dem Einflusse der Chromasie anscheinend befreiter Bilder keineswegs gleich wichtig, geschweige denn stets die gleichzeitige Erreichung aller Arten von Achromasie erforderlich. Man kann sich vielmehr praktisch stets mit einer partiellen Achromasie begnügen, welche sich nur auf gewisse —

[1] ISAAC NEWTON, Optice lib. I. pars 1, prop. 7. Lect. opt. 261.

je nach den sonstigen Bedingungen des Falles verschiedene — Bildeigenschaften erstreckt. Die chromatischen Variationen einiger Bildeigenschaften, wie die der Wölbung, der Koma, des Astigmatismus sind z. B. bisher stets außer Acht gelassen worden, d. h. man hat sich stets damit begnügt, den betreffenden Bildfehler nur für eine Farbe aufzuheben.

Die Vermehrung der Zahl der Flächen, aus welchen das System zusammengesetzt werden müßte, um auch diese Eigenschaften zu achromatisieren, würde mit der durch sie bedingten Lichtschwächung (durch Reflexionen und Absorptionen), Gewichtserhöhung u. s. w. viel unangenehmer werden, als es jene relativ wenig bemerkbaren Fehler sind.

Wie betrachten zuerst

Die Variation der Fundamentaleigenschaften von Linsensystemen mit der Wellenlänge des Lichtes und die Bedingungen ihrer Kompensation (Achromasie).

Die Wirkung eines beliebig zusammengesetzten Systems läßt sich (nach p. 77) bestimmen aus der Wirkung bezw. den Grundfaktoren der einfachsten Partialsysteme, in welche es zerlegt gedacht werden kann, also schließlich der einzelnen, je zwei Medien trennenden Flächen. Dementsprechend kann auch die Variation der Wirkung des gesamten Systems mit der Farbe berechnet werden aus den Variationen, welche an den einzelnen Dioptern stattfinden. Man hat nur die a. a. O. gefundenen Ausdrücke für die Brennweiten und Brennpunktsorte nach den n zu variieren. Die Variationen der Brennweiten und Brennpunktsabstände der einzelnen aber ergeben sich nach p. 73 zu

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{df}{f} = \frac{ds_F}{s_F} = \frac{dn}{n} - \frac{d(n'-n)}{n'-n} = \frac{dn}{n} - \frac{\Delta(dn)}{\Delta(n)} \\ &\text{und} \\ &\frac{df'}{f'} = \frac{ds_{F'}}{s_{F'}} = \frac{dn'}{n'} - \frac{d(n'-n)}{n'-n} = \frac{dn'}{n'} - \frac{\Delta(dn)}{\Delta(n)} \end{aligned}\right. ,$$

wenn der der Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ entsprechende Brechungsexponent dies- und jenseits der brechenden Fläche mit $n + dn$ und $n' + dn'$ bezeichnet wird und das Zeichen Δ, wie stets, die Differenz der gestrichenen und ungestrichenen Größen bedeutet. Hat man auf diese Weise[1] die Größen df/f und df'/f' für das ganze System bestimmt, dann ist das der Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ entsprechende Bild eines Objekts, welches vom vorderen Brennpunkte des Systems für λ, F_λ, um x, von dem für $\lambda + d\lambda$, $F_{\lambda + d\lambda}$, um $x + dx$ absteht, von dem der letzteren Wellenlänge entsprechenden hinteren Brennpunkte des Systems $F'_{\lambda + d\lambda}$, um die Strecke $x' + dx'$ entfernt, wobei dx' sich aus der Fundamentalformel

$$x \cdot x' = ff'$$

ergibt zu

$$(1\,\text{a})\qquad dx' = x'\left(\frac{df}{f} + \frac{df'}{f'} - \frac{dx}{x}\right) .$$

Die Vergrößerungen des Systems in der Richtung der Achse und senkrecht zu ihr sowie das Konvergenzverhältnis in konjugierten Punkten für die Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ lassen sich dann ebenso einfach mit den Werten derselben Größen für die Wellenlänge λ in Beziehung setzen durch Variation der anderen unter (I) auf p. 47 zusammengestellten Grundgleichungen. Wenn

[1] Interessante graphische Behandlungen dieser und verwandter Aufgaben von F. KESSLER, Zeitschr. f. Math. u. Phys. **29**. 1. 1884.

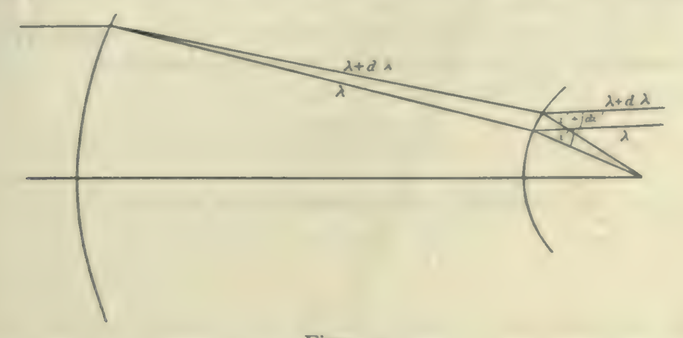
$$\alpha_{\lambda+d\lambda} = \alpha + d\alpha \quad , \quad \beta_{\lambda+d\lambda} = \beta + d\beta \quad \text{und} \quad \gamma_{\lambda+d\lambda} = \gamma + d\gamma$$

gesetzt wird, so findet man

$$(1\,b) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha}{\alpha} &= \frac{dx'}{x'} - \frac{dx}{x} \\ \frac{d\beta}{\beta} &= \frac{df}{f} - \frac{dx}{x} = \frac{dx'}{x'} - \frac{df'}{f'} \\ \frac{d\gamma}{\gamma} &= \frac{dx}{x} - \frac{df'}{f'} = \frac{df}{f} - \frac{dx'}{x'} \quad . \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen geben den Einfluß an, den die relativen Variationen der Brennweiten und der x, x' d. h. indirekt auch der Brennpunktsorte auf die entsprechenden der Größen α, β, γ haben.

Schon bei einem zweifachen Diopter z. B. einer beiderseits von Luft begrenzten Linse endlicher Dicke (vgl. p. 79; wir gebrauchen dieselben Bezeichnungen wie dort) bietet sich die Möglichkeit einer Achromatisierung der Brennweiten oder der Brennpunktsorte dar — und bei einer solchen



Figur 43.
Eine dicke Linse (zerstreuender Meniskus) mit derselben hinteren Brennweite für zwei verschiedene Farben.

sogar unabhängig von der Dispersion ihrer Substanz — da in den beiden Radien und der Dicke genügend Elemente gegeben sind, um eine der Gleichungen

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{df}{f} &= \frac{df_1}{f_1} + \frac{df_2}{f_2} - \frac{d\Delta}{\Delta} = 0 \\ d(f_1 - \sigma) &= df_1 - d\sigma = df_1 - \sigma\left(\frac{df_1}{f_1} + \frac{df_1'}{f_1'} - \frac{d\Delta}{\Delta}\right) = 0 \end{aligned} \right.$$

oder eine der entsprechenden für zweite Brennweite und zweiten Brennpunkt geltenden zu erfüllen. Durch graphische Darstellung kann man sich dies einer verbreiteten Meinung widerstreitende Ergebnis[1] leicht veranschaulichen. Ein zur Achse paralleler weißer Strahl (Figur 43) wird durch Brechung z. B. an einer konvexen Fläche in ein dichteres Medium nach der Achse zu gebrochen und zwar desto mehr, je kleiner die Wellenlänge ist. Es kann nun — wie man sich leicht überzeugt — Lage und Krümmung einer darauf folgenden Fläche so gewählt werden, daß die Strahlen sie unter desto geringeren Incidenzwinkeln treffen, je brechbarer sie sind und dies in solchem Verhältnis, daß die austretenden Strahlen verschiedener Wellenlänge entweder einander parallel austreten, wie

[1] Dasselbe ist zuerst von ZINKEN-SOMMER (Dioptrik der Linsensysteme, Braunschweig 1870. p. 98) gefunden worden. S. auch KESSLER (a. a. O.).

in Figur 43 (Gleichheit der Brennweiten), oder nach demselben Punkte hin konvergieren (Achromasie in bezug auf die Brennpunkte).

Statt einer einzigen dicken Linse in Luft wählt man zu demselben Zwecke vorteilhafter zwei dünne, durch einen größeren Abstand getrennte Linsen. Im Grenzfalle, bei unendlich dünnen Linsen, fanden wir (p. 86)

$$\varphi = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{D}{f_1 f_2} = \varphi_1 + \varphi_2 - D\varphi_1\varphi_2 \quad ,$$

worin D der Linsenabstand (bei dickeren Linsen der Abstand der einander zugewandten Hauptpunkte) ist. Bei einer einzigen dünnen Linse in Luft war

$$\varphi = \frac{1}{f} = (n-1)(\varrho_1 - \varrho_2) = (n-1)k \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{df}{f} = -\frac{dn}{n-1} \quad ,$$

$$\frac{df}{f} = -\frac{dn}{n-1} = -\frac{1}{\nu} \quad ,$$

wenn wir die Größe $\frac{n-1}{dn}$, das Reziproke des sogen. **Zerstreuungsverhältnisses** der Linsensubstanz, mit ν bezeichnen: daher ergibt sich als Bedingung für die Konstanz von φ oder f in bezug auf λ nach einigen Umformungen die, daß

$$D = \frac{\nu_2 f_2 + \nu_1 f_1}{\nu_2 + \nu_1} \quad , \tag{3}$$

sei, also bei gleichem Material (ν) der beiden Linsen einfach

$$D = \frac{f_2 + f_1}{2} \quad . \tag{3a}$$

Dies ist die Bedingung, welcher, wie wir später sehen werden, die aus einfachen Linsen bestehenden Okulare in erster Linie genügen müssen[1].

Sind die beiden dünnen Linsen ganz an einander gerückt, so daß $D = 0$ gesetzt werden kann, so ist die Brennweite (hier zugleich Brennpunktsabstand) des ganzen Systems gegeben durch

$$\varphi = \frac{1}{f} = (n_1 - 1)k_1 + (n_2 - 1)k_2 \quad ;$$

soll nun

$$d\varphi = dn_1 k_1 + dn_2 k_2 = 0 \tag{4}$$

sein, so müssen die Krümmungsdifferenzen der Linsenflächen

$$k_1 = \varrho_1' - \varrho_1'' \qquad \text{und} \qquad k_2 = \varrho_2' - \varrho_2''$$

den Bedingungen genügen

$$\frac{k_1}{k_2} = -\frac{dn_2}{dn_1} \qquad \text{oder} \qquad \frac{f_1}{f_2} = -\frac{\nu_1}{\nu_2} \tag{4a}$$

und zwar bestimmt sich aus den beiden obigen Bedingungsgleichungen (4) (denen des „Maßstabs" und der Achromasie)

$$k_1 = \frac{1}{f}\,\frac{1}{dn_1}\,\frac{1}{\nu_1 - \nu_2} \quad ; \quad k_2 = -\frac{1}{f}\,\frac{1}{dn_2}\,\frac{1}{\nu_1 - \nu_2} \quad . \tag{4b}$$

[1] Über Achromasie mit einer Glasart s. C. V. L. CHARLIER, Stockholm Akad. Förh. **55**. Nr. 9. 1898; ferner L. SCHUPMANN, Die Medialfernrohre. Leipzig 1899.

Es läßt sich also in diesem Falle eine Achromasie der Grundfaktoren der Abbildung nur dann erreichen, wenn ν_1 nicht gleich ν_2, d. h. die Zerstreuungsverhältnisse der Linsensubstanzen von einander verschieden sind. Erst die durch CHESTER MORE HALL (1720) vorbereitete, dann durch KLINGENSTIERNA (1754) und DOLLOND (1757) sicher gestellte Erkenntnis, daß dies bei vielen Substanzen tatsächlich der Fall sei, gab die Unterlage dafür, eine Achromasie überhaupt zu erstreben[1]. NEWTON hatte diese Tatsache bestritten, EULER gelangte von der falschen Annahme der Achromasie des Auges aus zu der richtigen Erkenntnis, deren energische Betonung DOLLOND zu seinen entscheidenden Versuchen veranlaßte.

Man sieht aus Gleichung (4) und (4a) ferner, daß die beiden zu einem achromatischen System kombinierten Linsen stets Brennweiten von entgegengesetzten Vorzeichen erhalten müssen; die eine Linse muß eine kollektive (positives f), die andere eine dispansive (negatives f) sein. Soll z. B. die Brennweite des ganzen Systems positiv sein, so muß die der sie konstituierenden positiven Linse natürlich kürzer sein als die der dazu gehörigen negativen und als diejenige des Gesamtsystems. Das Zerstreuungsvermögen der negativen Linse muß dann das größere sein, so daß durch diese Linse trotz ihrer geringeren Stärke die Dispersion der anderen kompensiert wird, ohne daß zugleich deren kollektive Fundamentalwirkung mit aufgehoben wird; bei negativer Gesamtbrennweite umgekehrt. Je verschiedener die Zerstreuungsvermögen der Linsensubstanzen sind, mit desto geringeren Krümmungen läßt sich *caet. par.* die Achromasie eines Systems von gegebener Brennweite erreichen. —

Über Achromasie dreifacher Kombinationen s. HARKNESS, Am. Journ. of Sc. and Arts. 1879. Man hat

$$\varphi = (n_1 - 1)\,k_1 + (n_2 - 1)\,k_2 + (n_3 - 1)\,k_3 \quad ,$$

$$d\varphi = dn_1\,k_1 + dn_2\,k_2 + dn_3\,k_3 = 0 \quad .$$

Setzt man aus irgend welchen Gründen

$$k_3 = p\,k \quad ,$$

so wird

$$k_1 = \frac{dn_2 \cdot \varphi}{dn_2\,(n_1 - 1 + p\,(n_3 - 1)) - (n_2 - 1)(dn_1 + p\,dn_3)} = \frac{dn_2}{M} \cdot \varphi$$

$$k_2 = -\frac{dn_1 + p\,dn_3}{M} \cdot \varphi \quad .$$

Handelt es sich darum, in einem System nicht für einzelne oder alle Grundfaktoren der Abbildung Achromasie herbeizuführen, sondern nur für eine bestimmte Lage des Objekts und Bildes, so kann man hier, ganz analog wie für die Berechnung der einer Wellenlänge entsprechenden Elemente zwei Wege einschlagen: Entweder man ermittelt die in dem Gesamtsystem stattfindende Variation der Grundfaktoren der Abbildung und hieraus nach den Formeln (1) bis (1b) die Variation der in Frage stehenden besonderen Größen — oder man ermittelt diese letztere Variation direkt aus den Gleichungen, welche die gesuchten Größen selbst (Bildpunkte, Vergrößerungs-, Konvergenzverhältnis) für die besondere Lage des Objekts zu berechnen gestatten. Die hierzu dienenden Gleichungen schließen die früheren, zur Ermittelung der Variation der Grund-

[1] Näheren Bericht über die sehr merkwürdige Geschichte der Achromasie geben J. BOSCOVICH, Von den verbess. dioptr. Fernrohren. Wien 1765. Vorrede; und EULERS Vorrede zu seiner „Instruction détaillé . . .“ St. Petersburg 1774; zitiert bei H. PITSCH. Wien. Ber. **100.** 1105. 1891. PRIESTLEY, Geschichte u. s. w. der Optik; übersetzt von KLÜGEL. Leipzig 1776. p. 243. 520. BARLOW und BREWSTER in ihren Artikeln „Optics“ in der 7. und 8. Aufl. der Encycl. Brit. p. 408 bezw. p. 175. 1823. Letzterer auch in seinem Leben NEWTONS, übersetzt von GOLDBERG, Leipzig 1833. p. 10 und p. 45–56. Man sehe ferner WILDE, Gesch. d. Optik **2.** 71. LITTROW, Dioptrik, p. 457 und LOEWENHERZ, Zeitschr. f. Instrumentenk. **2.** 275. 1882; auch H. v. HELMHOLTZ, Handb. d. physiol. Optik. 2. Aufl. 1896. p. 168.

faktoren dienenden, als besonderen Fall ein (in welchem $s = \infty$); sie sollen daher hier entwickelt werden und zwar wollen wir wiederum die Verundeutlichung des Bildes feststellen, die durch die chromatische Aberration — und zwar zunächst der parachsialen Strahlen verursacht wird.

Die Größe der chromatischen Aberration für ein gegebenes Objekt.

Die Schnittweiten s, s' vor und nach der Brechung an einer Fläche vom Radius r, welche beiderseits von Medien begrenzt ist, deren Brechungsindizes für die Wellenlänge λ bezw. n und n' sind, stehen bei parachsialen Strahlen in dem Zusammenhang, daß

$$n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right) = Q$$

ist. Ihre Variationen beim Übergang von der Wellenlänge λ zur Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ werden daher durch Variation von Q nach λ erhalten. Es ist nun

$$[dQ]_\lambda = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) dn + \frac{n}{s^2} ds = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right) dn' + \frac{n'}{s'^2} ds' \quad ,$$

oder

$$Q\frac{dn}{n} + \frac{n}{s^2} ds = Q\frac{dn'}{n'} + \frac{n'}{s'^2} ds' \quad ,$$

also

$$Q\varDelta\left(\frac{dn}{n}\right) = -\varDelta\left(\frac{n}{s^2} ds\right) \quad . \tag{5}$$

Über den Ort, an welchem ein chromatisches Bild aufgefaßt wird und daher auch über die Größe des durch die chromatische Aberration hervorgerufenen Zerstreuungskreises, welcher an Stelle eines scharfen Bildpunktes auftritt, befindet man sich in einer ähnlichen Unsicherheit, wie bei dem der sphärischen Aberration (vgl. p. 112). Da die Farben, in welche weißes Licht durch Dispersion zerlegt wird, physiologisch einen sehr ungleichen, ja sogar mit der Intensität der Lichtquelle und auch individuell erheblich schwankenden Effekt haben, so sind dieselben für die tatsächliche Auffassung des Bildortes und die Beurteilung der Größe des Zerstreuungskreises sehr ungleichwertig — analog der Ungleichwertigkeit der unter verschiedener Achsenneigung nach dem Bilde konvergierenden Strahlen von einerlei Farbe bei der sphärischen Aberration[1]. Für ihre Bewertung sind die Unterlagen nur durch experimentelle Vergleiche der physiologischen Eindruckstärken verschiedenwelligen Lichtes zu beschaffen. Solche Untersuchungen wurden zuerst von FRAUNHOFER[2] ausgeführt und in neuerer Zeit von VIERORDT[3], ABNEY und FESTING[4], E. BRODHUN[5], A. KÖNIG[6], E. GRUBER[7]. Wir werden auf dieselben bald zurückzukommen haben. Für den Augenblick können wir diese

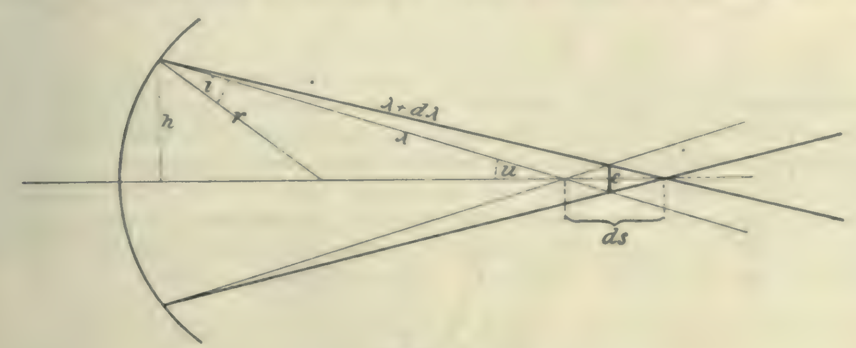
---

[1] S. H. v. HELMHOLTZ, Physiol. Optik. 1. Aufl. p. 132; 2. Aufl. p. 164. — [2] Denkschr. Münch. Akad. d. Wissensch. (für 1814/15) p. 213. 1817. Ges. Schriften Münch. 1888. p. 18, vgl. auch C. A. STEINHEIL und L. SEIDEL, Abh. Münch. Akad. d. Wissensch. **5.** 1 abgedruckt in A. STEINHEIL u. E. VOIT, Handb. d. angew. Optik. Leipzig 1891. p. 248. — [3] VIERORDT, POGG. Ann. **137.** 200. 1869. Die Anwendung des Spektralapparates u. s. w. Tübingen 1871. p. 45 ff. — [4] ABNEY und FESTING, Phil. Trans. **177.** 423. 1886; **179.** 1888; **183.** 531. 1892. — [5] E. BRODHUN, Beiträge zur Farbenlehre. Inaug.-Diss. Berlin 1887. — [6] ARTH. KÖNIG, Beitr. z. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorg. Festschrift für VON HELMHOLTZ. Leipzig 1891; auch separat unter dem Titel „Über den Helligkeitswert der Spektralfarben bei verschiedener absoluter Intensität". S. auch v. HELMHOLTZ, Physiol. Optik. 2. Aufl., p. 428 ff. (weitere Literaturangaben in ARTH. KÖNIGS Literaturübersicht am Schluß dieses Werkes). — [7] E. GRUBER, WUNDTS Philos. Stud. **9.** 429. 1893.

Details unberücksichtigt lassen, indem wir nur die beiden einzelnen Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ beachten, von denen wir annehmen wollen, daß sie physiologisch gleichwertig seien und den Zerstreuungskreis berechnen, welcher von ihnen allein verursacht wird. Die geringste Einschnürung des nach dem Bilde eines Punktes zu konvergierenden Lichtbüschels findet dann (s. Figur 44) in der Mitte zwischen den beiden den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ entsprechenden Bildpunkten statt und ihr Durchmesser c ist bis auf Größen von höherer als der zweiten Ordnung

$$c = \pm\, ds \cdot u \qquad \text{bezw.} \qquad c' = ds' \cdot u' \quad ,$$

wenn u bezw. u' der halbe Öffnungswinkel des nach dem Objekt- bezw. Bildpunkte hin konvergierenden Büschels ist. Das Vorzeichen von c ist an sich will-



Figur 44.
Der Zerstreuungskreis der chromatischen Aberration.

kürlich. Wir wollen es, wie bei der sphärischen Aberration, so wählen, daß es bei einer kollektiven Brechung positiv wird, also, indem λ als unabhängige Variable gedacht wird, oben das positive Vorzeichen annehmen.

Wie früher auf das Objekt zurückbezogen, ist vor und nach der betrachteten k ten Brechung (vgl. p. 114)

$$n_k\, u_k\, c_k = n_1\, u_1\, (c_0)_k \qquad \text{und} \qquad n_k'\, u_k'\, c_k' = n_1\, u_1\, (c_0)_k' \quad ,$$

daher, da

$$u_k = \frac{h_k}{s_k} \qquad \text{und} \qquad u_k' = \frac{h_k}{s_k'} \quad .$$

$$d s_k = \frac{c_k}{u_k} = (c_0)_k' \frac{n_1\, u_1}{n_k\, u_k^2} = (c_0)_k\, (n_1\, u_1)\, \frac{s_k^2}{n_k\, h_k^2}$$

und ebenso

$$d s_k' = \frac{c_k'}{u_k'} = (c_0)_k\, \frac{n_1\, u_1}{n_k'\, u_k'^2} = (c_0)_k'\, (n_1\, u_1)\, \frac{s_k'^2}{n_k'\, h_k^2} \quad .$$

Tragen wir diese Werte von ds_k und ds_k' in (5) ein, so wird nach einigen Umformungen

$$\Delta (c_0)_k = -\, \frac{h_k^2}{n_1\, u_1}\, Q_k\, \Delta \left(\frac{dn}{n}\right)_k \quad ,$$

oder für die Rechnung bequemer

$$\Delta (c_0)_k = -\, (n_1\, u_1) \left(\frac{s_1}{n_1}\right)^2 \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^2 Q_k\, \Delta \left(\frac{dn}{n}\right)_k \quad ,$$

die durch die Brechung an der k ten Fläche bewirkte Zunahme des auf die Objektseite bezogenen chromatischen Zerstreuungskreises.

Seine ganze Größe nach der $p$ten Brechung ist, wenn er vor der ersten Brechung = Null war

$$c_0^{(p)} = \sum \Delta (c_0)_k = -(n_1 u_1)\left(\frac{s_1}{n_1}\right)^2 \sum \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^2 Q_k \Delta \left(\frac{dn}{n}\right)_k \quad . \tag{6a}$$

In angularem Maße, bei unendlich fernem Objekt in Luft, beträgt derselbe

$$\gamma_0^{(p)} = \sum \Delta (\gamma_0)_k = + h_1 \sum Q_k \left(\frac{h_k}{h_1}\right)^2 \Delta \left(\frac{dn}{n}\right)_k \tag{7}$$

oder, wenn wir den Wert, welchen die rechtsstehende Summe für eine Brennweite des Gesamtsystems = 1 annimmt, mit G bezeichnen

$$\gamma_0^{(p)} = + \left(\frac{h_1}{f}\right) \cdot G \quad . \tag{7a}$$

Die durch die Chromasie bewirkte Verundeutlichung eines unendlich entfernten Objekts ist also bei gegebener Konstruktion eines Systems dem Verhältnis von Öffnung zu Brennweite einfach proportional und — wie die durch sphärische Aberration bewirkte — in ihrem Winkelwert von der Größe der Brennweite selbst unabhängig.

Man kann aus dem gemäß (6a) oder (7) berechneten Zerstreuungskreis, ebenso wie bei der sphärischen Aberration, auch wieder rückwärts die nach der $k$ten Brechung vorhandene Längsaberration berechnen, nämlich

$$d s_p' = (s'_{\lambda + d\lambda} - s'_\lambda)_p = -\left(\frac{n_1 u_1}{n_p' u_p'}\right)^2 \left(\frac{n_p'}{n_1 u_1}\right) c_0^{(p)} = -\frac{n_p'}{n_1 u_1} \beta^{(p)2} c_0^{(p)} \quad .$$

Bei unendlich fernem Objekt ist diese Längsaberration zugleich die Variation des Brennpunktes und zwar

$$d s_p' = d s_F' = + \left(\frac{f'}{h_1}\right) f' \cdot \gamma_0^{(p)} \quad .$$

Wie wir vorhin sahen, läßt sich die chromatische Aberration für den Achsenpunkt schon bei einem zweifachen Diopter aufheben; bei einem aus drei und mehr Flächen zusammengesetzten Systeme ist man daher im allgemeinen imstande, die chromatische und sphärische Aberration für Achsenpunkte durch geeignete Wahl der Krümmungen jener Flächen gleichzeitig aufzuheben.

Noch einfacher als die Variation des Bildortes mit der Farbe läßt sich die der Lateral- und Angularvergrößerung bestimmen.

Die Lateralvergrößerung bei der Brechung an einer einzelnen, der $k$ten, Fläche ist nach p. 75

$$\frac{y_k'}{y_k} = \beta_k = \frac{n_k s_k'}{n_k' s_k} \quad ,$$

also für ein System von p Flächen

$$\beta^{(p)} = \frac{y_p'}{y_1} = \frac{y_1'}{y_1} \cdot \frac{y_2'}{y_2} \cdot \ldots \ldots \frac{y_k'}{y_k} \ldots \ldots \frac{y_p'}{y_p}$$

oder

$$\frac{y'}{y} = \frac{n_1}{n_p'} \left(\frac{s_1'}{s_1}\right) \left(\frac{s_2'}{s_2}\right) \ldots \ldots \left(\frac{s_k'}{s_k}\right) \ldots \ldots \left(\frac{s_p'}{s_p}\right) \quad ,$$

daher

$$\frac{d\beta}{\beta} = \sum \Delta \left(\frac{ds}{s}\right)_k + \frac{dn_1}{n_1} - \frac{dn_p'}{n_p'} = \sum \Delta \left(\frac{ds}{s} - \frac{dn}{n}\right)_k = \sum \Delta \left(\frac{ds}{s - r}\right)_k \quad , \tag{8}$$

wenn man Gleichung (5) benutzt.

In gleicher Weise ist das Konvergenzverhältnis für ein System von p Flächen

$$\frac{u_p'}{u_1} = \frac{u'}{u} = \gamma^{(p)} = \left(\frac{s_1}{s_1'}\right) \cdot \left(\frac{s_2}{s_2'}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{s_k}{s_k'}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{s_p}{s_p'}\right) \quad ,$$

daher

$$(9) \qquad \frac{d\gamma}{\gamma} = -\sum \left(\frac{ds}{s}\right)_k \quad ,$$

eine Gleichung, die auch schon in Verbindung mit (8) aus $\beta\gamma = -(n/n')$ folgt.

Für die praktische Anwendung der vorstehenden Gleichungen (6) bis (9) ist vorausgesetzt, daß ein parachsialer Strahl der Wellenlänge λ von dem gegebenen Objektpunkte aus durch wiederholte Anwendung der Grundformel $\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$ und $s_k = s'_{k-1} - d_{k-1}$ auf die einzelnen Flächen des Systems durch dieses verfolgt sei.

Verfolgt man in derselben Weise einen aus ∞ (parallel zur Achse) einfallenden Strahl durch das System, so erhält man aus den Schnittweiten vor und nach der Brechung an den einzelnen Flächen die Brennweite des Bildraumes, wie leicht ersichtlich, zu

$$f' = \frac{h}{\operatorname{tg} u'} = \frac{h_1}{-\left(\frac{h_p}{s_p'}\right)} = -\left(\frac{s_1'}{s_2}\right) \cdot \left(\frac{s_2'}{s_3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{s'_{p-1}}{s_p}\right) \cdot s_p' \quad ;$$

daher die Variation der hinteren Brennweite mit der Farbe aus den analogen Variationen der Einzelschnittweiten

$$(10) \qquad \frac{df'}{f'} = \sum \Delta \left(\frac{ds}{s}\right)_k$$

und ganz ebenso die relative Variation der vorderen Brennweite df/f aus den Elementen, die sich bei der Durchrechnung eines in entgegengesetzter Richtung, von der Bildseite her, durch das System tretenden Strahles ergeben.

Bei der **einfachen dünnen Linse** ist

$$\frac{df'}{f'} = -\frac{dn}{n-1} = -\frac{1}{\nu} \quad ,$$

also der Winkelwert des Zerstreuungskreises im Brennpunkte:

$$\gamma_0 = \frac{c}{f'} = \frac{df'}{f'}\left(\frac{p}{f'}\right) = -\frac{1}{\nu}\left(\frac{p}{f'}\right) \quad .$$

Eine exaktere Behandlung der chromatischen Fehler ist, wie erwähnt, aus denselben Gründen, die bei der Behandlung der monochromatischen Abweichungen angeführt wurden, nur auf dem Grunde der physikalischen Lichttheorie möglich. Danach besteht die Aufgabe, wenn wir zunächst die sphärische Aberration unberücksichtigt lassen, offenbar in der Aufsuchung der Lichtwirkung (der „Beugungseffekte", vgl. p. 16) einer Kugelwelle in einer Ebene, die den Mittelpunkt der Kugel nicht enthält. Diese Aufgabe ist durch die dort erwähnten Arbeiten gelöst; und die Anwendung auf die chromatischen Bildfehler ist in rechnerischer Behandlung von STREHL[1] gemacht worden. Außerhalb der Bildebene klingt mit wachsender Entfernung von derselben die Lichtstärke auf der Achse in kurzen Perioden rasch ab. Im Achsenpunkte der Einstellungsebene wird also nur für eine Farbe das Maximum der von ihren Wellen erzeugbaren Helligkeit statt-

[1] K. STREHL, vgl. p. 106, insbesondere Ztschr. f. Instrumentenk. 17. 50. 77. 106. 301. 1897.

finden, die anderen werden (abgesehen von der verschiedenen spezifischen Helligkeit der Farben), dort eine bedeutend geringere Helligkeit erzeugen.

Das Ergebnis, das wir hier nur kurz angeben können, ist, daß schon bei geringen chromatischen Abweichungen (wie sie sich z. B. bei den sogenannten „achromatisierten" Systemen durch das unten zu besprechende „sekundäre Spektrum" ergeben) eine bedeutende Herabsetzung der Helligkeit stattfindet. Für eine nicht eingestellte Farbe wird außerdem der Lichtabfall von der Achse aus weniger steil. Zwei benachbarte Beugungsbilder werden weniger unterscheidbar, und es tritt zunächst eine „Verschleierung des Details", für immer entferntere Wellenlängen eine allmähliche Vernichtung des Auflösungsvermögens des Instruments ein.

Das sekundäre Spektrum.

Die bisherigen Erörterungen fußen auf der Tatsache, daß der Brechungsexponent n jedes Mediums eine Funktion der Wellenlänge sei, ohne weiter auf die Natur dieser Funktion Rücksicht zu nehmen. Die genaue Beschaffenheit derselben ist trotz der zahlreichen, seit Newton über sie angestellten experimentellen und spekulativen Untersuchungen noch nicht endgültig festgestellt. Von ihr hängen nun gewisse Erscheinungen sekundärer Natur ab, welche mit jeder Art von Achromasie verbunden sind, und deren allgemeiner Charakter sich auch schon auf Grund desjenigen, was bisher über die Gesetze der Dispersion bekannt ist, mit genügender Sicherheit kennzeichnen läßt.

Während nämlich Newton und u. a. auch noch Wollaston annahmen, daß die relative Dispersion verschiedener Substanzen in allen Teilen des Spektrums eine Konstante sei, haben schon Clairaut, Blair, dann durch eine Reihe kritischer Experimente Boscovich[1] und schließlich, entsprechend seiner exakten Beobachtungsmethode ganz unwiderleglich, Fraunhofer[2] erwiesen, daß dies nicht der Fall sei: daß vielmehr bei Spektren, die mit Prismen verschiedener Substanz entworfen werden, die Ausdehnung der einzelnen Farbenbezirke in einem sehr variablen Verhältnis zur Gesamtausdehnung stehe, oder genauer: daß das Verhältnis der in verschiedenen Teilen des Spektrums vorhandenen Dispersionen (Differenzen der Brechungsexponenten für verschiedene Wellenlängen) von Substanz zu Substanz erheblich variiere.

Indem Fraunhofer die von ihm zuerst genau untersuchten dunkeln Linien des Sonnenspektrums zur Definition der Wellenlängen verwandte, war er als erster imstande, das optische Verhalten verschiedener Substanzen überhaupt zahlenmäßig zu charakterisieren. Die so von ihm begründete exakte Spektrometrie ist seitdem die notwendige experimentelle Grundlage für die Konstruktion der optischen Instrumente nach wissenschaftlichen Prinzipien geworden.

So zeigte Fraunhofer[3] z. B., daß das Verhältnis der Dispersionen zweier Gläser am roten Ende des Spektrums (von Linie B bis Linie C) zu demjenigen am violetten Ende (Linie G bis Linie H) variieren könne von 1,9 zu 2,3 oder etwa wie 1 : 1,2; die gleichen Verhältnisse bei Glas und Wasser von 2,6 zu 3,7 oder fast wie 1 : 1,5 u. dergl. mehr.

Daraus folgt, daß, wenn man n als Funktion von λ darstellen will — etwa als eine Potenzreihe — in dieser jedenfalls $dn/d\lambda$ noch Funktion von λ bleiben muß. Eine genauere Diskussion des über Dispersion vorliegenden Beobachtungsmaterials führt dazu[4] — wenn überhaupt — dann eine Potenzreihe mit wenigstens

[1] Über diese drei vgl. D. Brewster, Treatise on new. philos. Instruments. Edinburgh 1813. p. 300 und 353. — [2] Joseph Fraunhofer, Denkschr. Münch. Akad. d. Wissensch. f. 1814/15. p. 209. Ges. Schriften, herausgeg. v. E. Lommel. München 1888. p. 14. — [3] a. a. O. Tab. IV. — [4] S. Czapski, Ztschr. f. Instrumentenk. 6. 341. 1886.

drei Koeffizienten zur vollständigen Darstellung der Dispersion aller Substanzen anzunehmen, wenn auch die vieler Substanzen durch eine zweigliedrige Reihe bereits sehr vollkommen dargestellt wird[1].

Die Form des betreffenden Ausdrucks ist gewöhnlich (nach CAUCHY und BRIOT)

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4} + \frac{d}{\lambda^6} + \dots \tag{11}$$

Die Achromasie — sei es der Brennpunkte oder Brennweiten, Bildpunkte oder Konvergenzverhältnisse, welche mit einem Paar Linsen bewirkt wird, deren Substanzen nicht zufällig proportionale Koeffizienten b, c, d besitzen, ist nun infolge der Abhängigkeit der Differentialquotienten $dn/d\lambda$ oder dn/dl (wo $l = 1/\lambda^2$) von λ bezw. l, stets eine unvollständige. Ihr Charakter ist im allgemeinen der, daß die Achromasie (Identität) des fraglichen Elements immer nur für je zwei Wellenlängen vorhanden ist; von der Stelle λ an, für welche die Variation = Null gemacht und daher ein (Maximum oder) Minimum ist, ist paarweise nach beiden Seiten des Spektrums hin für je eine Stelle der einen Spektralhälfte das betreffende Abbildungselement identisch mit dem für eine Stelle der anderen Spektralhälfte. Dieser besondere Charakter der Unvollkommenheit der Achromasie — von BLAIR[2] „sekundäres Spektrum" genannt — entspringt allein der zufälligen besonderen Beschaffenheit des Dispersionsverlaufs in den bekanntesten Substanzen, namentlich in den Gläsern, und ist kein notwendiger. Schon EULER und BLAIR, BARLOW[3] und ARCHER[4] hatten die Benutzung von solchen Flüssigkeiten vorgeschlagen, deren Dispersion das sekundäre Spektrum vermindern sollte (Flüssigkeitslinsen).

JOSEPH FRAUNHOFER war der erste, der, gestützt auf seine exakte Methode der Dispersionsmessung, sofort auch zu Versuchen überging, Gläser mit weniger verschiedenem Gange der Dispersion herzustellen. Seine zum Teil erfolgreichen Versuche wurden nach seinem Tode nicht fortgesetzt. — Eine ausführliche Darstellung der Geschichte des optischen Glases siehe bei M. v. ROHR[5].

Die Lösung der Aufgabe (zugleich mit der anderen, größere Abstufung des Brechungsexponenten und der mittleren Dispersion herbeizuführen, die in den alten Gläsern in einer gewissen Abhängigkeit voneinander standen) gelang erst ABBE[6] und SCHOTT[7]. Es gibt seitdem zahlreiche Glasarten, deren Kombination einen wesentlich anderen Gang des sekundären Spektrums herbeiführt; so z. B. die Borat- und Phosphatgläser, welche das Jenaer Glaswerk seit 1884 fabrikatorisch hergestellt hat[8].

Ich habe a. a. O. eine einfache Methode angegeben, um die Größe des sekundären Spektrums, d. h. der Fokusdifferenz zweier zu einem System kombinierter unendlich dünner Linsen aus den Dispersionswerten zu berechnen, wenn festgesetzt ist, für welche Wellenlängen das System gleiche Brennweiten (und Brennpunkte) haben soll.

Ist nämlich das System so konstruiert, daß die Brennweite für die Wellenlänge λ_a gleich ist der für die Wellenlänge λ_b, so haben wir nach Gleichung (4) mit ein wenig veränderter Bezeichnung

---

[1] Vgl. z. B. WÜLLNER, Lehrb. d. exper. Physik **2.** 156. Leipzig 1882 u. W. SCHMIDT, Die Brechung des Lichtes in Gläsern. Leipzig 1874. § 1. — [2] R. BLAIR, Trans. Edinb. Soc. **3.** 3. 1791. — [3] BARLOW, Phil. Trans. 1828. 1829. 1831. 1833. — [4] M. v. ROHR, Theorie u. Gesch. d. phot. Objektivs. Berlin 1899. p. 155. — [5] Derselbe, l. c. p. 325. — [6] E. ABBE, im Bericht über die wissenschaftlichen Apparate auf der Londoner internationalen Ausstellung 1876, herausgeg. von A. W. HOFMANN. Braunschweig 1878. **1.** 415. — [7] E. ABBE u. O. SCHOTT, Vorbemerkung zum Kataloge neuer optischer Gläser. Jena 1884; eine vollständige Monographie des Jenaer Glases lieferte H. HOVESTADT: Jenaer Glas und seine Verwendung in Wissenschaft und Technik. Jena 1900. — [8] Vgl. S. CZAPSKI, Ztschr. f. Instrumentenk. **6.** 341. 1886 und das Produktionsverzeichnis des Jenaer Glaswerks.

$$\varphi_a = \frac{1}{f_a} = (n_a' - 1)\,k' + (n_a'' - 1)\,k'' = \varphi_b = \frac{1}{f_b} = (n_b' - 1)\,k' + (n_b'' - 1)\,k'' \quad ,$$

woraus sich

$$k' = (\varrho_1' - \varrho_2') \qquad \text{und} \qquad k'' = (\varrho_1'' - \varrho_2'')$$

berechnen zu

$$k' = \frac{1}{f}\,\frac{1}{\Delta n'}\,\frac{1}{\nu' - \nu''} \quad \text{und} \quad k'' = -\frac{1}{f}\,\frac{1}{\Delta n''}\,\frac{1}{\nu' - \nu''} \quad ,$$

wenn hier

$$\Delta v' = n_b' - n_a' \quad , \qquad \Delta n'' = n_b'' - n_a'' \quad ,$$

$$\nu' = \frac{n' - 1}{\Delta n'} \qquad \text{und} \quad \nu'' = \frac{n'' - 1}{\Delta n''}$$

bedeutet. Die Brennweite der Kombination für eine andere Wellenlänge λ_x ist dann gegeben durch

$$\varphi_x = \frac{1}{f_x} = (n_x' - 1)\,k' + (n_x'' - 1)\,k'' \quad .$$

Demnach

$$\varphi_a - \varphi_x = (n_a' - n_x')\,k' + (n_a'' - n_x'')\,k'' \quad ,$$

$$\varphi_b - \varphi_x = (n_b' - n_x')\,k' + (n_b'' - n_x'')\,k''$$

oder

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{f_x - f_a}{f} = \frac{1}{\nu' - \nu''}\left(\frac{n_a' - n_x'}{\Delta n'} - \frac{n_a'' - n_x''}{\Delta n''}\right) = \frac{1}{\nu' - \nu''}\left(\frac{\Delta n'_{a,x}}{\Delta n'_{a,b}} - \frac{\Delta n''_{a,x}}{\Delta n''_{a,b}}\right) \\ &\text{und} \\ &\frac{f_x - f_b}{f} = \frac{f_x - f_a}{f} = \frac{1}{\nu' - \nu''}\left(\frac{\Delta n'_{b,x}}{\Delta n'_{a,b}} - \frac{\Delta n''_{b,x}}{\Delta n''_{a,b}}\right) \quad . \end{aligned} \right.$$

A. a. O. habe ich die Größe des nach diesen Formeln berechneten sekundären Spektrums für mehrere Kombinationen von Glasarten angegeben und z. T. graphisch dargestellt. Es ist z. B. bei der Kombination eines Silikat-Kronglases englischer Art mit einem mittelschweren Flintglas $\left(\nu' = 60{,}2,\ \nu'' = 36{,}2,\ \text{wenn } \nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}\right)$ bei der Brennweite 1 und einer solchen Achromatisierungsweise, daß $f_F = f_C$:

$$f_{G'} - f_F = f_{G'} - f_C = +\,0{,}00179 \quad ,$$

$$f_D - f_F = f_D - f_C = -\,0{,}00046 \quad ,$$

$$f_{A'} - f_F = f_{A'} - f_C = +\,0{,}00113 \quad .$$

Die Wellenlänge der hier und weiter unten genannten Linien sind in $\mu\mu$:

A'	C	D	F	G'	Violette Hg-Linie
768	656	589	486	434	405

Mit Hilfe einer Dispersionsformel wie (11) erhält man für einige Jenaer Glasarten folgende Tabelle der Abweichungen:

Werte der Differenzen $f_\lambda - f_{0{,}55\,\mu}$ in Tausendteln von $f_{0{,}55\,\mu}$.

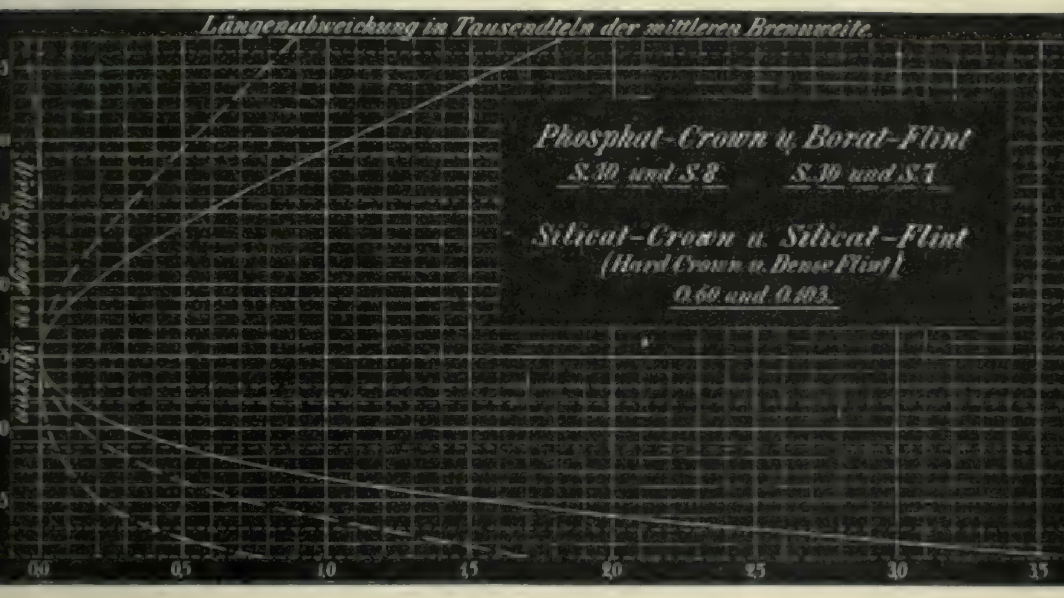
λ in Mikron	0,77	0,73	0,69	0,65	0,61	0,57	0,53	0,49	0,45	0,41
O. 60 — O. 103	+ 1,79	+ 1,39	+ 0,98	+ 0,58	+ 0,25	+ 0,03	+ 0,04	+ 0,44	− 1,51	+ 3,70
S. 30 — S. 7	+ 0,88	+ 0,69	+ 0,48	+ 0,29	+ 0,12	+ 0,02	+ 0,03	+ 0,21	+ 0,71	+ 1,69
S. 30 — S. 8	− 0,04	− 0,02	− 0,01	± 0,00	± 0,00	± 0,00	+ 0,01	+ 0,04	+ 0,21	+ 0,79

Figur 45 veranschaulicht den Verlauf der Fokusdifferenzen bei diesen drei Kombinationen.

Die Konstanten der hier angenommenen Gläser sind nach dem Produktionsverzeichnis der Jenaer Glasschmelzerei folgende:

Fabr. Nr.	Chemischer Charakter	n_D	$n_F - n_C$	$\frac{n_D - 1}{n_F - n_C} = \nu$	$n_D - n_{A'}$	$n_F - n_D$	$n_{G'} - n_F$
O. 60	Kalzium-Silikat-Crown	1,5179	0,00860	60,2	0,00553 0,643	0,00605 0,703	0,00487 0,566
O. 103	Gewöhnl. Silikat-Flint	1,6202	0,01709	36,2	0,01034 0,605	0,01120 0,714	0,01041 0,609
S. 30	Schweres Baryum-Phosphat-Crown	1,5760	0,00884	65,2	0,00570 0,644	0,00622 0,703	0 00500 0,565
S. 7	Borat-Flint	1,6086	0,01375	44,3	0,00864 0,628	0,00974 0,708	0,00802 0,583
S. 8	Borat-Flint	1,5736	0,01129	50,8	0,00728 0,645	0,00795 0,704	0,00644 0.571

Die in kleiner Schrift unter die Beträge der partiellen Dispersion gesetzten Zahlen sind die Verhältnisse dieser partiellen Dispersionen zu dem Werte von $(n_F - n_C)$.



Figur 45.
Sekundäre Spektren.

Obige Tabelle gibt ein Bild von der Größe und dem Gange des sekundären Spektrums bei binären Kombinationen aus älteren Gläsern und von der Veränderung seiner Größe und seines Ganges, die durch Anwendung mancher von den seit 1884 hergestellten Glasarten möglich geworden ist. Ihr Inhalt stimmt im wesentlichen überein mit den Resultaten, welche H. C. VOGEL[1], HASSELBERG[2],

[1] H. C. VOGEL, Monatsber. d. Berl. Akad. d. Wissensch. p. 433. 1880. Vierteljahrsschr. d. astr. Gesellsch. **22.** 142. 1888. — [2] HASSELBERG, Mél. math. et astr. de l'Acad. de Petersb. **6.** 669. 1888.

M. Wolf[1], J. Keeler[2] u. a. durch direkte Messungen der Fokusdifferenzen von Fernrohrobjektiven erhalten haben.

Das Verfahren bei der Achromatisierung (die Gestaltung des sekundären Spektrums). Da, wie wir oben bemerkten, die verschiedenen Teile des Spektrums sehr verschiedene Helligkeit besitzen, so ist es sehr wichtig, das sekundäre Spektrum so zu gestalten, daß es möglichst wenig störend wirkt, d. h. daß die wirksamsten, also z. B. bei Bildern, die mit dem Auge betrachtet werden sollen, die hellsten Strahlen in einem möglichst engen Raume vereinigt werden. Ein rationelles Verfahren hierzu gab bereits Fraunhofer an; doch führte dasselbe nicht zu befriedigender Übereinstimmung mit der praktischen Erfahrung. Er schlug nämlich vor, alle Dispersionsverhältnisse *pro rata* ihrer Lichtmenge (Produkt aus Helligkeit und Ausdehnung des betreffenden Spektralbezirks) in Rechnung zu ziehen. Ein ähnliches Verfahren wandten Steinheil und Seidel an (a. a. O.); vgl. auch Harkness (l. c. p. 194). Ein grundsätzlich anderes Verfahren besteht darin, den Scheitel der oben gezeichneten Farbkurve an die spezifisch wirksamste Stelle des Spektrums zu legen. Dies geschieht z. B. bei dem von Scheibner[3] gewählten Modus: das Verhältnis dn'/dn als Grenzwert (Differentialquotienten) aus empirischen Dispersionsformeln der beiden Substanzen abzuleiten und zwar für diese betreffende Wellenlänge. Dies ist in der obigen Tabelle für $\lambda = 0{,}55\ \mu$ geschehen. Einen in der Sache gleichbedeutenden Vorschlag machte H. Pitsch[4], der auch höhere Ordnungen der Achromasie berücksichtigt. Die tatsächliche, praktisch erprobte Überlegenheit einer solchen Gestaltung des sekundären Spektrums vermochte Strehl[5], nachdem Taylor[6] bereits bei Gelegenheit experimenteller Untersuchungen auf diese Verhältnisse aufmerksam gemacht hatte, mittels seiner oben erwähnten beugungstheoretischen Betrachtungen an zahlenmäßig durchgeführten Beispielen zu erklären. Er wies u. a. in einem praktisch realisierten Falle die bedeutende Änderung der Lichstärke bei einer geringfügigen Änderung der Achromatisierung nach; eine Folge des Umstandes, daß der Beitrag nicht eingestellter Farben zu der Helligkeit auf der Achse, je weiter sie von der eingestellten entfernt sind, desto mehr und zwar in starkem Maße abnimmt. Man kann aus seinen Rechnungen auch auf die mit einer Beseitigung des sekundären Spektrums verbundene Erhöhung der Lichtstärke schließen.

Die optische, rein aktinische und photographische (sogenannte „aktinische“ Korrektion. Die „wirksamste“ Stelle des Spektrums wird verschieden sein, je nachdem das Bild dem Auge[7] dargeboten oder photographisch festgehalten werden soll. Im ersteren Falle betrachtet man meistens $\lambda = 0{,}55\ \mu$ als die spezifisch wirksamste, hellste Farbe[8]. Praktisch hat es sich am zweckmäßigsten erwiesen, die Identität der zu achromatisierenden Größe für die Farben der *C*- und *F*-Linie herzustellen. In der Tat liegt in diesem Falle das sekundäre Spektrum stets nahezu so, daß der Scheitel der Farbkurve mit $0{,}55\ \mu$ zusammenfällt (optische Achromasie).

Treten schon hierbei die oben aufgeführten Spekulationen gegenüber der praktischen Erfahrung zurück, so ist dies noch mehr bei der Korrektion für die

---

[1] M. Wolf, Wied. Ann. **33.** 212. 1888. Ausführliche Referate über diese Arbeiten dieser drei Forscher in Ztschr. f. Instrumentenk. **8.** 246; **9.** 16; **19.** 1. 1899. — [2] J. Keeler, Publ. Astr. Soc. of the Pacific Nr. 9. 162. 1890. — [3] Scheibner, Sächs. Ak. d. Wissensch. **11.** 565. 1876. — [4] H. Pitsch, Sitzber. d. Wien. Akad. d. Wissensch. **100.** 1105. 1891. — [5] K. Strehl, l. c. — [6] H. D. Taylor, Monthly Not. of the R. Astr. Soc. **54.** 67. 1883; The Observatory **208.** 399. 1893. — [7] Die Chromasie des optischen Apparates im Auge ist natürlich mitbestimmend, kommt aber in vielen Fällen nicht in Betracht; vgl. H. v. Helmholtz, Handb. d. physiolog. Optik 2. Aufl. p. 168. K. Strehl, Ztschr. f. Instrumentenk. **17.** 80. 1897. — [8] Nach den Messungen von A. König, l. c. wandert das Maximum der Helligkeit im Sonnenspektrum bei zunehmender Gesamtintensität desselben von $\lambda = 0{,}53\ \mu$ bis $\lambda = 0{,}61\ \mu$; Abney u. Festing, l. c., hatten 0,576 im prismatischen Spektrum, 0,565 im Gitterspektrum gefunden. Vgl. die Zitate auf p. 170.

photographische Wirkung der Fall. Die spezifische Empfindlichkeit der Platten für die verschiedenen Farben ist weder sehr genau bekannt, noch bei allen Platten dieselbe; endlich ist diese Empfindlichkeit über ein ziemlich großes Spektralgebiet ziemlich gleichmäßig verteilt. Das Maximum nimmt man gewöhnlich in der Nähe der Linie G' an und vereinigt, um die aktinisch wirksamsten Strahlen möglichst enge zusammenzufassen, die Linie F und die violette Quecksilberlinie (405 $\mu\mu$). Diese Art der Korrektion wird z. B. bei astrophotographischen Systemen angewandt (rein aktinische Achromasie).

Bei den zur gewöhnlichen Photographie dienenden Systemen tritt aber die Forderung hinzu, daß man durch Betrachtung des Bildes auf der Mattscheibe die richtige Einstellung für die Aufnahme ermitteln kann. Hier pflegt man optische und aktinische Strahlen und zwar gewöhnlich D und G' zu vereinigen. Man nimmt dabei den Nachteil in Kauf, daß sowohl das optische als das aktinische Bild eine weniger gute Farbenvereinigung aufweisen, während die Stelle des Spektrums, für die die beste Korrektion besteht, zwischen ihnen (etwa bei F) gelegen ist (die sogen. „aktinische Achromasie“ oder „Freiheit vom chemischen Fokus“ der Photographen[1]).

Die Aufhebung des sekundären Spektrums durch eine Achromasie höherer Ordnung, bei der also statt für je zwei für je drei Wellenlängen Identität der Bilder nach Ort oder Größe vorhanden ist, läßt sich bei binären — aus zwei Linsen zusammengesetzten — Systemen, wie bemerkt, nur erreichen durch Anwendung einiger von den neuen Jenaer Glasarten; unter Benutzung der gewöhnlichen Glasarten nur dadurch, daß man das System aus mindestens drei Linsen zusammensetzt, deren Substanzen hinreichend verschiedene Dispersionsverhältnisse besitzen[2]. Es ergeben sich die entsprechenden Krümmungsmaße der (als verschwindend dünn und im Kontakt befindlich vorausgesetzten) drei Linsen k', k'', k''' durch Auflösung der drei Gleichungen, welche hier an Stelle der oben betrachteten zwei Bedingungsgleichungen für die Achromasie treten. Man gelangt zu relativ sehr großen Krümmungen, wenn man die Dispersionsverhältnisse der drei Substanzen nicht angemessen auswählt[3].

Das sekundäre Spektrum von drei sich berührenden Linsen ist:

$$\Delta\varphi = \Delta n' k' + \Delta n'' k'' + \Delta n''' k'''$$

und wenn wieder $k''' = p k'$ und k', k'' gemäß der Bedingung $d\varphi = 0$ (S. 169) bestimmt sind, ist:

$$\Delta\varphi = \frac{(\Delta n' + p\,\Delta n''')\,d n' - \Delta n''\,(d n' + p\,d n''')}{d n''\,[n' - 1 + p\,(n''' - 1)] - (n'' - 1)(d n' + p\,d n''')} \,.$$

Also ist $\Delta\varphi = 0$, wenn $\dfrac{\Delta n' + p\,\Delta n'''}{d n' + p\,d n'''} = \dfrac{\Delta n''}{d n''}$ oder $\dfrac{k'\,\Delta n' + k'''\,\Delta n'''}{k'\,d n' + k'''\,d n'''} = \dfrac{\Delta n''}{d n''}$

Auch ist

$$\Delta\varphi = \frac{\dfrac{k'\,\Delta n' + k'''\,\Delta n'''}{k'\,d n' + k'''\,d n'''} - \dfrac{\Delta n''}{d n''}}{\dfrac{k'\,(n' - 1) + k'''\,(n''' - 1)}{k'\,d n' + k'''\,d n'''} - \dfrac{n'' - 1}{d n''}} \,,$$

besonders einfach ist für $k' = k'''$

---

[1] Die eigentümliche Entwickelung der Ansichten über die Korrektion photographischer Objektive bei M. v. ROHR, l. c. p. 101. Ebendort s. die verschiedenen Einrichtungen, um bei nicht in dieser Weise korrigierten Systemen mechanisch die aktinische Einstellung aus der optischen zu erhalten. — [2] Dies wohl zuerst von BOSCOVICH hervorgehoben.Diss. quinque ad dioptric. pertin. Wien 1764. In einem katadioptrischen System ist die Beseitigung des sekundären Spektrums von L. SCHUPMAN geleistet worden (Die Medialfernrohre, Leipzig 1899). — [3] Über solche und verwandte Bestrebungen speziell auf dem Gebiete der Fernrohroptik hat A. SAFARIK, Vierteljahrsschr. d. astr. Gesellsch. **17.** 13. 1882, über eben solche auf dem Gebiete der Mikroskopoptik E. ABBE, Ber. über die 1876er Ausstellung wissensch. App. in London, Braunschweig 1878, l. c., zusammenfassend berichtet.

$$\Delta\varphi = \frac{\dfrac{\Delta n' + \Delta n'''}{d n' + d n'''} - \dfrac{\Delta n''}{d n''}}{\nu' + \nu''' - \nu''} .$$

Die durch das sekundäre — oder im letzteren Falle tertiäre und bei noch weiter gehender Achromatisierung quaternäre u. s. w. — Spektrum hervorgerufenen Zerstreuungskreise sind, ebenso wie die des primären Spektrums, der relativen Öffnung (Verhältnis von Öffnung zu Brennweite) des Systems proportional. Von erheblich größerem Einfluß auf die Achromasie der Bilder als diese von den höheren Gliedern der Dispersionsformeln abhängigen Fehler ist schon bei mäßigen relativen Öffnungen (des Systems)

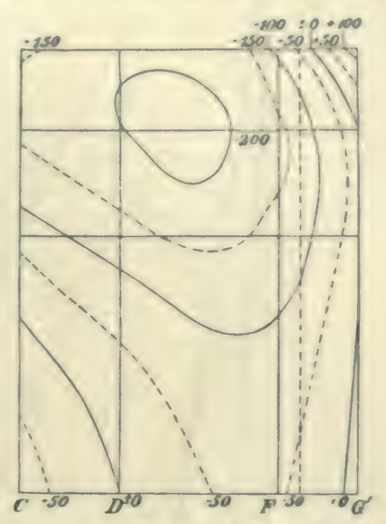
die Variation der von der Kugelgestalt herrührenden (sphärischen) Aberrationen mit der Wellenlänge,

insbesondere der schlechthin so genannten „sphärischen Aberration", nämlich derjenigen für Achsenpunkte. Wenn diese Aberration für eine bestimmte Wellenlänge λ_0 aufgehoben ist, so wird sie es im allgemeinen nicht zugleich auch für andere Wellenlängen sein. Gewöhnlich besteht dann vielmehr wegen der stärkeren Dispersion bei den (dispansiven) Flintgläsern in dem System sphärische Überkorrektion für kürzere und sphärische Unterkorrektion für größere Wellenlängen als λ_0. Diese „chromatische Differenz der sphärischen Aberration" (nach der Bezeichnung ABBES) ist nun, wie leicht einzusehen, gleichbedeutend mit einer „sphärischen Differenz der chromatischen Aberration", d. h. einer Variation der letzteren von Zone zu Zone. In dem vorgedachten Falle würde bei richtiger chromatischer Korrektion der zentralen Zone eine nach dem Rande der Öffnung hin wachsende chromatische Überkorrektion eintreten (Schnittweite der kurzwelligen Strahlen größer als die der langwelligen).

Diese Verhältnisse werden nach M. v. ROHR[1] graphisch dargestellt, indem man die Wellenlängen λ als Abszissen, die Apertur (bei unendlich fernen Objekten natürlich die Einfallshöhen) als Ordinaten benutzt und in diesem Felde eine angemessene Anzahl der Linien gleicher Schnittweite (als „Isoplethen") einzeichnet[2]. In der demselben Verfasser entlehnten Figur 46[3] sind diese Linien in Schnittweitendifferenzen von 50 μ fortschreitend gezogen. Die Verhältnisse sind auch hier die oben auseinandergesetzten. Die sphärische Korrektion für irgend eine Wellenlänge ergibt sich durch die von der betreffenden Ordinate nach einander geschnittenen Isoplethen. Dabei zeigt sich, daß das System für $\lambda = 472\,\mu\mu$ im Sinne von p. 153 sphärisch korrigiert ist; und daß für größere Wellenlängen Unterkorrektion, für kleinere Überkorrektion vorhanden ist. Die chromatische Korrektion irgend einer Zone erkennt man durch die von der zugehörigen Abszisse nach einander geschnittenen Isoplethen. Es zeigt sich in Übereinstimmung mit dem Obigen, daß, während in der Achse etwa die Linien D und G' vereinigt sind, die Schnittweiten der kurzwelligen Strahlen schwächer abnehmen als die der langwelligen oder sogar zunehmen: die Farbe, die das Minimum der Schnittweite besitzt, verschiebt sich, wenn man von der Achse nach dem Rande zu wandert, immer mehr nach dem roten Ende des Spektrums. Denken wir uns die Öffnung des Systems noch größer als in der Figur, so wird bei weiterer Entfernung von der Achse das Minimum der Schnittweite schließlich bei den größten Wellenlängen liegen; es werden überhaupt nicht mehr zwei Farben dieselbe Schnittweite besitzen, und der Charakter der chromatischen Aberration wird der einer einfachen Linse sein.

[1] M. v. ROHR, Theorie u. Geschichte des photogr. Objektivs. Berlin 1899. p. 66. — [2] Dieselbe Methode wird z. B. auch für die Brennweiten benutzt. — [3] M. v. ROHR, ibidem.

Die auf diese Weise eintretende chromatische Aberration kann, wie bemerkt, schon bei mäßigen Öffnungen von erheblich größerer Bedeutung werden als die sekundäre Aberration infolge der Disproportionalität der Zerstreuungsverhältnisse in verschiedenen Teilen des Spektrums. Um sie möglichst unschädlich zu machen, muß man, wenn man sie nicht ganz beseitigen kann, die beste chromatische Korrektion nicht in die zentrale Zone des Systems legen, sondern in eine passend zwischen dieser und dem Rande gelegene — so nämlich, daß der Zerstreuungskreis, welcher durch die dann nach der Mitte hin zunehmende Unterkorrektion hervorgerufen wird, etwa von gleicher Größe (aber entgegengesetztem Charakter) wird, als der, von der nach dem Rande zu wachsenden chromatischen Überkorrektion herrührende[1]. Die maximale Größe dieser entgegengesetzt gleichen und sich überdeckenden Zerstreuungskreise bleibt dann erheblich unter derjenigen, welche bei zentraler chromatischer Korrektion eintreten würde — da ja die sphärische Aberration für je eine Wellenlänge, welche ihre Ursache ist, selbst bei kleinen Öffnungsverhältnissen schon mit der **dritten** Potenz der Apertur wächst. Vgl. die schematische Darstellung der Figuren 47, *a* und *b*.



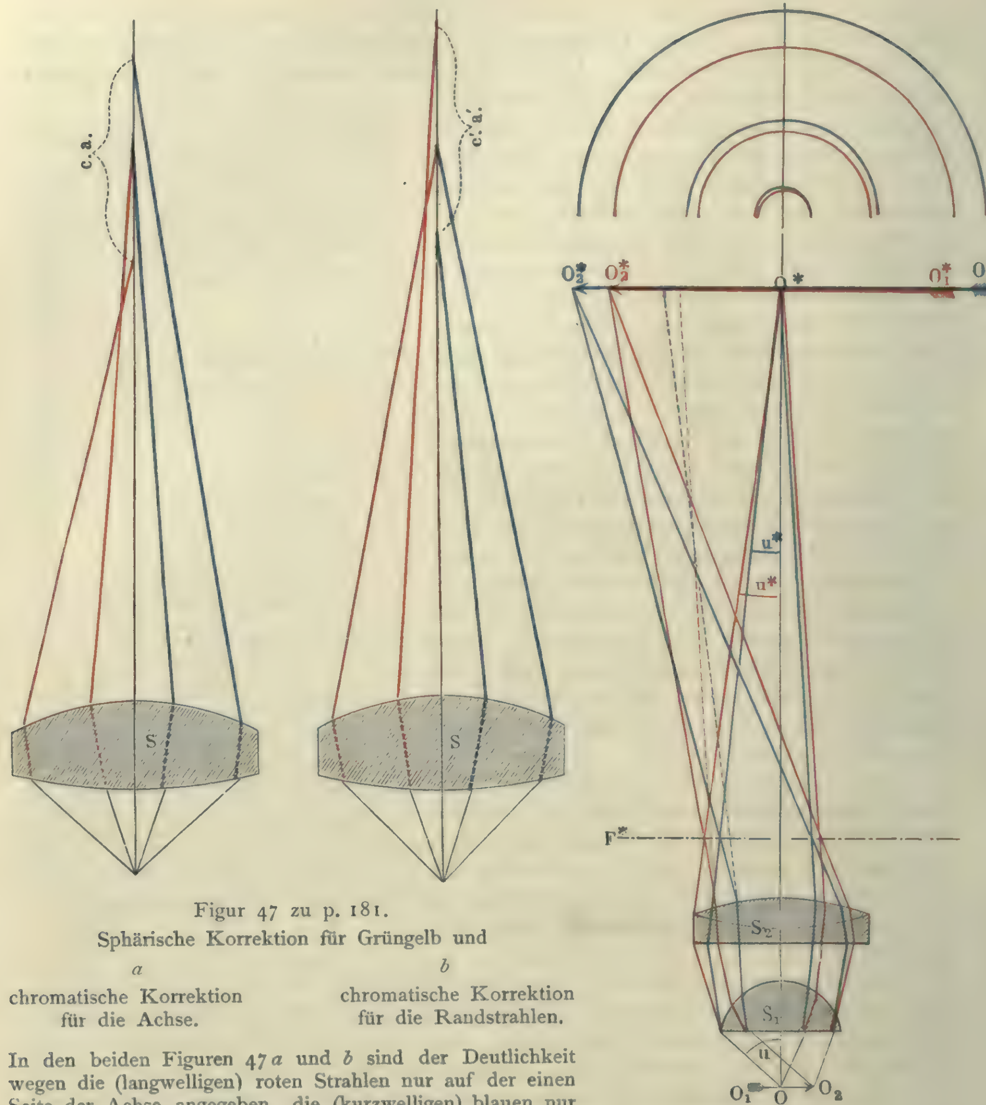
Figur 46. (Aus M. v. ROHR, Theorie u. Gesch. d. phot. Obj., p. 66).
Darstellung der chromatischen Differenz der sphärischen Aberrationen für J. PETZVALs Porträtobjektiv 1 : 3,4, $f_D = 100$ mm. Die Abszissen ergeben die Wellenlängen, gekennzeichnet durch die FRAUNHOFERschen Linien *C*, *D*, *F*, *G'*. Die Ordinaten sind die vierfach vergrößerten Einfallshöhen. Die Linien gleicher Schnittweite sind mit Zahlen bezeichnet, die die Differenz der Schnittweite gegen F_D angeben.

Die Aufhebung der sphärischen Aberration sucht man natürlich, wenn sie nur für eine Wellenlänge erreicht werden kann, für diejenige herzustellen, welche — je nach der Bestimmung des Instruments physiologisch, thermisch oder chemisch — den intensivsten Eindruck macht.

C. F. GAUSS[2], der auf diese Umstände besonders nachdrücklich hinwies, gab auch bereits eine Konstruktion für Fernrohrobjektive an, bei welcher die sphärische Aberration für zwei Wellenlängen und die chromatische für mindestens zwei Zonen des Systems gehoben ist. (Erster Vorschlag hierzu von D'ALEMBERT.) Seitdem ist diese Konstruktion und ähnliche mehrfach Gegenstand der Diskussion und Neuberechnung gewesen[3], insbesondere ist eine analoge auch für Mikroskopobjektive angewandt worden[4], bei welchen sie, entsprechend deren größerer Apertur, auch überwiegende Vorteile gewährt, zumal, wenn gleichzeitig durch geeignete Wahl der Glasarten auch das sekundäre Spektrum beseitigt ist[5].

Die Variation des Aplanatismus mit der Wellenlänge. Damit neben der durch die Aufhebung der sphärischen Aberration herbeigeführten Abbildung

[1] S. z. B. A. KERBER, Zentr.-Ztg. f. Opt. u. Mech. **7.** 157. 1886, welcher findet, daß die chromatische Korrektur in der Zone $h = 0 \cdot 866$ stattfinden musse. — [2] C. F. GAUSS, Ztschr. f. Astronomie v. LINDENAU **4.** 345. Werke **5.** 507. — [3] Eine (nicht ganz einwandsfreie) Zusammenstellung der Ergebnisse nebst Literaturnachweisen gab H. KRÜSS, Ztschr. f. Instrumentenk. **8.** 7. 53. 83. 1888. — S. ferner A. KERBER, Zentr.-Ztg. f. Opt. u. Mech. 1890. p. 217; H. SCHRÖDER, ibid. 1889. p. 217; 1890. p. 72 u. 81; Photogr. Mitteil. 1896. p. 5 u. 22 (experimentelle Methode zur Bestimmung des chromatischen Korrektionszustandes einer Linse); auch V. C. L. CHARLIER in LUNDS Astr. Nachr. 1890 (2 Abhandlungen). — [4] E. ABBE, Journ. R. Micr. Soc. [2] **2.** 812. 1879. — [5] E. ABBE, Sitzber. med. naturw. Gesellsch. Jena f. 1887. p. 107.



Figur 47 zu p. 181.
Sphärische Korrektion für Grüngelb und

a chromatische Korrektion für die Achse.

b chromatische Korrektion für die Randstrahlen.

Figur 48 zu p. 183.
Die durch alle Zonen konstante Vergrößerungsdifferenz zwischen zwei Farben in einem System, das für diese beiden Farben aplanatisch ist.

In den beiden Figuren 47*a* und *b* sind der Deutlichkeit wegen die (langwelligen) roten Strahlen nur auf der einen Seite der Achse angegeben, die (kurzwelligen) blauen nur auf der anderen Seite. Beide stellen Systeme vor, welche sphärisch für eine mittlere Wellenlänge — etwa Grüngelb, als der optisch intensivsten Stelle des Spektrums — korrigiert sind, für rot aber sphärisch unter-, für blau überkorrigiert. Chromatisch ist jedoch das System Figur 47*a* in der zentralen Zone (Achse) korrigiert; Figur 47*b* für die Randzone. Im ersteren Falle haben die Randstrahlen, im letzteren Falle die nach der Achse zu gelegenen eine unverhältnismäßig große chromatische Längsabweichung ($c \cdot a$; $c' \cdot a'$) und bewirken einen ihrer Achsenneiguug entsprechenden Zerstreuungskreis. Der letztere wird am kleinsten bei chromatischer Korrektur in einer mittleren Zone. Man kann z. B. offenbar die Öffnung des Systems Figur 47*b* so weit vermehren, daß seine Randstrahlen einen Zerstreuungskreis von gleicher Größe und Lage hervorbringen, als seine Achsenstrahlen, ohne die chromatische Korrektion des gesamten Systems gegen vorher zu verschlechtern.

eines axialen Objektpunktes noch die eines ihm seitlich benachbarten, d. h. die eines zur Achse senkrechten Flächenelements stattfinde, mußte bei Systemen großer Apertur der Bedingung genügt sein (p. 120), daß für das betreffende Paar von Achsenpunkten

$$\frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \beta_0 = \text{const.}$$

sei. Damit bei solchen Systemen die Abbildung eines Flächenelements für mehrere Wellenlängen zugleich stattfinde, muß für diese auch die entsprechende Konstanz der Sinusverhältnisse konjugierter Strahlen gleichzeitig bestehen. Soll z. B. Aplanasie für zwei unendlich benachbarte Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ vorhanden sein, so muß zu obiger Gleichung für λ noch die durch deren Variation nach λ sich ergebende hinzutreten:

$$(13) \qquad \frac{du}{\operatorname{tg} u} + \frac{dn}{n} = \frac{du'}{\operatorname{tg} u'} + \frac{dn'}{n'} + \frac{d\beta}{\beta}$$

oder

$$\Delta\left(\frac{du}{\operatorname{tg} u}\right) = -\Delta\left(\frac{dn}{n}\right) - \frac{d\beta}{\beta} \quad .$$

Abbe[1] hat Systeme, welche frei von sekundärem Spektrum und zugleich aplanatisch für mehrere Farben sind, als „apochromatische“ bezeichnet und solche auf mehreren Gebieten praktisch realisiert.

Es würde nach Erfüllung von (13) jedoch noch eine für alle Zonen konstante Verschiedenheit der Vergrößerung bestehen (Figur 48), die nach dem Rande des Sehfeldes zu wachsend in Geltung tritt. Soll auch diese in Wegfall kommen, so muß $d\beta = 0$ sein, und wenn $du = 0$ gesetzt, d. h. ein originäres oder sonst aberrationsfreies Objekt vorausgesetzt wird, so geht (13) in die Bedingung über

$$(13a) \qquad \frac{du'}{\operatorname{tg} u'} = \frac{dn}{n} - \frac{dn'}{n'} \quad .$$

Die Größe $\frac{du'}{\operatorname{tg} u}$ und die chromatische Längsabweichung kann aus den Elementen, welche den Weg eines beliebig geneigten Strahles im Hauptschnitt eines zentrierten Systems bestimmen, bequem von Fläche zu Fläche berechnet werden, so daß man nicht nötig hat, die ganze Durchrechnung für jede Wellenlänge besonders auszuführen. Man hat nämlich zur Verfolgung eines Strahles beliebiger Wellenlänge durch irgend eine Fläche gemäß p. 66/67 das Schema

(a)	$\frac{s-r}{r} \cdot \sin u = \sin i$	woraus	$\frac{du}{\operatorname{tg} u} + \frac{ds}{s-r} = \frac{di}{\operatorname{tg} i}$	(a′)
(b)	$\frac{n}{n'} \sin i = \sin i'$	„	$\frac{di}{\operatorname{tg} i} + \frac{dn}{n} - \frac{dn'}{n} = \frac{di'}{\operatorname{tg} i'}$	(b′)
(c)	$u + (i - i') = u'$	„	$du + di - di' = du'$	(c′)
(d)	$\frac{r \sin i'}{\sin u'} = s' - r$	„	$\frac{di'}{\operatorname{tg} i'} - \frac{du'}{\operatorname{tg} u'} = \frac{ds'}{s' - r}$	(d′)

daher schließlich $\Delta\left(\frac{ds}{s-r}\right) = -\Delta\left(\frac{du}{\operatorname{tg} u}\right) - \Delta\left(\frac{dn}{n}\right)$

folgt. Ist also du und ds gegeben und der Strahl von der Wellenlänge λ festgelegt, so werden nach dem rechtsstehenden Schema ds' und du' sehr einfach berechnet.

---

[1] E. Abbe, Sitzber. med. naturw. Gesellsch. Jena f. 1887, p. 114.

Die chromatischen Variationen der übrigen Kugelgestaltfehler: der Bildkrümmung, des Astigmatismus und der Anorthoskopie sind selten Gegenstand der Untersuchung, bezw. ihre Aufhebung Gegenstand der Bemühungen gewesen. Allein die letztere, die Orthoskopie, muß bei manchen Gattungen von Instrumenten von der Variation mit der Wellenlänge unabhängig gemacht werden. Die Bedingung hierfür folgt aus der entsprechenden Grundbedingung, so ergibt sich z. B. aus der Airyschen Tangentenbedingung (s. d. Abschn. über Verzeichnung im VII. Kapitel): $\frac{n \operatorname{tg} w}{n' \operatorname{tg} w'} = B$.

Die Literatur über diesen Abschnitt ist teils im Text, teils in der dem vorigen Abschnitt angehängten Übersicht mit aufgeführt worden. Da die sphärischen und chromatischen Fehler dem Zweck der optischen Instrumente, scharfe Bilder zu erzeugen, gleich hinderlich sind, so sind dieselben auch meistens zusammen behandelt worden.

VI. Prismen und Prismensysteme.

Der Spezialfall, daß die die verschiedenen brechenden Medien trennenden Flächen sämtlich die Krümmung Null haben, Ebenen sind, bietet ein hervorragendes praktisches Interesse und soll daher im folgenden besonders diskutiert werden.

I. Der Weg eines einzelnen Strahles

ist innerhalb der Einfallsebene durch das Brechungsgesetz und durch die p. 9 und p. 10 abgeleiteten Hilfssätze auch in bezug auf eine beliebig anzunehmende andere Grundebene völlig bestimmt. Sind ϑ und φ die Winkel, welche die Projektion eines Strahles auf eine durch die Einfallsnormale gehende Ebene mit dem Strahle selbst und mit jener Normalen bildet, ϑ' und φ' dieselben für die Projektion des gebrochenen Strahles, i und i' Einfalls- und Brechungswinkel, so war außer der Grundgleichung

$$n \cdot \sin i = n' \sin i'$$

noch

$$n \cdot \sin \vartheta = n' \sin \vartheta' \tag{1}$$

und

$$n \cdot \sin \varphi \cos \vartheta = n' \sin \varphi' \cos \vartheta' \quad ,$$

daher aus ϑ und φ auch ϑ' und φ' ohne weiteres berechenbar.

Von den vielen graphischen Konstruktionen, welche für die Lösung dieser Aufgabe angegeben worden sind[1], will ich nur die von REUSCH[2] erwähnen (vgl. Figur 2 p. 10). Man schlage um den Einfallspunkt O Halbkugeln mit den

[1] CHR. HUYGENS, Traité de la lumière. Leyden 1690. (HUYGENS legte durch P (s. o.) eine Tangentialebene an die Halbkugel mit dem Radius n; und durch die Schnittgerade dieser und der brechenden Ebene eine zweite Tangentialebene an die Halbkugel mit dem Radius n'. Durch deren Berührungspunkt P' geht der gebrochene Strahl. Bei HUYGENS stellen die beiden Kugeln die einfallende und die gebrochene Welle vor.) RADAU, POGG. Ann. **118**. 452. 1863; E. v. LOMMEL, ibid. **156**. 578. 1876; KESSLER, Jahresb. Gew.-Schule Bochum f. 1880. Ztschr. f. Math. u. Phys. **29**. 69. 1884. Alle diese behandeln auch den Weg eines Strahles durch ein Prisma. — [2] E. REUSCH, POGG. Ann. **117**. 241. 1862.

Radien n und n' nach dem zweiten Medium zu. Den Punkt P, in welchem die Verlängerung des einfallenden Strahles die erstere Halbkugelfläche trifft, projiziere man parallel der Einfallsnormalen auf die zweite Halbkugel nach P', dann ist P' **ein Punkt des gebrochenen Strahles.**

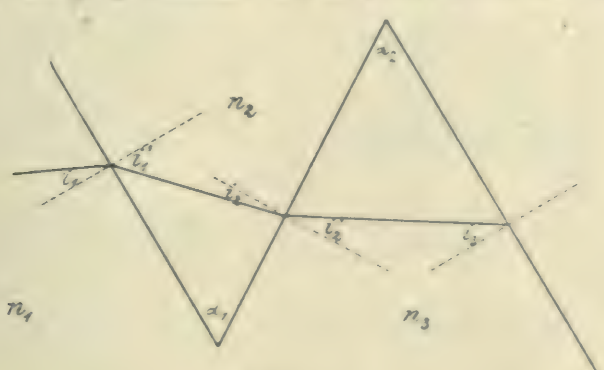
Liegen mehrere brechende Ebenen vor, so genügen die gleichen Formeln und auch die angegebene graphische Konstruktion, wenn man für erstere als Projektionsebene die zur Schnittlinie je zweier auf einander folgenden Ebenen senkrechte, den „Hauptschnitt" der beiden Ebenen annimmt und beachtet, daß der Winkel, den der an der ersteren Fläche gebrochene Strahl mit jener Ebene bildet, derselbe ist, wie derjenige, welchen er beim Einfall auf die zweite Fläche mit dieser bildet, daß also stets $\vartheta_{k+1} = \vartheta_k'$. Zur Bestimmung von φ_{k+1} aus φ_k' muß der Neigungswinkel der beiden brechenden Ebenen α_k und der zweier auf einander folgender Hauptschnitte gegeben sein. Da die Richtung des Strahles dieselbe bleibt, er mag an einer gegebenen Fläche selbst oder an einer zu dieser parallelen gebrochen werden, so kann für die Konstruktion wie Berechnung der Richtungsänderung durch Brechung in einem Prismensystem angenommen werden, daß dessen sämtliche Flächen sich selbst parallel bis zum Einfallspunkte verschoben seien. Man hat alsdann für die analytische Verfolgung des Strahlenweges nur eine Reihe sphärische Dreiecke aufzulösen [1].

Der Fall, daß die Hauptschnitte aller brechenden Ebenenpaare zusammenfallen,

also alle Ebenen auf diesem einen Hauptschnitt senkrecht stehen, ist der einfachste und liegt am häufigsten vor. Je zwei aufeinanderfolgende Ebenen faßt man unter der Bezeichnung **Prisma** zusammen, ihre Schnittlinie heißt brechende Kante, der Winkel α, den sie einschließen, brechender Winkel des Prismas.

A. Der Strahl verlaufe im Hauptschnitt des Prismensystems.

Die Einfalls- und Brechungswinkel des Strahles an den einzelnen Ebenen seien wie früher mit i_k, i_k' bezeichnet und als positiv gerechnet, wenn man den



Figur 49.
Der Weg eines Strahles durch ein Prismensystem im gemeinsamen Hauptschnitt.

Strahl im Sinne der Uhrzeigerbewegung drehen muß, um ihn mit seiner Normalen zur Deckung zu bringen. Die brechenden Winkel α_k der Prismen rechnen wir als positiv, wenn sich ihre Scheitel von einem mit dem Strahle sich Bewegenden

[1] S. z. B. HERSCHEL, Light. Deutsche Übers. p. 82.

und auf die Zeichnungsebene Blickenden links befinden. Die Ablenkung ε_k endlich, welche ein Strahl erfährt, rechnen wir als positiv, wenn man den einfallenden Strahl im Sinne der Uhrzeigerbewegung drehen muß, um ihn mit dem austretenden zur Deckung zu bringen.

Der Weg des Strahles im Hauptschnitt ist dann bestimmt durch das Gleichungssystem

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{ll} n_2 \sin i_1' = n_1 \sin i_1 \quad \text{und} & \varepsilon_1 = i_1 - i_1' \\ i_2 = i_1' - \alpha_1 & \\ n_3 \sin i_2' = n_2 \sin i_2 & \varepsilon_2 = i_2 - i_1' \\ i_3 = i_2' - \alpha_2 & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ n_p' \sin i_p' = n_p \sin i_p & \varepsilon_p = i_p - i_p' \end{array}\right.$$

daher ist die Gesamtablenkung

$$\varepsilon^{(p)} = \sum_{k=1}^{k=p} \varepsilon_k = i_1 - i_p' - \sum_{k=1}^{k=p-1} \alpha_k \quad . \qquad (3)$$

$\sum_{k=1}^{k=p-1} \alpha_k$ ist nichts anderes als der Winkel der letzten gegen die erste brechende Fläche $= \alpha_{1,p}$, also

$$\varepsilon^{(p)} = i_1 - i_p' - \alpha_{1,p} \quad .$$

Das Minimum der Ablenkung.

Diese Ablenkung ist ein Minimum für denjenigen Einfallswinkel i_1, für den unter den gegebenen Verhältnissen (n, α)

$$(4)\qquad \frac{\delta\, \varepsilon^{(p)}}{\delta\, i} = 0 \quad \text{also} \quad \delta\, i = \delta\, i_p'$$

ist (natürlich vorausgesetzt, daß $\delta^2 \varepsilon / \delta\, i^2$ einen positiven Wert hat und $\varepsilon^{(p)} > 0$ ist).

Zur Berechnung von $\delta\, i_p'$ in Funktion von $\delta\, i_1$ dient das aus (2) abzuleitende Gleichungssystem

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{lll} \delta\, i_1' = \dfrac{n_1}{n_2} \dfrac{\cos i_1}{\cos i_1'} \delta\, i_1 & & \\ \delta\, i_2' = \dfrac{n_2}{n_3} \dfrac{\cos i_2}{\cos i_2'} \delta\, i_2 \quad , & \text{worin} & \delta\, i_2 = \delta\, i_1' \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ \delta\, i_p' = \dfrac{n_p}{n_p'} \dfrac{\cos i_p}{\cos i_p'} \delta\, i_p \quad ; & \text{worin} & \delta\, i_p = \delta\, i'_{p-1} \quad , \end{array}\right.$$

also schließlich

$$(6)\qquad \delta\, i_p' = \frac{n_1}{n_p'} \frac{\cos i_1}{\cos i_1'} \cdot \frac{\cos i_2}{\cos i_2'} \cdots\cdots \frac{\cos i_p}{\cos i_p'} \cdot \delta\, i_1 \quad .$$

Das Verhältnis der Kosinus von Einfalls- und Brechungswinkel an je einer Fläche $\frac{\cos i_k}{\cos i_k'}$, ist eine Funktion des Einfallswinkels i_k und des relativen Brechungsexponenten der beiden wirksamen Medien. Bezeichnen wir Produkte durch das Zeichen Π, so ist bei der Minimalablenkung, wo also $\delta\, i_p' = \delta\, i_1$

$$(7)\qquad n_1\, \Pi (\cos i_k)_{k=1}^{k=p} = n_p'\, \Pi (\cos i_k')_{k=1}^{k=p}$$

oder, da fast stets erstes und letztes Medium Luft $n_1 = n_p{}' = 1$ ist

$$(7\,a) \qquad \Pi(\cos i_k)_{k=1}^{k=p} = \Pi(\cos i_k{}')_{k=1}^{k=p} \quad .$$

Ein Prisma in Luft.

Wenden wir die Gleichungen (2) und (3) auf ein einziges, beiderseits vom gleichen Medium umgebenes Prisma an, bei welchem wir der Symmetrie wegen die äußeren Einfallswinkel mit i und i'', die inneren mit r und r' bezeichnen (Figur 50), so ist hier

$$n \sin r = \sin i \quad ,$$

$$r' = r - \alpha \quad , \qquad \sum \varepsilon = i - i'' - \alpha \quad ,$$

$$\sin i'' = n \sin r' \quad .$$

Hieraus folgt auch

$$\sin \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \alpha) = n \sin \tfrac{1}{2}\alpha \, \frac{\cos \frac{1}{2}(r + r')}{\cos \frac{1}{2}(i + i')} \quad .$$

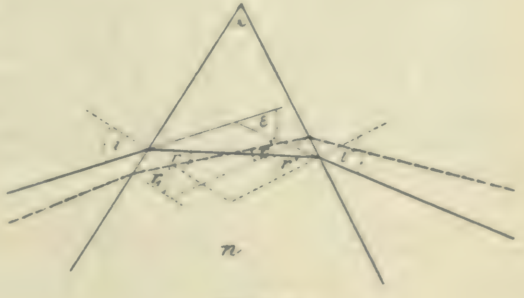
Bei der Minimalablenkung muß nach Gleichung (7a)

$$\cos i \cdot \cos r' = \cos i'' \cdot \cos r \qquad \text{oder} \qquad \frac{\cos i}{\cos r} = \frac{\cos i''}{\cos r'}$$

sein. Der Quotient $\cos i / \cos r$ ist nun, wie ersichtlich, dieselbe eindeutige Funktion von i und n, als der Quotient $\cos i'' / \cos r'$ von i'' und n. Man hat daher aus $f(i, n) = f(i'', n)$

$$(7\,c) \qquad i = \pm\, i'' \quad .$$

Eine unmittelbare Betrachtung zeigt aber, daß beim einfachen Prisma das Minimum der Ablenkung eines Strahles stattfindet, wenn dieser das Prisma symmetrisch durchsetzt, also wenn $i = -\,i''$, $r = -\,r'$ ist. Denn gehe ich unter Voraussetzung eines solchen Verlaufs des Strahles vom Innern des Prismas aus, so ist die Ablenkung, die der Strahl an der einen Fläche erfährt, $\varepsilon = (i - r)$, ebenso groß und trägt zu dem Endeffekt im gleichen Sinne bei wie die an der anderen Fläche, $\varepsilon' = i'' - r'$. Bei einem anderen Strahlengang (s. Figur 49) ist stets der eine der Winkel r gegenüber der symmetrischen Lage um ebensoviel größer, als der andere kleiner, da ja dem absoluten Betrage nach stets $[r] + [r'] = \alpha$. Nach dem p. 11 bewiesenen Satze wächst aber die Ablenkung eines Strahles



Figur 50.
Ein Prisma in Luft.

durch Brechung *caet. par.* mit dem Einfallswinkel immer schneller. Der Zunahme δr des einen Winkels entspricht also eine größere Zunahme der Ablenkung $\delta \varepsilon$ an dieser Fläche, als die Abnahme $\delta \varepsilon'$ beträgt, welche der gleichgroßen Abnahme $\delta r'$ des anderen inneren Einfallswinkels entspricht. Der verbleibende Überschuß der Gesamtablenkung $\delta \varepsilon + \delta \varepsilon'$ ist bei kleinen Werten δr von der zweiten Ordnung, also in erster Näherung gleich Null, aber, wie gerade

---

[1] Herschel, a. a. O. p. 91.

diese Betrachtungsweise zeigt, positiv und stetig wachsend bis zu den größten möglichen Werten von r oder r'.[1]

Diese größten Werte entsprechen den Werten $\sin i$ bezw. $\sin i' = \pm 1$, d. h. streifendem Ein- bezw. Austritts des Strahles. Ein Prisma, bei dem der ein- und der austretende Strahl die Flächen streifen, hat den Grenzwinkel $\bar{\alpha}$, welcher durch die Beziehung $n \sin \bar{\alpha}/2 = 1$, bestimmt ist und nicht gesteigert werden darf, damit überhaupt noch durch das Prisma mittels bloßer Brechung an seinen beiden Flächen Licht hindurchtreten könne. Derselbe beträgt z. B. für

$n =$	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\bar{\alpha} =$	100° 34′	91° 10′	83° 37′	77° 22′	72° 4′	67° 30′	63° 30′	60° 0′
$\bar{\varepsilon} =$	79° 56′	88° 50′	96° 23′	102° 38′	107° 56′	112° 30′	116° 30′	120° 0′

Die Ablenkung des Strahles in diesem Falle — bei welchem ebenfalls symmetrischer Durchgang desselben, also Minimalablenkung stattfindet, beträgt $\bar{\varepsilon} = 180^0 - \bar{\alpha}$ und ist oben mit angegeben.

Bei der Minimalablenkung überhaupt ist

$$r = -r' = \frac{\alpha}{2} \quad , \qquad \varepsilon_0 = 2i - \alpha \quad , \qquad i = \frac{\varepsilon_0 + \alpha}{2} \quad ,$$

also wegen $\sin i = n \sin r$

$$\sin \frac{\varepsilon_0 + \alpha}{2} = n \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \quad . \tag{8}$$

Diese Gleichung liegt dem FRAUNHOFERschen Verfahren der Brechungsexponentbestimmung zugrunde.

Die Einfalls- bezw. Austrittswinkel auf jeder Seite des Prismas können zwischen 90° und demjenigen Werte variieren, welchem auf der anderen Seite der Winkel 90° entspricht. Innerhalb dieser Grenzen kann also jeder Winkel sowohl als Einfallswinkel vorkommen, als auch — mit dem entgegengesetzten Vorzeichen — als Austrittswinkel. Die Ablenkung $\varepsilon = i - i' - \alpha$ ist für irgend ein Wertepaar $i = p$ und $i' = -q$ dieselbe wie für das Wertepaar $i = q$ und $i' = -p$. Es kommt also innerhalb der durch das Minimum (bei symmetrischem Strahlengang) und das Maximum (bei streifenden Ein- oder Austritt) gegebenen Grenzen jeder Betrag der Ablenkung in zwei Stellungen des Prismas vor, welche ihrerseits symmetrisch zu der Stellung der Minimalablenkung liegen — die Richtung des einfallenden Strahles als fest gedacht.

Besonders einfach und übersichtlich werden diese Verhältnisse bei einem **System von Prismen, deren brechende Winkel sehr klein sind,** so daß deren Sinus den Bogen selbst gleich gesetzt werden können. Alsdann ist nämlich für je ein solches Prisma in Luft bei kleinen Einfallswinkeln stets

$$\varepsilon = (n - 1)\alpha \tag{9}$$

und bei einem System von m solchen Prismen mit den Indizes $n_1 \ldots n_m$ und den Winkeln $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ ebenso

$$\varepsilon^{(m)} = \sum(\varepsilon_k) = \sum_{k=1}^{k=m}(n_k - 1)\alpha \quad . \tag{9a}$$

B. Der betrachtete Strahl verlaufe nicht im Hauptschnitt des Prismensystems.

Dann ist seine Verfolgung, wie wir oben andeuteten, etwas umständlicher. Versteht man unter ϑ und φ die Winkel, welche die Projektion des Strahles auf den Hauptschnitt eines Prismas mit dem Strahl bezw. der Einfallsnormalen bildet, dann haben wir bei einem solchen Prisma in Luft gemäß den

[1] Die außerordentlich zahlreichen Abhandlungen mit Beweisen dieses Satzes sind von H. KONEN im Handb. d. Spektroskopie von H. KAYSER, Leipzig 1900 zusammengestellt. Siehe daselbst auch über Apparate zur Demonstration des Strahlenverlaufs in Prisma.

Gleichungen (1), wenn n der Brechungsindex des Prismas ist, an der ersten Fläche:

(1a) $$n \sin i_1' = \sin i_1 \quad ,$$

(1b) $$\frac{\sin \vartheta_1'}{\sin \vartheta_1} = \frac{1}{n} \quad ,$$

(1c) $$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_1'} = \frac{n \cos \vartheta_1'}{\cos \vartheta_1} \quad .$$

Da für die zweite Fläche des Prismas die Projektionsebene dieselbe ist, so hat man $\vartheta_2 = \vartheta_1'$, demnach folgt aus

(1b') $$\frac{\sin \vartheta_2'}{\sin \vartheta_2} = n \quad ,$$

daß $\vartheta_2' = \vartheta_1$ ist, d. h. der austretende Strahl gegen den Hauptschnitt des Prismas ebenso stark geneigt ist, als der eintretende. Bezeichne ich daher kurz mit ϑ den betreffenden Winkel in Luft, mit ϑ' den im Prisma, so wird durch

(1c') $$n \sin \varphi_1' \cdot \cos \vartheta' = \sin \varphi_1 \cos \vartheta$$

und

$$\sin \varphi_2' \cos \vartheta = n \sin \varphi_2 \cos \vartheta'$$

in Verbindung mit (1b) und der Beziehung $\varphi_2 = \varphi_1' - \alpha$ der Weg der Projektion des Strahles auf den Hauptschnitt innerhalb dieses bestimmt.

Die Ablenkung η, welche die Projektion eines Strahles auf den Hauptschnitt erfährt, ist nun dasselbe wie die Projektion der Ablenkung E des Strahles selbst auf den Hauptschnitt, es ist dann $\cos \frac{1}{2} E = \cos \frac{1}{2} \eta \cdot \cos \vartheta$, demnach erstere stets kleiner als letztere. Ihr Minimum η_0 findet, ganz ebenso wie das eines wirklichen Strahles, statt, wenn die Projektion in dem Hauptschnitt symmetrisch verläuft, also, wenn $\varphi_1 = -\varphi_2' = \frac{1}{2}(\eta_0 + \alpha)$; sie ist daher aus (1c') bestimmt gemäß

(10) $$\sin \tfrac{1}{2}(\eta_0 + \alpha) \cdot \cos \vartheta = n \sin \tfrac{1}{2} \alpha \cdot \cos \vartheta' \quad .$$

Für $\vartheta = 0$ wird die Bestimmungsgleichung und alle in sie eintretende Größen dieselben, wie für einen Strahl im Hauptschnitt, folglich

(8) $$\sin \tfrac{1}{2}(\eta_0 + \alpha)_{\vartheta = 0} = n \cdot \sin (\tfrac{1}{2} \alpha) = \sin \tfrac{1}{2}(\varepsilon_0 + \alpha) \quad .$$

Daher allgemein für andere Werte von ϑ

(10a) $$\sin \tfrac{1}{2}(\eta_0 + \alpha) = \sin \tfrac{1}{2}(\varepsilon_0 + \alpha) \frac{\cos \vartheta'}{\cos \vartheta} \quad .$$

Nun ist stets $\vartheta' < \vartheta$, also $\cos \vartheta' / \cos \vartheta > 1$, daher auch stets

$$\sin \tfrac{1}{2}(\eta_0 + \alpha) > \sin \tfrac{1}{2}(\varepsilon_0 + \alpha) \quad .$$

Folglich hat *a fortiori* das Minimum der Ablenkung eines außerhalb des Hauptschnittes verlaufenden Strahles einen größeren Betrag als das eines im Hauptschnitt verlaufenden[1].

Die Ablenkungen der von einer zur Prismenkante parallelen Geraden aus in verschiedenen Neigungen zum Hauptschnitt einfallenden Strahlen werden nach Bravais, Reusch und Cornu[2] durch dieselbe Formel dargestellt, wie die Ab-

---

[1] Vgl. E. Reusch a. a. O., p. 248. Heath, Treatise (zitiert p. 26), p. 31 f.; deutsche Ausgabe von Kanthak, p. 32 f. — [2] M. A. Cornu, Réfraction à travers un prisme suivant une loi quelconque. Ann. de l'Éc. norm. (2) **1.** 231. 1872. Vgl. auch Christie, Note on the curvature of lines in the spectrum an the method of correcting it. Monthly Not. **34.** 263. 1875. Bemerkungen hierzu von Simms, ibid. p. 363. Crova, Etudes des aberrations des prismes et de leur influence sur les observations spectroscopiques. Ann. de chim. et de phys. (5) **22.** 513.

lenkung des im Hauptschnitt verlaufenden Strahles, wenn man dem brechenden Medium in bezug auf jeden Strahl an Stelle von n den Brechungsexponenten

$$n_\vartheta = \sqrt{n^2 + (n^2 - 1)\,\mathrm{tg}^2\,\vartheta}$$

zuerteilt.

Die Krümmung der Spektrallinien. Infolge dieser Verhältnisse werden Strahlen, die von den Punkten einer zur Prismenkante parallelen Geraden ausgehen und unter verschiedenen Winkeln gegen den Hauptschnitt des Prismas verlaufen (z. B. sich alle in einem Punkte — etwa in der Pupille des Beobachters — kreuzen) verschiedene Ablenkung erfahren. Die geringste Ablenkung erfährt derjenige Strahl, welcher mit jenem Kreuzungspunkt in demselben Hauptschnitt des Prismas liegt, die anderen desto größere Ablenkung, je größere Winkel sie beim Einfall mit dem Hauptschnitt bilden. Wenn diese Strahlen die Achsen von Büscheln sind, deren Spitzen in jener Geraden liegen, so wird das Bild der Geraden im Sehfeld gekrümmt erscheinen, einen Bogen bilden, dessen Scheitel in dem durch den Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen (z. B. der Pupille des durch das Prisma blickenden Auges) gehenden Hauptschnitt liegt[1].

II. Die Abbildung durch Prismensysteme.

Bei den folgenden Betrachtungen beschränken wir uns auf Prismensysteme, deren Hauptschnitte zusammenfallen, und auf Strahlenbüschel, deren Achsen in diesem Hauptschnitt verlaufen. Die von einem Prisma erzeugten Bilder, dessen Hauptschnitt schief von den Achsen durchsetzt wird, sind von HELMHOLTZ[2] auf analytischem Wege untersucht worden.

Die Beziehungen zwischen konjugierten Punkten. Der Astigmatismus.

Die Modifikationen, welche ein von einem leuchtenden Punkte ausgehendes breites oder enges Büschel bei normaler wie schiefer Inzidenz durch Brechung an einem Systeme von Ebenen erfährt, werden ohne weiteres aus denjenigen bei der Brechung an Kugelflächen abgeleitet, indem man deren Radien sämtlich gleich ∞ setzt. Die Möglichkeit einer Abbildung durch solche Brechungen, sowie deren Grenzen und Fehler lassen sich unmittelbar aus den früher angestellten Betrachtungen auf den vorliegenden Fall übertragen.

Bei **senkrechter Inzidenz des Hauptstrahles** ist die Abbildung in dem ihn umgebenden fadenförmigen Raume symmetrisch um ihn. Zwischen den Scheitelabständen von Objekt und Bild findet bei jeder Brechung die Beziehung statt (vgl. p. 76)

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} \quad \text{oder} \quad s' = \frac{n'}{n} s \quad . \tag{11}$$

Das Konvergenzverhältnis in konjugierten Punkten ist konstant $\gamma = n/n'$, ebenso die Lateralvergrößerung $\beta = +1$. In der Tat repräsentiert eine brechende Ebene und ebenso ein System von solchen den in einem früheren Abschnitt (p. 52) hervorgehobenen Fall der „teleskopischen“ Abbildung.

1881. Vgl. die Darstellung von H. KONEN, l. c.: BRAVAIS, Journ. éc. polytechn. **18.** cah. 30. p. 79. 1845 und cah. 31. p. 27. 1847 und REUSCH, POGG. Ann. **117.** 248. 1862 hatten schon früher $n_\vartheta^2 - 1 = (n^2 - 1)\sec^2\vartheta$ angegeben, eine mit der CORNUschen identische Formel.

[1] Genauere Berechnung der Bildkurve bei DITSCHEINER, Wien. Sitzber. **51.** 368. 1865; POGG. Ann. **129.** 336. 1866 und HEPPERGER, Wien. Sitzber. **92.** 109. 1885. — [2] H. v. HELMHOLTZ, Handb. d. Physiol. Optik. Leipzig 1867. § 19; auch Wissensch. Abhdlg. **2.** 83. Leipzig 1883. — Die historische Folge der unten angeführten neueren, für die Entwickelung der folgenden Betrachtungen wichtigsten Arbeiten ist: v. HELMHOLTZ, ZECH, GLEICHEN, CZAPSKI (erste Auflage dieses Buches), BURMESTER, WILSING, STRAUBEL.

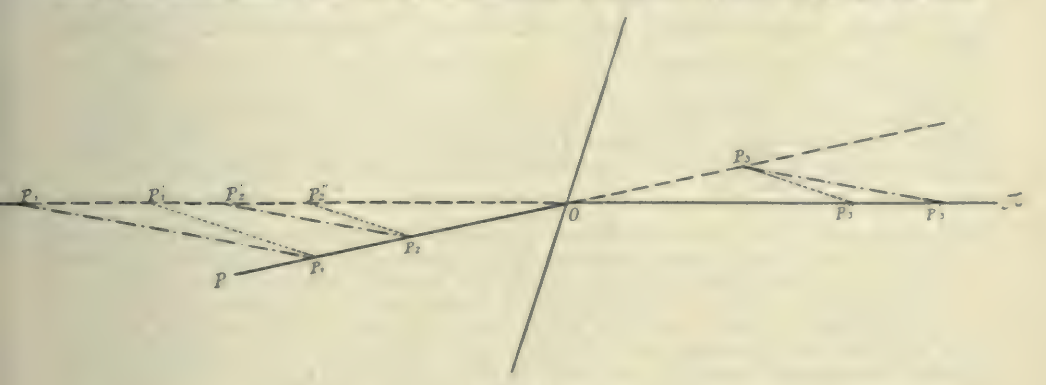
Die Abbildung bei normaler Inzidenz ist auf unendlich kleine Büschelöffnungen beschränkt. Ein homozentrisches Büschel endlicher Öffnung ergibt eine Kaustik[1], deren beide Teile die geometrischen Örter der ersten und zweiten Brennpunkte der von jenem Punkte ausgegangenen schiefen Elementarbüschel sind, in welche man das ganze Büschel zerlegt denken kann.

Die Abbildung kann für mehrere Ebenen eine solche bei normaler Inzidenz natürlich nur dann bleiben, wenn diese sämtlich einander parallel sind oder sehr kleine Winkel mit einander bilden. Anderenfalls wird die Achse der Abbildung zu den Normalen der folgenden Flächen geneigt und wir haben es zu tun mit der

Abbildung bei schiefer Inzidenz des Hauptstrahles. Das Büschel erfährt dann die p. 87 ff. beschriebene astigmatische Veränderung. Die Abbildung zerfällt in zwei getrennte, auf je eine Ebene — die Einfallsebene (tangentiale) und die zu ihr senkrechte (sagittale) — beschränkte mit verschiedenen Grundfaktoren[2].

Geometrische Betrachtung.

In dem allgemeineren Falle der schiefen Brechung an einer Kugelfläche (p. 96) erhielten wir auf dem gebrochenen Strahle zwei zu den Punkten des einfallenden projektive Punktreihen. Hier, wo die Brechung an einer Ebene stattfindet, entsprechen offenbar die unendlich entfernten Objekt- und Bildpunkte einander; also geht die allgemein projektive in die affine Beziehung über; die Punktreihen werden ähnlich, und die beiden Abbildungen in der Sagittal- und Tangentialebene sind teleskopisch. Die bei der Konstruktion konjugierter Punkte auf p. 92 benutzten



Figur 51.

Die Abbildung bei schiefer Brechung an einer Ebene.

OP einfallender Strahl, $O\Pi$ gebrochener Strahl; $P_1\,P_2\,P_3$ Objektpunkte, $P_1'\,P_2'\,P_3'$ tangentiale, $P_1''\,P_2''\,P_3''$ sagittale Bildpunkte, erzeugt durch Elementarbüschel mit OP als Achse.

Zentra der Perspektive K (im Tangentialschnitt) und C (im Sagittalschnitt) rücken daher ins Unendliche; also sind die Verbindungslinien der Punkte $P_1\,P_2\,\ldots$ des einfallenden Strahles mit den im Tangentialschnitt zu ihnen konjugierten des gebrochenen Strahles P_1', $P_2'\,\ldots$, einander parallel und dasselbe gilt von den Geraden, die die Punkte P_1, $P_2\,\ldots$ bezüglich mit den ihnen im Sagittalschnitt entsprechenden $P_1''\,P_2''\,\ldots$ verbinden. Diese letzteren Geraden müssen auf der brechenden Ebene (wie früher auf der brechenden Kugelfläche) senkrecht stehen, da der sagittale Bildpunkt eines Punktes P derselbe ist, den ein Kreiskegel von Strahlen mit der Spitze in P erzeugen würde, dessen Achse senkrecht zur brechenden Ebene steht und dessen Öffnungs-

[1] Siehe die Literatur über Kaustiken, oben p. 19, ferner u. a. O. Röthig, Probleme der Brechung u. s. w. p. 49. Leipzig 1876. J. Ritz, Beobachtung und Berechnung über Brechung homozentrischen Lichtes an n parallelen Ebenen. Progr. Handelsschule, München 1879. P. G. Tait, Light, Edinb. 1884, p. 89. — [2] Die Richtung der Brennlinien ist hier ebenso wie in dem allgemeinen früher behandelten Falle bestimmt: als senkrecht zum Hauptstrahl und in, bezw. senkrecht zu der Einfallsebene gelegen — bis auf Abweichungen von der zweiten Ordnung. Die genauere Ermittelung derselben — analog zu den gleichartigen p. 24 und 94 erwähnten Untersuchungen von Matthiessen für Brechung an Kugelflächen — haben für den Fall eines Prismas in Luft, E. Reusch, Pogg. Ann. **130.** 499. 1867 und besonders P. Zech, Ztschr. f. Math. u. Phys. **24.** 168. 1879, vorgenommen.

winkel gleich dem Einfallswinkel unseres einfallenden Strahles ist. Diese Sätze ergeben sich natürlich auch direkt aus den unten abgeleiteten Gleichungen (11) und (12).

Auch die Abbildung durch eine Anzahl von brechenden Ebenen, die auf einer den einfallenden Strahl enthaltenden Ebene senkrecht stehen, also durch einen Prismensatz mit gemeinsamem Hauptschnitt, den die Achse der Abbildung nach keiner Brechung verläßt, ist bestimmt durch die im zweiten Kapitel abgeleiteten Sätze über die Zusammensetzung teleskopischer Systeme, da stets die Bildebene und -Achse der einen Abbildung, die Objektebene und -Achse der nächsten ist; und zwar setzen sich dabei tangentiale in tangentiale, sagittale in sagittale Abbildungen fort.

Die homozentrische Abbildung.

war früher bereits unter ganz allgemeinen Voraussetzungen erörtert worden, die einen Prismensatz der bezeichneten Art als Spezialfall enthalten (p. 103). Nach den ABBEschen Sätzen war eine homozentrische Abbildung in dem früher betrachteten allgemeineren Falle für keinen, für alle Punkte des einfallenden Strahles vorhanden, oder für zwei solche Punkte, die auch in einen zusammenfallen konnten. Da durch brechende Ebenen der unendlich entfernte Punkt jedenfalls abgebildet wird, so ist die erste Möglichkeit hier ausgeschlossen, die zweite tritt offenbar nur in Spezialfällen ein. Es wird also durch Prismensätze auf einem beliebigen Strahle als Achse eines abbildenden Elementarbüschels im allgemeinen ein und nur ein endlich entfernter Punkt vorhanden sein, der homozentrisch abgebildet wird; und zwar wird dann nach p. 104 ein in diesem Punkte achsensenkrechtes Flächenelement mit in zwei auf einander senkrechten Richtungen verschiedener Vergrößerung und der Achsenpunkt selbst mit in zwei auf einander senkrechten Azimuten verschiedenem Konvergenzverhältnis abgebildet werden. Die Vergrößerung und das Konvergenzverhältnis ist in den beiden auf einander senkrechten Abbildungen, da es teleskopische sind, konstant, und zwar sind im Sagittalschnitt (wenn wir den Prismensatz beiderseits von demselben Medium begrenzt annehmen, sonst tritt der Faktor $\frac{n}{n'}$ hinzu) beide $= 1$. Im Tangentialschnitt ist das Konvergenzverhältnis $\frac{\delta i'}{\delta i}$ nach Gleichung (6) auf p. 186 zu erhalten, es ist $= \prod \frac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k} = \nu$; die Vergrößerung also $= \frac{1}{\nu}$. (Im unendlich entfernten Punkte ist, wie das bei jeder teleskopischen Abbildung der Fall und auch ohne weiteres geometrisch einleuchtend ist, dann im Tangentialschnitt die „Vergrößerung“ gleichbedeutend mit dem Konvergenzverhältnis für endliche Punkte, also $= \nu$ und das Konvergenzverhältnis $= \frac{1}{\nu}$; es treffen also unsere im allgemeinen Falle für die zwei homozentrisch abgebildeten Punkte geltenden Sätze auch hier zu.) Wenn die beiden homozentrisch abgebildeten Punkte zusammenfielen, so erhielten wir gleiche Vergrößerung in allen Azimuten; hier muß, da der unendlich entfernte Punkt immer homozentrisch abgebildet wird, der andere in ihn hineinfallen und die Vergrößerung muß auch im Tangentialschnitt $= 1$ sein. Dies führt auf Gleichung (7) oder (7a), die gleichzeitig Bedingung des Minimums der Ablenkung war. In diesem Falle wird also nur der unendlich entfernte Punkt homozentrisch abgebildet. Da aber nach Gleichung (I*) auf p. 47 in diesem Falle die Tiefenvergrößerung in beiden ebenen Schnitten $= 1$ ist, so muß die astigmatische Differenz für alle Punkte des einfallenden Strahles dieselbe sein. Tritt der Strahl durch eine allen brechenden Ebenen gemeinsamen Schnittkante, so ist sein Schnittpunkt mit dieser Kante sein eigener tangentialer und sagittaler Bildpunkt. Da im Falle der Minimalablenkung außerdem der unendlich entfernte Punkt mit in zwei auf einander senkrechten Azimuten g l e i c h e m Konvergenzverhältnis abgebildet wird, so kann dann nicht mehr „der Fall der 2 Punkte“ vorliegen und es tritt der oben an zweiter Stelle erwähnte Fall ein, daß alle Objektpunkte homozentrisch abgebildet werden und zwar fallen zwei und infolgedessen alle Objektpunkte mit ihren Bildpunkten zusammen.

Die homozentrische Abbildung in Prismensystemen ist zuerst von BURMESTER[1] und zwar auf geometrischem Wege untersucht worden. WILSING[2] machte darauf aufmerksam, daß sie sich auch direkt aus unseren unten abgeleiteten Gleichungen (16) ergibt. Wir werden daher im folgenden die BURMESTERschen Sätze aus diesen Gleichungen erhalten.

Wir fanden auf p. 93 für die Scheitelabstände konjugierter Punkte: im Sagittalschnitt:

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n}{s} \quad \text{oder} \quad s' = \frac{n'}{n} s \tag{11}$$

und daher für das Konvergenzverhältnis

$$\gamma_s = \frac{dv'}{dv} = \frac{s}{s'} = \frac{n}{n'} \quad ,$$

[1] L. BURMESTER, Ztschr. f. Math. u. Phys. **40**. 65. 1895. — [2] WILSING, ibid. p. 353.

also identisch mit den Beziehungen für senkrechte Inzidenz des Hauptstrahles; **im Tangentialschnitt:**

(12)
$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{n'}{t'} = \dfrac{n}{t} \cdot \dfrac{\cos^2 i}{\cos^2 i'} \quad \text{oder} \quad t' = \dfrac{n'}{n} \dfrac{\cos^2 i'}{\cos^2 i} t \\ \text{und} \\ \qquad \gamma_t = \dfrac{du'}{du} = \dfrac{t}{t'} \dfrac{\cos i'}{\cos i} = \dfrac{n \cos i}{n' \cos i'} \end{array}\right. .$$

Ein homozentrisches Büschel ($t = s$) erhält also durch die einmalige Brechung unter den Winkeln i, i' die astigmatische Differenz

(13)
$$(t' - s') = \frac{n'}{n} t \left(\frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i} - 1\right) .$$

Die Gleichungen (11) und (12) für die Bildorte gestatten den Astigmatismus zu berechnen, welchen ein Büschel durch die Brechung in einem System von $p - 1$-Prismen erhält[1].

Man hat hierzu zwei Systeme von je $2p$ Gleichungen, nämlich für die

Sagittalstrahlen	Tangentialstrahlen
(14) $\left. \begin{array}{l} s_k' = \dfrac{n_{k+1}}{n_k} s_k \\ s_{k+1} = s_k' - d_k \end{array} \right\|_{k=1}^{k=p}$	$\left. \begin{array}{l} t_k' = \dfrac{n_{k+1}}{n_k} t_k \dfrac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k} \\ t_{k+1} = t_k' - d_k \end{array} \right\|_{k=1}^{k=p}$ (15)

worin d_k der von dem betreffenden Hauptstrahl in dem Prisma zurückgelegte Weg ist und s_1 bezw. t_1 sowie n_1 die auf das erste, s_p', t_p', $n_{p+1} = n_p'$ die auf das letzte das Prismensystem begrenzende Medium bezogenen Werte der betreffenden Größen sind.

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt, wenn wir $n_1 = n_p' = 1$, also ein beiderseits von Luft begrenztes Prismensystem annehmen

(14a)
$$s_p' = s_1 - \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{d_k}{n_{k+1}}$$

unabhängig von den i_k, i_k' und

(15a)
$$t_p' = t_1 \prod \left(\frac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k}\right)_{k=1}^{k=p} - \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{d_k}{n_{k+1}} \prod \left(\frac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k}\right)_{k=k+1}^{k=p} .$$

Aus Gleichung (14a) und (15a) folgt, daß eine Ebene durch Elementarbüschel mit parallelen Hauptstrahlen (bei „telezentrischer" Einrichtung der Abbildung, wie wir sie im folgenden Kapitel erörtern werden) wieder in eine Ebene abgebildet wird. Jedoch sind die „sagittale" und die „tangentiale Bildebene" im allgemeinen verschieden.

Für $s_1 = t_1 = a$ ist

(16)
$$t_p' - s_p' = a \left[\prod \left(\frac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k}\right)_{k=1}^{k=p} - 1\right] - \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{d_k}{n_{k+1}} \left[\prod \left(\frac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k}\right)_{k=k+1}^{k=p} - 1\right] .$$

---

[1] Es ist hier bequemer, diesen Astigmatismus direkt durch die Differenz der letzten Schnittweiten selbst zu bemessen und nicht — wie früher und wie das auch an sich rationeller wäre — nach der Differenz der Reziproken von s und t. In der Tat darf man, worauf H. KONEN, l. c. p. 273 Anm., aufmerksam machte, durch Betrachtung der Größe $t' - s'$ sich nicht zu falschen Schlussen verleiten lassen. Nach Gleichung (16) wird z. B. bei unendlich werdendem a diese Differenz (außer beim Minimum der Ablenkung) ebenfalls unendlich. Trotzdem liefern, wie selbstverständlich, unendlich entfernte Punkte anastigmatische Bilder.

Es gibt also für jedes System von Werten der d und der Einfalls- und Austrittswinkel i und i' ein a, also auf jedem durch ein gegebenes Prismensystem tretenden Strahle S einen endlich entfernten Punkt, für den der Astigmatismus verschwindet, der also durch ein diesen Strahl enthaltendes Elementarbüschel homozentrisch abgebildet wird. Betrachtet man alle diesem Strahle S parallel durch das Prismensystem tretenden Strahlen, so liegen diejenigen ihrer Punkte, die in derselben Weise homozentrisch abgebildet werden, in einer Ebene (die natürlich zum gemeinsamen Hauptschnitt senkrecht steht). Denn da für irgend zwei parallele Strahlen der Faktor $\frac{\cos^2 i_k'}{\cos^2 i_k}$ derselbe ist, so ist a eine lineare Funktion der d_k. Beim Übergang von S zu einem parallelen Strahle ändern sich aber auch die d linear mit der Entfernung von S. Also ist auch a beim Übergang von S zu parallelen Strahlen eine lineare Funktion der Entfernung von S. Oder die anastigmatisch abgebildeten Objektpunkte liegen auf einer Ebene; und das gleiche gilt von ihren Bildpunkten. Diese Ebene wird also durch Büschel mit parallelen Hauptstrahlen und von unendlich kleiner Öffnung homozentrisch abgebildet. Andere Ebenen, die dieser parallel sind, werden durch Elementarbüschel mit denselben Hauptstrahlen mit astigmatischen Differenzen abgebildet, die nach (16) dem Abstande dieser Ebenen von der bevorzugten proportional sind[1].

Eine Ausnahme bildet der Fall der kleinsten Ablenkung und der parallelen Lage der brechenden Ebenen. In beiden Fällen gilt Gleichung (7a); dann verschwindet in Gleichung (16) der Faktor von a; die astigmatische Differenz wird unabhängig von der Entfernung des leuchtenden Punktes; sie hängt aber dann noch wesentlich mit von den Größen d_k ab und verschwindet mit diesen[2].

Bei endlicher Größe der d_k ist der Astigmatismus stets (vgl. die Anmerkung auf p. 193) relativ zur Bild- oder Objektentfernung desto geringfügiger, je größer diese sind und wird gleich Null bei unendlich entferntem Objekte — wie denn auch die unmittelbare Betrachtung zeigt, daß parallelstrahlige Büschel durch die Brechung an Ebenen keine anderen Modifikationen erfahren als solche ihrer Richtung und ihres Querschnitts. Hierin liegt ein wesentlicher Vorteil der Anwendung paralleler Büschel bei allen spektroskopischen Untersuchungen.

Das Bild eines vertikalen zur Kante der Prismen parallelen Spaltes in einem Spektroskop würde allerdings gemäß dem p. 94/95 ausgeführten (vgl. Figur 32) auch bei nicht aufgehobenem Astigmatismus scharf bleiben, wenn man das Beobachtungsfernrohr auf dasselbe entsprechend einstellte. Nur die horizontalen Endlinien des Spaltes würden verwaschen erscheinen. Doch bietet die Anwendung telezentrischer Büschel bei messenden Untersuchungen den weiteren Vorteil, daß man es alsdann nur mit Richtungen und deren Änderungen zu tun hat, und daß man unabhängig wird von den gegenseitigen Entfernungen des Prismensystems, Kollimators und Beobachtungsfernrohrs.

Bei **einem einfachen Prisma in Luft** ist mit den Bezeichnungen von p. 187

$$s' = s - \frac{d}{n} \quad, \tag{14*}$$

unabhängig von den Winkeln des Hauptstrahles;

$$t' = \frac{\cos^2 i'}{\cos^2 r'}\left(\frac{\cos^2 r}{\cos^2 i}t - \frac{d}{n}\right) \quad, \tag{15*}$$

also für $s = t = a$:

$$t' - s' = a\left(\frac{\cos^2 r}{\cos^2 i}\cdot\frac{\cos^2 i'}{\cos^2 r'} - 1\right) - \frac{d}{n}\left(\frac{\cos^2 i'}{\cos^2 r'} - 1\right) \quad . \tag{16*}$$

Dieser Ausdruck $= 0$ gesetzt ist die Bedingung homozentrischer Abbildung.

[1] L. BURMESTER, l. c. — [2] Vgl. die analogen Untersuchungen von A. GLEICHEN, Ztschr. f. Math. u. Phys. **34.** 161. 1889 (von denen ich erst nach Abschluß der meinigen (1886) Kenntnis erhielt).

Die Ebenen, deren Punkte, wie oben gezeigt wurde, durch parallele Elementarbüschel abgebildet werden, gehen durch die Kante des Prismas.

In der Stellung der minimalen Ablenkung ist

$$\bar{t}' = \bar{t} - \frac{\cos^2 i'}{\cos^2 r'} \frac{\bar{d}}{n}$$

und

$$\bar{t}' - \bar{s}' = \frac{\bar{d}}{n}\left(1 - \frac{\cos^2 i'}{\cos^2 r'}\right) \quad .$$

Daraus ergeben sich für homozentrische Abbildung die oben im allgemeineren Falle abgeleiteten Sätze.

Unter Vernachlässigung des im Prisma zurückgelegten Weges (nahe der Kante) ist

$$t' = t \frac{\cos^2 r \cdot \cos^2 i'}{\cos^2 i \cdot \cos^2 r'}$$

oder

$$(15^{**}) \qquad t'\left(\frac{n^2 - 1}{\cos^2 i'} + 1\right) = t\left(\frac{n^2 - 1}{\cos^2 i} + 1\right) \quad .$$

Im Minimum der Ablenkung $i = i'$ ist also nahe der Kante eines Prismas

$$\bar{t}' = \bar{t} \quad .$$

Geht man aus dieser Stellung des Prismas zu benachbarten über, so ergibt die Gleichung (15**): „Die größere Vereinigungsweite kommt den Strahlen auf der Seite des Prismas zu, wo der Einfallswinkel kleiner ist" (HELMHOLTZ). Man kann die bei nicht parallelen Büscheln auftretende Änderung der tangentialen Bildweite bei der Drehung des Prismas benutzen, um mit Hilfe eines guten Prismas Kollimator und Fernrohr auf ∞ einzustellen, ohne ein GAUSSsches Okular zu Hilfe zu nehmen. Geht man nämlich von der Stellung der Minimalablenkung des Prismas aus zu größeren Einfallswinkeln, so muß man das Okular des Fernrohres herausziehen, um den vertikalen Spalt des Kollimators deutlich sichtbar zu behalten, wenn derselbe von dem Objektiv zu weit entfernt war; und hineinschieben, wenn er demselben näher als der Brennpunkt war. Beim Übergang zu kleineren Einfallswinkeln umgekehrt (vgl. HELMHOLTZ, Physiol. Optik I. Aufl. p. 257). Ein ähnliches Verfahren wurde von SCHUSTER vorgeschlagen. Phil. Mag. (5) 7. 95. 1879.

Wenn der Hauptstrahl nicht im Hauptschnitt des Prismas verläuft, so kann ebenfalls homozentrische Abbildung stattfinden, wie BURMESTER[1] gezeigt hat. Auch dieser Fall ordnet sich natürlich den allgemeinen ABBEschen Sätzen von p. 103 unter. WILSING[2] hat die BURMESTERschen Resultate aus den HELMHOLTZschen Ansätzen, in denen er aber die Dicken nicht vernachlässigte, ebenfalls nachgewiesen.

Die Vergrößerung in Prismensystemen (scheinbare Größe der Bilder von Spalten).

Wie wir schon oben erwähnten, sind sowohl die sagittale als die tangentiale Abbildung in ebenen Systemen teleskopische Abbildungen. Für beide sind also die Lateralvergrößerung β und das Konvergenzverhältnis γ konstant. Für den Sagittalschnitt ist nach Gleichung (11) auch für einen Prismensatz von p-Flächen: $\gamma_s = \frac{n_1}{n_p}$, also nach der HELMHOLTZ-LAGRANGEschen Gleichung:

$$\beta_s = 1 \quad .$$

Im Tangentialschnitt ist nach Gleichung (12) oder (6):

$$(17) \qquad \gamma_t = \frac{\delta i_p'}{\delta i_1} = \frac{n_1}{n_p} \prod \left(\frac{\cos i_k}{\cos i_k'}\right)_{k=1}^{k=p} \quad ,$$

[1] L. BURMESTER, l. c. — [2] WILSING, l. c.

also

$$\beta_t = \prod \left(\frac{\cos i_k'}{\cos i_k}\right)_{k=1}^{k=p} .$$

Für das Minimum der Ablenkung ist nach Gleichung (7):

$$[\gamma_t] = 1 \quad , \qquad [\beta_t] = \frac{n_1}{n_p'} .$$

γ_t ist auch die scheinbare Vergrößerung eines unendlich entfernten Objekts.

Der Spalt eines Spektroskops ist aber, vor den Kollimator gesetzt, ein solches unendlich entferntes Objekt, das, weil aus zwei zum Hauptschnitt senkrechten Linien bestehend, entsprechend der Figur 32 auf p. 95 durch tangentiale Büschel erzeugt wird. Seine scheinbare Vergrößerung ist also $\frac{n_1}{n_p'} \prod \left(\frac{\cos i_k}{\cos i_k'}\right)_{k=1}^{k=p}$ und ist im Minimum der Ablenkung $= 1$. Die Breite des Spaltes erscheint daher unendlich klein bei jeder Stellung des Prismensystems, bei welcher einer der Einfallswinkel $i_k = \frac{\pi}{4}$ ist, und jedesmal unendlich vergrößert, wenn einer der Austrittswinkel $i_k' = \frac{\pi}{2}$ ist, außer wenn beides zugleich vorkommt.

Bei einem einzelnen Prisma in Luft ist

$$(17^*) \qquad \left\{ \begin{aligned} \gamma_t = \frac{\delta i'}{\delta i} = \frac{\cos i \cdot \cos r'}{\cos r \cdot \cos i'} \\ \text{oder} \qquad \\ \frac{\delta i'}{\sqrt{\frac{n^2-1}{\cos^2 i'}+1}} = \frac{\delta i}{\sqrt{\frac{n^2-1}{\cos^2 i}+1}} \end{aligned} \right. .$$

Hieraus folgt nebenbei, daß bei einem solchen Prisma, wenn die Länge des Strahles in dem Prisma vernachlässigt wird

$$\delta i' : \delta i = \sqrt{t} : \sqrt{t'} \quad .$$

Die scheinbare Breite des Spaltes, betrachtet durch ein einfaches Prisma, wächst also von derjenigen Stellung, bei der der Hauptstrahl streifend einfällt — bei der sie $= 0$ ist — stetig bis zu derjenigen Stellung, wo der Hauptstrahl aus dem Prisma streifend austritt, in welchem Falle jene Breite $= \infty$ wird.

Prismensysteme, die nur zur Vergrößerung dienen, also achromatisierte geradsichtige Kombinationen, die ein einfallendes paralleles Büschel in einem Azimut verbreitert austreten lassen, heißen BREWSTERsche Prismen[1].

AMICI hat bereits 1824 (vgl. H. KONEN, l. c. p. 276) zwei gleiche Prismen dieser Art in gekreuzter Stellung als Ersatz einer Linse angewandt.

Eine solche Kombination bildet unendlich entfernte Objekte mit in zwei auf einander senkrechten Richtungen gleicher Vergrößerung ab. Besitzt sie noch einen weiteren homozentrisch abgebildeten Punkt, so werden nach den ABBEschen Sätzen alle Punkte des Hauptstrahles anastigmatisch, wie von einer Linse, abgebildet.

Planparallele Platten.

Dieselben bilden nur einen Spezialfall der Prismen, nämlich denjenigen, wo der brechende Winkel gleich Null ist. Es ist daher der Einfallswinkel an irgend einer Fläche stets gleich dem Brechungswinkel an der vorangehenden. Haben erstes und letztes Medium gleiches n, so ist der austretende Strahl parallel dem eintretenden, ganz gleich, welches die Folge der brechenden Schichten ist. Der austretende Strahl ist gegen den einfallenden nur seitlich verschoben.

[1] W. BREWSTER, Optics. London 1833.

Der Austrittspunkt des Strahles aus der $k$ten Platte ist von dem in diese Platte einfallenden Strahl um die Strecke

$$e_k = \frac{D_k \sin(i_k - i_k')}{\cos i_k'}$$

entfernt, wenn D_k die Dicke der Platte i_k und i_k' Einfalls- und Brechungswinkel an ihrer vorderen Fläche sind. Der schließlich austretende Strahl ist also von dem einfallenden um

$$(18) \qquad e^{(p)} = \sum e_k = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{D_k \sin(i_k - i_k')}{\cos i_k'}$$

entfernt.

Auf dieser Wirkung planparalleler Platten beruht das von HELMHOLTZ erfundene Ophthalmometer, bei dem durch entgegengesetzte Drehung zweier Glasplatten um dieselbe Achse die scheinbaren Orte zweier. in naher Entfernung von einander befindlicher Objekte identisch gemacht werden[1].

Für die Scheitelabstände konjugierter Brennpunkte bei einer beiderseits in demselben Medium (n) liegenden Planplatte (n') mit der Dicke D gilt

$$s' = s_0 - \frac{n}{n'} \frac{D}{\cos i'} \quad , \qquad t' = t_0 - \frac{n}{n'} \frac{D}{\cos i'} \frac{\cos^2 i}{\cos^2 i'} \quad .$$

Für $s_0 = t_0$ ist der Astigmatismus gegeben durch

$$t' - s' = \frac{n}{n'} \frac{D}{\cos i'} \left(1 - \frac{\cos^2 i}{\cos^2 i'}\right) \quad \text{oder auch} \quad = \frac{n}{n'} \frac{D}{\cos i'} \cdot \frac{n^{2'} - n^2}{n^2} \operatorname{tg}^2 i' \quad .$$

Die katadioptrischen Prismen

ordnen sich natürlich den allgemeinen Sätzen unter, wenn für die spiegelnde Fläche $n' = -n$ gesetzt wird. Wegen ihrer Formen sei auf die geodätischen Lehrbücher[2] verwiesen. Eine Theorie des Revisionsprismas lieferte B. WANACH[3]; WILSING[4] zeigte, daß bei der Methode, ein Bild durch ein gleichschenklig rechtwinkliges Prisma in seiner Ebene zu drehen, notwendig Astigmatismus entsteht.

Die Bilddrehung durch Prismensysteme.

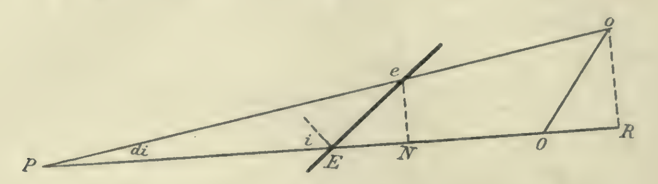
Betrachten wir das tangentiale oder sagittale Bild eines ebenen Objekts, dessen Punkte Elementarbüschel durch ein Prismensystem senden. Wir setzen voraus, daß diese Büschel oder ihre Hauptstrahlen sich in einem beliebigen Punkte P schneiden und beschränken uns auf ein so kleines Objektstück, daß wir von einer gemeinsamen Richtung dieser Hauptstrahlen sprechen können. Liegt P im Unendlichen, so werden wir endliche Objekte betrachten dürfen.

Dann wird das Bild mit der Richtung der bildseitigen Hauptstrahlen im allgemeinen einen anderen Winkel einschließen als das Objekt mit den objektseitigen Hauptstrahlen bildet. Diese „Bilddrehung" wird für die im allgemeinen verschiedenen Bilder der Sagittal- und Tangentialbüschel verschieden sein. Sie wird ausgedrückt durch die folgenden von Dr. ALB. KÖNIG entwickelten Formeln.

Sei (Figur 52) die Entfernung des Punktes P von der ersten brechenden Ebene auf dem einen Hauptstrahl X, auf dem anderen x, die Entfernung der Objektpunkte von derselben T und t, wenn wir die Tangentialstrahlen, S und s, wenn wir die Sagittalstrahlen betrachten. Ziehen wir eine Senkrechte von dem einen Objektpunkt auf den zum anderen gehörigen Hauptstrahl, so erhalten wir

[1] H. HELMHOLTZ, GRÄFES Arch. f. Ophthalm. **2.** 3. 1854. Handb. d. physiol. Opt. 1. Aufl. p. 8; 2. Aufl. p. 10. S. auch A. KÖNIG, Ztschr. f. Instrumentenk. **3.** 153. 1883. — [2] z. B. JORDAN, Handb. d. Vermessungskde., Stuttgart 1890—95. BAUERNFEIND, Elemente d. Vermessungskde., Stuttgart 1890. — [3] B. WANACH, Ztschr. f. Instrumentenkde. **19.** 161 u. 224. 1899. — [4] WILSING, l. c.

auf diesem die „Einstellungsdifferenz“ Δ, die ein achsensymmetrisches Instrument (z. B. eine Lupe), dessen Achse im Hauptstrahl liegt, und in dessen Brennebene das Objekt gebracht werden soll, zwischen den beiden Einstellungen auf den einen und den anderen Objektpunkt aufweisen wird. Wir bestimmen die Änderung von Δ zuerst für eine Brechung.



Figur 52.

Ein Objekt oO und das von o und O ausgehende Büschel, dargestellt durch ihre Hauptstrahlen oP und OP; eE die brechende Ebene.

$EP = X$; $EO = T$ oder S; $OR = \Delta$ $oR = B$
$eP = x$; $eo = t$ oder s $\sphericalangle EeN = i$

1. Tangentiale Büschel. Aus der Figur ergibt sich (i Einfallswinkel des einen, $i + di$ des anderen Hauptstrahles)

(a) $$\Delta = t - T - X\,di\,\mathrm{tg}\,i \quad .$$

Nach einer Brechung gilt ebenso

(A) $$\Delta' = t' - T' - X'\,di'\,\mathrm{tg}\,i' \quad ;$$

nun ist

(b) $$T' = \frac{n'}{n}\frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i}T \quad ,$$

$$X' = \frac{n'}{n}\frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i}X \quad ;$$

daher mit Rücksicht auf

(α) $$\frac{di'}{di} = \frac{n\cos i}{n'\cos i'}$$

(c) $$X'\,di'\,\mathrm{tg}\,i' = X\frac{\sin i'}{\cos i}\,di \quad ;$$

$$t' = \frac{n'}{n}\frac{\cos^2(i'+di')}{\cos^2(i+di)}t = \frac{n'}{n}\left(\frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i} + \frac{d}{di}\frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i}\right)t \quad .$$

Mit Rücksicht auf (α) und $n\sin i = n'\sin i'$ ist

$$\frac{d}{di}\frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i} = 2\frac{\sin i\cos i}{\cos^4 i}\cdot\frac{\sin i^2 - \sin i'^2}{\sin i^2} = 2\frac{\mathrm{tg}\,i}{\cos^2 i}\frac{n'^2 - n^2}{n'^2} \quad ,$$

(d) $$t' = \frac{n'}{n}\frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i}\left(1 + 2\frac{n'^2 - n^2}{n'^2}\frac{\mathrm{tg}\,i}{\cos^2 i'}\,di\right)t \quad .$$

Aus (a), (b), (c) und (d) ergibt sich für Gleichung (A)

$$\Delta' = \frac{n'}{n}\frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i}\left(1 + 2\frac{n'^2 - n^2}{n'^2}\frac{\mathrm{tg}\,i}{\cos^2 i'}\,di\right)(T + X\,di\,\mathrm{tg}\,i + \Delta)$$
$$- \frac{n'}{n}\frac{\cos^2 i'}{\cos^2 i}T - X\frac{\sin i'}{\cos i}\,di \quad .$$

Mit Benutzung von $\frac{n' \cos^2 i'}{n \cos^2 i} - \frac{\sin i'}{\sin i} = \frac{n'^2 - n^2}{n\, n' \cos^2 i}$ folgt

$$\Delta' = \frac{n' \cos^2 i'}{n \cos^2 i} \Delta + \frac{n'^2 - n^2}{n\, n' \cos^2 i} \operatorname{tg} i\, d i (2\, T + X) \quad .$$

Für die Änderung der Einstellungsdifferenz bei der $k$ten Brechung ergibt sich also

$$\Delta_k' = \Delta_{k+1} = \frac{n_{k+1} \cos^2 i_k'}{n_k \cos^2 i_k} \Delta_k + \frac{n^2_{k+1} - n_k^2}{n_k\, n_{k+1}} \frac{\operatorname{tg} i_k}{\cos^2 i_k} d i_k (2\, T_k + X_k)$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Formel für die Änderung von Δ nach p Brechungen

$$\Delta_p' = d i_p' \left[\frac{\Delta_1}{d i_1} \left(\frac{n_p'}{n_1} \right)^2 \prod \left(\frac{\cos^3 i_k'}{\cos^3 i_k} \right)_{k=1}^{k=p} \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{k=p} \left\{ (2\, T_k + X_k) \frac{n_{k+1}^2 - n_k^2}{n_k^2} \frac{\operatorname{tg} i_k \cos i_k'}{\cos^3 i_k} \cdot \prod \left(\frac{\cos^3 i_k'}{\cos^3 i_k} \cdot \frac{n_k'^2}{n_k^2} \right)_{k+1}^{p} \right\} \right] \quad .$$

Setzt man die Breite des Hauptstrahlbüschels am Orte des Objekts $= B$, so ist

$$\operatorname{tg} o\, O R = \frac{B}{\Delta}$$

die Objektneigung. Nun ist

$$B = (T - X)\, d i \quad .$$

Also nach p Brechungen

$$B_p' = (T_p' - X_p')\, d i_p' = \frac{n_p'}{n_1} \prod \left(\frac{\cos i_k'^2}{\cos i_k^2} \right)_{k=1}^{k=p} (T_1 - X_1)\, d i_p' \quad .$$

Durch Division von Δ_p' in B_p' erhält man die Bildneigung nach p Brechungen für tangentiale Büschel.

2. Sagittale Büschel. Man hat analog den Gleichungen a und A

$$\Delta = s - S - X\, d i \operatorname{tg} i \quad ,$$

$$\Delta' = s' - S' - X'\, d i' \operatorname{tg} i'$$

und da das Büschel der Hauptstrahlen dasselbe (ein Tangentialbüschel) ist, nach Gleichung (c)

$$X'\, d i' \operatorname{tg} i' = X \frac{\sin i'}{\cos i} d i \quad ,$$

$$S' = \frac{n'}{n} S \quad ,$$

$$s' = \frac{n'}{n} s = \frac{n'}{n} (\Delta + S + X\, d i \operatorname{tg} i) \quad ,$$

$$\Delta' = \frac{n'}{n} \Delta + \frac{n'}{n} X\, d i \operatorname{tg} i \left(1 - \frac{n}{n'} \frac{\sin i'}{\sin i} \right) \quad ,$$

$$1 - \frac{n}{n'} \frac{\sin i'}{\sin i} = \frac{n'^2 - n^2}{n'^2} \quad ,$$

$$\Delta' = \frac{n'}{n} \Delta + \frac{n'^2 - n^2}{n\, n'} X\, d i \operatorname{tg} i \quad ;$$

für die $k$te Brechung

$$\Delta_k' = \frac{n_k'}{n_k} \Delta_k + \frac{n_k'^2 - n_k^2}{n_k\, n_k'} X_k\, d i_k \operatorname{tg} i_k \quad ;$$

nach p Brechungen

$$\varDelta_p' = d\,i_p' \left[\frac{\varDelta_1}{d\,i_1}\left(\frac{n_p'}{n_1}\right)^2 \prod\left(\frac{\cos i_k'}{\cos i_k}\right)_{k=1}^{k=p} + \sum_{k=1}^{k=p}\left\{\frac{n_k'^2 - n_k^2}{n_k'^2} X_k \operatorname{tg} i_k \prod\left(\frac{\cos i_k'}{\cos i_k}\,\frac{n_k'^2}{n_k^2}\right)_{k=k}^{k=p}\right\}\right].$$

Die Bildneigung erhält man wieder durch Division in die oben angegebene Größe B.

Für parallele Hauptstrahlen (telezentrische Systeme) vereinfachen sich die Formeln, indem alle $d\,i = 0$ werden. In diesem Falle braucht man sich nicht auf unendlich kleine Stücke der Objektebene zu beschränken, da Ebenen in Ebenen abgebildet werden. STRAUBEL[1] hat die **Abbildung einer Ebene durch telezentrische Büschel für ein einfaches Prisma in Luft** vollständig diskutiert. Seine auf einfache Weise abgeleiteten Formeln sind (μ_1 und μ_1' bezeichnen bezüglich die Neigungen von Objekt und Bild gegen die Hauptstrahlen für die Tangentialbüschel, μ_2 und μ_2' für die Sagittalbüschel)

$$\operatorname{tg}\mu_1' \frac{\cos r'}{\cos i'} - \operatorname{tg}\mu_1 \frac{\cos r}{\cos i} = \frac{(n^2-1)\sin\alpha}{n\cos r'\cos r}\cdot\frac{1-\sin i\sin i'\cos(r-r')}{\cos^2 i\cos^2 i'},$$

$$\operatorname{tg}\mu_2' \frac{\cos i'}{\cos r'} - \operatorname{tg}\mu_2 \frac{\cos i}{\cos r} = \frac{(n^2-1)\sin\alpha}{n\cos r\cos r'}.$$

Einige Ergebnisse der Diskussion dieser Formeln (wegen deren Einzelheiten auf die Abhandlung verwiesen werden muß):

Für Tangential- wie für Sagittalbüschel sind Objekt- und Bildneigung im allgemeinen verschieden, indessen kann man für beide Büschelarten und für jede Strahlenneigung ein Paar konjugierter Ebenen finden, deren Neigungen ein beliebiges Verhältnis besitzen. Beim Minimum der Ablenkung entspricht der Fall gleicher Objekt- und Bildneigung Ebenen, die parallel den abbildenden Büscheln liegen.

Einem zu den abbildenden Büscheln normalen Objekt entspricht nie ein normales Bild.

Es kann sowohl für $i > i'$ als für $i < i'$ durch Wahl der Objektneigung μ_1 (μ_2) erreicht werden, daß die Bildneigung μ_1' (μ_2') größer oder auch kleiner als jene ist. Das Minimum der Ablenkung ist dadurch vor jedem anderen Strahlenverlaufe ausgezeichnet, das für jede Objektstellung nur Neigungsvergrößerung stattfindet

Für die Tangentialbüschel ist

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Beim streifenden Eintritt:} & \operatorname{tg}\mu_1' = \infty \\ \text{,, \quad ,, \quad Austritt:} & \operatorname{tg}\mu_1' = \infty\end{array}\right\}\ \text{unabhängig von } \mu_1 .$$

Im Minimum der Ablenkung

$$\operatorname{tg}\mu_1' = \operatorname{tg}\mu_1 + \frac{2\operatorname{tg} i}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{n^2-1}{n^2}.$$

Zwischen dem streifenden Ein- und Austritt hat die Bildneigung (mindestens) ein Minimum. Für senkrechte Objektstellung ist der Einfallswinkel für minimale Bildneigung kleiner als der dem Minimum der Strahlablenkung entsprechende.

Für die Sagittalbüschel gilt: Bei streifendem Eintritt hat $\operatorname{tg}\mu_2'$ einen positiven endlichen von $\operatorname{tg}\mu_2$ unabhängigen Wert.

Im Minimum der Ablenkung ist

$$\operatorname{tg}\mu_2' - \operatorname{tg}\mu_2 = 2\frac{n^2-1}{n^2}\operatorname{tg} i.$$

[1] R. STRAUBEL, DRUDES Ann. 8. 63. 1902.

Bei streifendem Austritt ist die Bildneigung

$$\operatorname{tg} \mu_2' = + \text{ oder } - \infty \quad .$$

Ob die Bildneigung, wenn man vom streifenden Eintritt zum streifenden Austritt übergeht, beständig wächst oder abnimmt, oder ob Grenzwerte (Minima oder Maxima) auftreten, hängt von der Objektneigung μ_2 ab. Grenzwerte sind dann möglich, wenn μ_2 zwischen einem bestimmten (von n und α abhängigen) positiven und einem negativen Werte liegt.

STRAUBEL diskutiert auch den Fall, daß die homozentrische Bildebene senkrecht zu der Büschelrichtung liegt ($\operatorname{tg} \mu_1' = \operatorname{tg} \mu_2' = 0$, $\operatorname{tg} \mu_1 = \operatorname{tg} \mu_2$), d. h. der Aufrichtung eines Objekts oder des zur optischen Achse schiefen Bildes eines optischen Apparates durch ein Prisma bei telezentrischem Strahlengange.

III. Die von Prismensystemen entworfenen Spektra.

Die Ausdehnung des Spektrums.

Wenn von einem leuchtenden Punkte oder Spalte Licht verschiedener Wellenlänge ausgeht, so wird das Bild desselben der Verschiedenheit des Brechungsexponenten entsprechend auch verschieden stark abgelenkt, ja sogar — gemäß den Gleichungen (14), (15) und (17) — in verschiedener Entfernung und verschiedener Breite erscheinen. Sehen wir von diesen letzteren Veränderungen zunächst ab, so ist die Variation der Ablenkung bestimmt durch ein System von Gleichungen, die ebenso wie (5) aus (2) abgeleitet werden, indem außer Einfalls- und Brechungswinkeln auch die Brechungsindizes, und zwar mit λ, als variabel angenommen werden. Also:

$$(19) \qquad \left| \begin{array}{ll} n_{k+1} \cos i_k' \, di_k' + \sin i_k' \, dn_{k+1} = n_k \cos i_k \, di_k + \sin i_k \, dn_k & k=p \\ \text{wo} \qquad di_{k+1} = di_k' & k=1 \end{array} \right.$$

Hieraus ergibt sich für di_p', wenn wieder $n_1 = n_p' = 1$ und $dn_1 = dn_p' = 0$ angenommen wird und der Kürze wegen die Produkte der Kosinus der Einfalls- bezw. Brechungswinkel einfach mit Π bezw. Π' bezeichnet werden:

$$(19\,\text{a}) \qquad di_p' = di_1 \frac{\Pi_1^p}{\Pi'^p_1} - \sum_{k=2}^{k=p} \frac{\Pi_{k+1}^p}{\Pi'^p_{k-1}} dn_k \sin \alpha_{k-1}$$

oder

$$(19\,\text{b}) \qquad di_p' \, \Pi'^p_1 = di_1 \, \Pi_1^p - \sum_{k=2}^{k=p} dn_k \sin \alpha_{k-1} \, \Pi_{k+1}^p \, \Pi'^{k-2}_1 \quad .$$

Man kann das System (19) auch in die Form bringen:

$$(20) \qquad \left| \begin{array}{ll} n_{k+1} \cos i_k' \, di_k' = n_k \cos i_k \, di_k - n_k \sin i_k \left(\dfrac{dn_{k+1}}{n_{k+1}} - \dfrac{dn_k}{n_k} \right) & k=p \\ di_{k+1} = di_k' & k=1 \end{array} \right.$$

und hieraus, indem man der Kürze wegen

$$n_k \sin i_k \left(\frac{dn_{k+1}}{n_{k+1}} - \frac{dn_k}{n_k} \right) = M_k$$

setzt, ableiten

$$(20\,\text{a}) \qquad di_p' \, \Pi'^p_1 = di_1 \, \Pi_1^p - \sum_{k=1}^{k=p} M_k \, \Pi_{k+1}^p \, \Pi'^{k-1}_1 \quad .$$

In diesen Gleichungen ist stets $\Pi_m^p = 1$, wenn $m > p$ und $\Pi'^l_1 = 1$, wenn $l < 1$ [1].

Für das Minimum der Ablenkung ist nach Gleichung (7 a) $\Pi_1^p = \Pi'^p_1$, also die Zunahme der Dispersion durch das Prismensystem $di_p' - di_1 = di' - di$ gegeben durch

$$(19^*) \qquad di' - di = - \sum_{k=2}^{k=p} dn_k \sin \alpha_{k-1}\, \Pi_{k+1}^p \, \Pi'^p_{k-2}$$

oder

$$(20^*) \qquad di' - di = - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{M_k\, \Pi'^{k-1}_1}{\Pi_1^k} = - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{M_k\, \Pi_{k+1}^p}{\Pi'^p_k} \quad .$$

Das Minimum der Ablenkung findet u. a. statt, wenn die Ablenkung gleich Null, d. h. das Prismensystem ein sogen. geradsichtiges (euthyoptrisches, *P. à vision directe*) ist. Auf ein solches haben also (19*) und (20*) jedenfalls Bezug.

Nur bei dieser Stellung des Prismensystems ist die Zunahme der Dispersion $(di' - di)$ unabhängig von der beim Eintritt der Büschel in das System bereits vorhandenen (di).

Die Bedingung der Achromasie. Das Prismensystem verursacht keine Zunahme der Dispersion, es ist „achromatisch", wenn

$$(20^{**}) \qquad di(\Pi'^p_1 - \Pi_1^p) - \sum_{k=1}^{k=p} M_k\, \Pi_{k+1}^p\, \Pi'^{k-1}_1 = 0$$

ist; also, falls beim Eintritt in das Prismensystem keine Dispersion vorhanden war, $di = 0$ ist, für

$$\sum_{k=1}^{k=p} M_k\, \Pi_{k+1}^p\, \Pi'^{k-1}_1 = 0 \quad ,$$

d. h.

$$(21) \qquad \sum n_k \sin i_k \left(\frac{dn_{k+1}}{n_{k+1}} - \frac{dn_k}{n_k} \right) \Pi (\cos i_k)_{k+1}^p \, \Pi (\cos i_k')_1^{k-1} = 0 \quad .$$

In letzterem Falle bewirkt das Prismensystem nur eine Ablenkung der Hauptstrahlen, die für alle Wellenlängen die gleiche und durch Gleichung (3) bestimmt ist.

Jeder der beiden zuletzt erwähnten Effekte: Dispersion ohne Ablenkung des Strahles mittlerer Wellenlänge und Ablenkung ohne Dispersion läßt sich bereits mit einem aus zwei Einzelprismen zusammengesetzten System erreichen; diese Prismen können sogar aus der gleichen Substanz bestehen, wenn man keine anderen einschränkenden Bedingungen stellt. Stellt man als solche aber die, daß die einander zugewandten Prismenflächen einander parallel seien (damit man die Prismen durch einen Kitt fest mit einander verbinden könne, wodurch zugleich die Lichtverluste an diesen Flächen erheblich gemindert werden), so müssen die Substanzen der Prismen verschiedenes Zerstreuungsvermögen haben, damit der eine oder andere Effekt erreichbar sei. Nur in dem, den tatsächlich vorliegenden Verhältnissen meist sehr fernliegenden Grenzfällen unendlich kleiner Prismen- und Einfallswinkel lassen sich die in Betracht zu ziehenden Verhältnisse bequem übersehen. In den praktisch vorkommenden Fällen muß man daher gewöhnlich die weniger übersichtlichen Gleichungen (3) und (20**) oder (21) anwenden.

---

[1] Ähnliche Entwickelungen s. bei E. Block, Beiträge zur Theorie der Lichtbrechung in Prismensystemen. Diss. Dorpat 1873.

Für **kleine Prismen und Brechungswinkel** hatten wir die Ablenkung für m Prismen in Luft mit den Indizes $n_1 \ldots n_m$ und den Winkeln $\alpha_1 \ldots \alpha_m$

$$\varepsilon^{(m)} = \sum_{k=1}^{k=m} (n_k - 1)\alpha_k \tag{9 a}$$

gefunden, also bei einem aus zwei Prismen zusammengesetzten System

$$\varepsilon = (n_1 - 1)\alpha_1 + (n_2 - 1)\alpha_2 \quad .$$

Die Dispersion, welche ein solches System hervorruft, kann daher direkt durch die Änderung der Ablenkung, die es hervorbringt, ausgedrückt werden:

$$d\varepsilon = d n_1 \alpha_1 + d n_2 \alpha_2 \quad .$$

Wie man sieht, sind dies Gleichungen von ganz derselben Form, wie sie für eine Achromasie von sehr dünnen Linsensystemen (p. 168) in Betracht kamen. In der Tat war historisch (KLINGENSTIERNA, DOLLOND, CLAIRAUT, BOSCOVICH u. s. w.) die Möglichkeit und die Art und Weise der Achromatisierung von Prismensystemen maßgebend für die von Linsenkombinationen. Man hat also für ein achromatisches Prismenpaar ($d\varepsilon = 0$) die Winkel α_1 **und** α_2 **so zu wählen, daß**

$$\alpha_2 : \alpha_1 = - d n_1 : d n_2$$

und wenn dabei eine bestimmte Ablenkung ε hervorgebracht werden soll, so bestimmen sich α_1 und α_2 — wie früher bei einem Linsensystem von der Stärke $\varphi = 1/f$ die Größen k_1 und k_2 — zu

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon}{d n_1 (\nu_1 - \nu_2)} \quad , \qquad \alpha_2 = - \frac{\varepsilon}{d n_2 (\nu_1 - \nu_2)} \quad . \tag{22}$$

Soll umgekehrt die Dispersion $d\varepsilon$ ohne Ablenkung erzielt werden, so muß sein

$$\alpha_1 = - \frac{d\varepsilon}{d n_1} \frac{\nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \quad , \qquad \alpha_2 = + \frac{d\varepsilon}{d n_2} \frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2} \quad , \tag{23}$$

wo wie früher

$$\nu = \frac{n-1}{d n}$$

gesetzt ist.

Das sekundäre Spektrum hat auf die durch solche dünne Prismen hervorgerufene Dispersion oder die mittels ihrer hergestellte Achromasie einen ganz analogen Einfluß wie bei Linsen; einer Brennpunktsdifferenz dort entspricht eine Winkelabweichung hier. Es braucht deshalb auf diese Verhältnisse hier nicht nochmals eingegangen zu werden.

Die bei dünnen Prismen von unendlich kleinen Winkeln stattfindenden Verhältnisse werden oft ohne weiteres auf Prismen von endlichen Winkeln übertragen. Dies ist aber, wie hier ausdrücklich bemerkt werden mag, ganz unzulässig. Insbesondere die Größe und der Gang der Dispersion hängen schon bei einer einzigen Brechung in erheblichem Grade von dem Einfallswinkel ab, und werden bei den weiteren Brechungen, wie wir oben gesehen haben, auch noch mit durch den vorher erhaltenen Betrag bedingt. Es sind daher, wie eine genauere Untersuchung zeigt, weder die von zwei Prismen gleicher Substanz aber verschiedenen endlichen Winkels — selbst in gleicher Stellung, z. B. der der Minimalablenkung — hervorgebrachten Spektra einander „proportional", noch haben solche von Prismen verschiedener Substanz immer verschiedenen Gang, wenn die wahren Dispersionen dieser Substanzen in den verschiedenen Teilen des Spektrums disproportional sind; sondern es hängen diese Verhältnisse eben sehr von dem Betrage und der Folge der Brechungen ab. Man kann daher, wie schon bemerkt, sehr wohl Prismenpaare aus optisch gleichen Substanzen herstellen, welche nur geradsichtig oder nur achromatisch sind, und im ersteren Falle eine endliche Dispersion, im letzteren Falle eine endliche Ablenkung haben (ersteres sogar, indem man einem solchen Prisma ein anderes genau gleiches mit umgekehrter Kante derart gegenüberstellt, daß der Strahl unter demselben Winkel in dieses einfällt, unter welchem er aus jenem austratt). Es folgt hieraus aber keineswegs, daß z. B. im letzteren Falle kein sekundäres Spektrum vorhanden sei[1]. Nur wenn zwei Prismen von gleicher Substanz und gleichem Winkel mit einander so zusammengestellt werden, daß die inneren und äußeren Flächen je einander parallel sind, so daß das Prismenpaar gewissermaßen eine planparallele Platte wird, verschwinden notwendig immer gleichzeitig Ablenkung, Dispersion und sekundäres Spektrum.

Bei einem Prisma von endlichem Winkel in Luft bestimmt sich die Dispersion aus (19) oder (20) zu

[1] Diese Verhältnisse hebt zum Teil schon BREWSTER hervor (Treatise on new philos. Instruments. Edinburgh 1813. p. 361 ff.), wie ich nachträglich gefunden habe.

$$di'' \frac{\cos r}{\cos r'} = di \frac{\cos i}{\cos i''} - \frac{dn \sin \alpha}{\cos i' \cos r'} \quad . \tag{24}$$

Im Minimum der Ablenkung, wo $i = - i'$, $r = - r'$, wird die Zunahme der Dispersion, unabhängig von der beim Eintritt vorhandenen

$$di' - di = - 2 \frac{dn}{n} \operatorname{tg} i = - d\varepsilon \quad . \tag{24*}$$

War beim Eintritt des Büschels in das Prisma keine Dispersion vorhanden, $di = 0$, so ist für jede beliebige Stellung des Prismas die Dispersion beim Austritt

$$di' = - \frac{dn \sin \alpha}{\cos i' \cos r} \quad ; \tag{24 a}$$

dieselbe wächst also von einem gewissen, zwischen streifendem Eintritt und Minimalablenkung liegenden Minimum stetig mit dem Austrittswinkel des mittleren Strahles bis zu dem, bei streifendem Austritt erreichten Werte ∞.[1]

Diese Ausbreitung in einen größeren Winkelraum ist aber keineswegs genügend, um eine entsprechende Leistungsfähigkeit des Prismas oder Prismensystems zu verbürgen. Als Maß dieser darf der kleinste Unterschied der Wellenlänge gelten, den benachbarte Spektrallinien haben dürfen, damit sie durch das Prismensystem eben noch getrennt werden können. Hierzu ist erstens vom geometrisch optischen Standpunkt eine gewisse

Reinheit des Spektrums erforderlich. Durch das Prismensystem werden von dem lichtgebenden Spalte so viele Bilder entworfen, als in seinem Lichte Wellenlängen vorhanden sind. Wenn die Breite der Spaltbilder $\delta i'$ größer ist als die Dispersion di' für einen bestimmten Unterschied $d\lambda$ der Wellenlängen, so decken sich die Spaltbilder der Wellenlängen λ bis $\lambda + d\lambda$ zum Teil, und das Spektrum erscheint entsprechend unrein. Als Maß der Reinheit R des von einem gegebenen Prismensystem gelieferten Spektrums können wir also nach HELMHOLTZ[2] das Verhältnis

$$R = \frac{di'}{d\lambda} : \frac{\delta i'}{\delta i} \tag{25}$$

annehmen. Wir haben hierfür nach (17) und (19a) — $di_1 = 0$ vorausgesetzt —

$$R^{(p)} = - \sum_{k=2}^{k=p} dn_k \sin \alpha_{k-1} \frac{\Pi'^{k-2}_1}{\Pi^k_1} \tag{25 a}$$

oder nach (17) und (20a)

$$R^{(p)} = - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{M_k \Pi'^{k-1}_1}{\Pi^k_1} \quad . \tag{25 b}$$

Bei einem einzelnen Prisma in Luft ist hiernach

$$R = - \frac{dn \cdot \sin \alpha}{\cos i \cdot \cos r'} \quad . \tag{25*}$$

Der Vergleich dieses letzteren Ausdrucks mit dem für die Dispersion (24a) eines einfachen Prismas lehrt, daß die Reinheit des von einem solchen gelieferten Spektrums von einem zwischen streifendem Austritt und Minimalablenkung

---

[1] Vgl. MOUSSON, POGG. Ann. **112.** 428. 1861. THOLLON, C. R. **89.** 93. 1879. —
[2] H. v. HELMHOLTZ, Physiol. Optik, 1. Aufl., p. 259; Wissensch. Abh. p. 178. HELMHOLTZ nimmt als Maß für die Reinheit des Spektrums die Größe $R^* = (di\, d\lambda) : \delta i'$, so daß sein R^* gleich unserem $(R\, \delta i)$. Uns liegt jedoch näher, in R eine nicht sowohl für das Spektrum, als für das es erzeugende Prismensystem charakteristische Größe zu definieren.

gelegenen Minimum an nach beiden Seiten stetig zunimmt und bei streifendem Einfall (von der dicken Seite des Prismas her) sich dem Werthe ∞ nähert.

Das Trennungs- (Auflösungs-)Vermögen eines Prismensystems hängt jedoch, nach den Grundsätzen der Undulationstheorie betrachtet, nicht allein von der Winkeldifferenz ab, welche durch die Dispersion den verschiedenfarbigen Bildern des Spaltes erteilt wird, sondern wesentlich mit von der Breite der Büschel, welche die Abbildung des Spaltes vermitteln. Ohne hier auf diesen Gegenstand näher einzugehen, mag nur soviel bemerkt werden, daß das Bild einer selbstleuchtenden Linie, vermittelt durch Büschel, deren Breite, senkrecht zur Richtung der Linie $= q$, und deren Wellenlänge $= \lambda$ ist, — durch welche optische Mittel auch immer es erzeugt sein mag — niemals wieder eine Linie, sondern immer ein Streifen ist, dessen Helligkeit nach den Rändern allmählich abfällt. Zurückbezogen auf das Objekt — wie wir dies früher bei der Berechnung der Aberration getan haben — ist die Länge des Bildes (Höhe des Streifens) nahezu gleich der der ursprünglichen Linie, die Ausbreitung des Lichtes senkrecht dazu, also die Breite des Bildes nur eine Funktion von q und λ und zwar *caet. par.* mit wachsendem q abnehmend, mit wachsendem λ wachsend. Von zwei benachbarten Lichtlinien — seien dieselben reell als Objekte vorhanden oder virtuell, z. B. durch Dispersion, aus einer einzigen entstanden — entwirft das optische System als Bilder zwei solche Streifen, welche sich bei ungenügender Größe von q oder unzureichender Kleinheit von λ zum Teil decken. Die Intensität des Bildes in diesen sich deckenden Teilen ist gleich der Summe der Intensitäten der Einzelbilder an den betreffenden Stellen.

Eine genauere Betrachtung des Verlaufs der Intensität in den Einzelbildern nach den Grundsätzen der Diffraktionstheorie zeigt nun, daß bei solcher Superposition zweier — und zwar einander gleich vorausgesetzter — Spaltbilder eine merkliche Intensitätsverminderung zwischen den beiden den Bildmitten entsprechenden Intensitätsmaximis (nämlich auf etwa 0,8 dieser) erst dann vorhanden ist, wenn der Winkel di', unter welchem die beiden Bilder (Spektrallinien) von der die Büschel begrenzenden rechteckigen Öffnung aus erscheinen, größer ist als derjenige, unter welchem die Wellenlänge λ des wirksamen Lichtes aus einer dem Querdurchmesser der Öffnung q' gleichen Entfernung gesehen erscheint, also wenn

$$di' > \frac{\lambda}{q'} \qquad (26)$$ [1].

Mit der Brechung eines parallelstrahligen Büschels durch ein Prismensystem ist nun im allgemeinen auch eine Veränderung seines Querschnitts im Hauptschnitt verbunden, welche nach obigem neben der Breite der in das System eintretenden Büschel hier mit in Anschlag zu bringen ist.

Durch jede Brechung an einer Ebene wird nämlich, wie leicht ersichtlich, der Querschnitt q des Büschels in dem Verhältnis der Kosinus der Brechungswinkel geändert, also

$$\frac{q_k'}{q_k} = \frac{\cos i_k'}{\cos i_k} \quad .$$

Da für ein Prismensystem $q_{k+1} = q_k'$, so haben wir für die Veränderung der Breite eines Büschels durch die Brechung in einem solchen System

---

[1] Lord RAYLEIGH, Phil. Mag. (5) **9.** 266. 1879; vgl. auch Encyclop. Brit. Art. Wave theory. Neuere Untersuchungen (die u. a. auch die Breite des Spaltes und die Ausdehnung [Inhomogenität] einer Spektral-„Linie" berucksichtigen) ruhren von A. A. MICHELSON (Phil. Mag. (5) **30.** 1. 1890) und F. S. O. WADSWORTH her (WIED. Ann. **61.** 610. 1897; Phil. Mag. (5) **43.** 317. 1897; Astrophys. Journ. **1.** 52. 1895; **2.** 264. 1895; **3.** 320. 1896).

$$(27) \qquad \frac{q_p'}{q_0} = \frac{q'}{q} = \frac{\Pi(\cos i')_1^p}{\Pi(\cos i)_1^p} = \frac{\Pi'^p_1}{\Pi^p_1} = \frac{\delta i'}{\delta i} ,$$

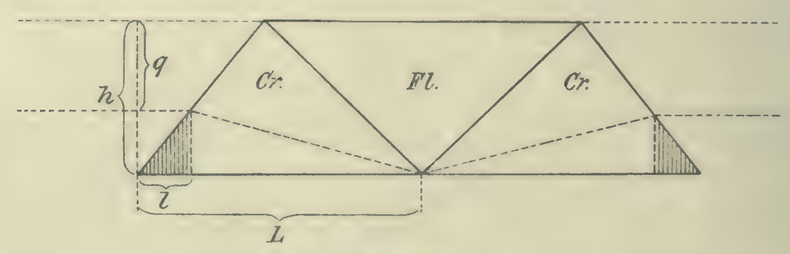
wie übrigens auch aus dem LAGRANGE-HELMHOLTZschen Satze unmittelbar gefolgert werden könnte.

Damit das durch die Dispersion auf die Winkeldifferenz $d i'$ gebrachte Linienpaar getrennt erscheinen könne, muß also die Breite des abbildenden — aus dem Prismensystem austretenden — Büschels, q' der Bedingung (26) entsprechen.

Diese geht demnach, unter Berücksichtigung von (25) und (27) in die bemerkenswerte Beziehung über

$$(27a) \qquad q > \frac{\lambda}{R\, d\lambda} \quad \text{oder auch} \quad R > \frac{\lambda}{q\, d\lambda} .$$

Für q darf nicht der Querschnitt des in das Prismensystem überhaupt eingetretenen Büschels, also die Größe $b_1 \cdot \cos i_1$ gesetzt werden (wo b_1 die von dem Büschel getroffene Länge der ersten Prismenfläche ist), sondern nur derjenige Teil desselben, welcher nicht durch die Begrenzung einer der folgenden Flächen nachträglich eine Abblendung erfährt — was wohl zu beachten ist.



Figur 53.

Ein dreiteiliger, symmetrischer geradsichtiger Prismensatz. Nur ein Teil (q) des gewöhnlich vorhandenen Querschnitts (h) ist nutzbar.

Bei einem dreiteiligen symmetrischen Prismensatz *à vision directe*, wie solche häufig angewandt werden, ist z. B. das Verhältnis dieses nutzbaren Querschnitts q zu dem tatsächlichen, d. h. zu der Höhe der Prismen h, in dem Verhältnis (s. Figur 53)

$$\frac{q}{h} = \frac{\cos i_1 \cos i_2}{\cos i_1 \cos i_2 + \sin \alpha_1 \cdot \sin \varepsilon_1}$$

oder der unbenützbare Teil der Höhe, $h - q$, zum benutzbaren in dem Verhältnis

$$\frac{h-q}{q} = \frac{\sin \alpha_1 \sin \varepsilon_1}{\cos i_1 \cdot \cos i_2} .$$

Man kann daher die Prismen durch einen zur Einfallsrichtung des Büschels senkrechten Schnitt um den unbenützten Teil verkürzen. Es kann auf diese Weise der Prismensatz an seiner breiteren Basis beiderseits um Stücke l verkürzt werden, die zur unverkürzten Länge dieser Basis L in dem Verhältnis stehen

$$\frac{l}{L} = n \cdot \operatorname{tg} i_1' \cdot \sin \varepsilon_1 .$$

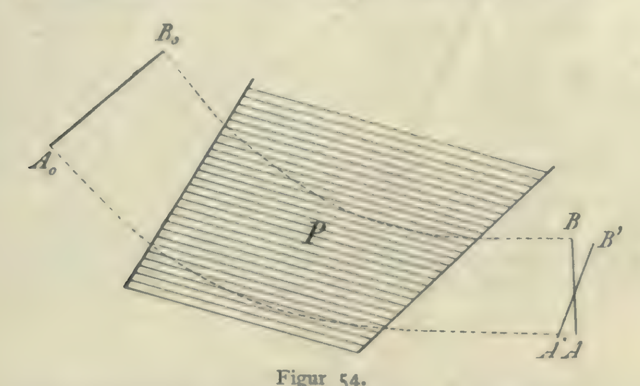
Der kombinierte Einfluß von Dispersion und Büschelquerschnitt auf das Auflösungsvermögen eines Prismensystems läßt sich nach RAYLEIGH[1] unmittelbar aus den Prinzipien der Undulationstheorie berechnen und in ganz allgemeiner Form darstellen. Wird durch die Brechung in dem System P die ebene Wellenfläche $A_0 B_0$ des einfallenden Lichtes in die Lage $A B$ gebracht, so ist sowohl

[1] l. c. p. 271.

der Lichtweg von A_0 bis A, als auch derjenige von B_0 bis B ein Minimum, und beide sind einander gleich, also

$$\int_{A_0}^{A} n\,dl = \int_{B_0}^{B} n\,dl \quad .$$

Eine Welle von anderer Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ wird in der gleichen Zeit in eine andere Lage $A'B'$ übergeführt (Figur 54). Die Wege, die die Strahlen derselben hierbei beschreiben, sind nun allerdings verschieden von den der Wellenlänge λ entsprechenden. Die Wegunterschiede sind aber vermöge der



Figur 54.
Zur Ableitung der Dispersion aus den optischen Weglängen.

Minimumeigenschaft der Wege $A_0 \ldots A$ und $B_0 \ldots B$ bis auf Größen höherer Ordnung verschwindend gegen die Wege selbst. Die optischen Längen von A_0 bis A' und B_0 bis B' können daher für die Wellenlänge $\lambda + d\lambda$ entlang denselben geometrischen Wegen berechnet werden wie für λ.

Die Differenz der optischen Längen von A_0 und B_0 nach A und B ist daher für $\lambda + d\lambda$ gleich

$$\int_{B_0}^{B} dn\,dl - \int_{A_0}^{A} dn\,dl$$

und diese Größe dividiert durch den Querschnitt des austretenden Bündels, $AB = q'$ ist gleich dem Winkel, den die beiden den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ entsprechenden Wellenflächen mit einander einschließen, d. h. gleich der Dispersion di'.

Bei einem System von Prismen gleicher Substanz z. B. ist hiernach die Dispersion

$$(28) \qquad di' = dn\,\frac{e_2 - e_1}{q'} \quad ,$$

wo e_2 und e_1 die von den äußersten Randstrahlen des Büschels in Glas zurückgelegten Strecken sind. Geht der eine dieser Randstrahlen durch lauter Prismenkanten, so ist $e_1 = 0$, daher

$$(28a) \qquad di' = dn\,\frac{e}{q'} \quad .$$

Stehen die Prismen alle im Minimum der Ablenkung, so bedeutet e die Summe der Prismendicken an der Basis. Die Dispersion ist also hier unabhängig von der Zahl und den brechenden Winkeln der einzelnen Prismen ausgedrückt.

Damit ein solcher Prismensatz eine Doppellinie im Spektrum auflösen könne, deren angularer Abstand $d\,i' = \vartheta$ ist, muß nach dem oben ausgeführten

$$q' > \frac{\lambda}{\vartheta} \quad ,$$

daher

$$e > \frac{\lambda}{d\,n} \quad , \tag{29}$$

wo $d\,n$ die den beiden Linien entsprechende Differenz der Indizes ist. Es ist z. B. die zur Auflösung der Hauptdoppellinie des Natriumlichtes notwendige Basisdicke eines Prismas aus Flintglas, für das $n_D = 1{\cdot}650$, $n_D - n_C = 0{\cdot}0055$ ist, in der Stellung der Minimalablenkung fast genau gleich 1 cm.

Die **Helligkeit des Spektrums** an irgend einer Stelle desselben hängt davon ab, von wie viel Wellenlängen Licht an diese Stelle gelangt. Bei irgend einer Breite des Spaltes $\delta\,i$ kommt nun an eine Stelle seines Bildes $\delta\,i'$ Licht von denjenigen Wellenlängen λ bis $\lambda + d\lambda$, deren Dispersion $d\,i'$ gleich der Breite jenes Spaltbildes $\delta\,i'$ ist. Die Helligkeit h' des Spaltbildes für irgend eine homogene Farbe ist nun, da seine Höhe bei der Brechung in dem Prismensystem unverändert bleibt, umgekehrt proportional der Breitenänderung des Spaltes durch die Brechung, also, wenn h die ursprüngliche Helligkeit des Spaltes selbst ist,

$$h' : h = \delta\,i : \delta\,i' \quad .$$

Die Helligkeit des Spektrums für die Wellenlänge λ ist daher, wenn wir annehmen, daß die Intensität in ihm von λ bis $\lambda + d\,\lambda$ konstant sei

$$H = h' \cdot d\,\lambda = h \frac{\delta\,i}{\delta\,i'}\, d\,\lambda \quad ,$$

worin $d\,\lambda$ durch die Bedingung bestimmt ist, daß das ihm entsprechende $d\,i' = \delta\,i'$ sei. Daraus folgt unter Benutzung des Ausdrucks (25) für die Reinheit des Spektrums, daß das betreffende

$$d\,\lambda = \frac{\delta\,i}{R}$$

ist, und

$$H = \frac{\delta\,i}{\delta\,i'} \frac{h \cdot \delta\,i}{R} = \frac{h\,\delta\,i}{d\,i'/d\,\lambda} \quad . \tag{30}$$

Im Minimum der Ablenkung ist $\delta\,i = \delta\,i'$ also

$$H = \frac{h\,\delta\,i}{R} \quad , \tag{30*}$$

d. h. die Helligkeit des Spektrums — abgesehen von den durch Reflexion und Absorption des Lichtes beim Durchgang durch das Prismensystem erlittenen Verlusten — ist dann direkt proportional der Helligkeit des in den Spalt eindringenden Lichtes und umgekehrt proportional der Reinheit des Spektrums[1].

Durch die Anwendung eines Fernrohres zur Beobachtung der Spektra werden die meisten der oben bewiesenen Relationen, namentlich die über Reinheit, Helligkeit und Auflösungsvermögen von Prismensystemen nicht wesentlich berührt. Voraussetzung hierbei ist natürlich, daß die Apertur des Fernrohrs die des Prismensystems übersteigt, anderenfalls wäre für die Bestimmung der Helligkeit und des Trennungsvermögens die erstere statt der letzteren maßgebend. Im

[1] Diese Sätze wurden für ein einzelnes Prisma zuerst von HELMHOLTZ bewiesen, Physiol. Optik, 1. Aufl., p. 260.

übrigen erscheint das durch ein Fernrohr gesehene Spektrum nur ebenso verändert wie jedes andere Objekt, wovon an anderer Stelle näher die Rede sein wird[1]. Man kann die von Prismen erzeugten Spektren aber auch in anderer Weise beobachten, wenn die wirksamen Büschel nicht telezentrische sind, durch eine Lupe oder dergl. Aus den oben angeführten Gründen verwendet man die Prismen alsdann im Minimum der Ablenkung.

Die Helligkeit des Spektrums wird, außer durch diese geometrischen Umstände, noch durch die mit jeder Reflexion und Brechung verbundenen, sowie die beim Durchgang durch die Prismen (durch Absorption) erfahrenen Lichtverluste verändert. Die durch teilweise Reflexion des Lichtes für das Spektralbild verloren gehenden Mengen lassen sich aus den Winkeln, unter denen, und den Brechungsexponenten der Medien, an denen jene Reflexionen stattfinden nach den sogen. FRESNELschen Intensitätsformeln berechnen. Die Größe des Lichtverlustes durch Absorption hängt von der Größe des in dem fraglichen Medium zurückgelegten Weges und von dessen Absorptionsvermögen ab. Hiernach lassen sich für einfachere Fälle allgemeine Regeln ableiten[2].

Eine ausführliche Darstellung der Theorie der Prismen und Prismensätze ist mit sehr vollständigen Angaben der älteren und neueren Literatur im I. Bd. Kap. 3 von H. KAYSERS Handbuch der Spektroskopie, Leipzig 1900, von H. KONEN geliefert worden.

IV. Die üblichsten[3] Konstruktionsformen von Dispersionsprismen.

1. Das einfache Prisma, dessen Eigenschaften wir wiederholt näher betrachtet haben. Seine Dispersion in der Stellung der Minimalablenkung wächst nach (24a), welche Gleichung auch die Form erhalten kann

$$d\varepsilon = -2\,dn\,\frac{\sin\alpha/2}{\sqrt{1-n^2\sin^2\alpha/2}}$$

mit dem brechenden Winkel des Prismas, α, ist daher nach dem p. 188 Ausgeführten auf einen mäßigen Spielraum beschränkt. Bei einem 60^0-Prisma von schwerem Flintglase beträgt dieselbe von C bis F ca. 2^0. Man verwendet deshalb zur Erziehung einer größeren Dispersion oft

2. Viele gleiche Prismen, die sich sämtlich in der Stellung der kleinsten Ablenkung befinden. Es ist dann natürlich auch die Ablenkung des ganzen Systems ein Minimum und sogar das kleinste mit demselben erreichbare. Um diese Minimalstellung während der Beobachtung für jede betrachtete Spektralregion automatisch herzustellen, sind seit O. LITTROW[4] mancherlei sinnreiche Mechanismen in Anwendung gebracht worden[5]. Die mechanisch vollkommene Lösung dieser Aufgabe gelang erst KRÜSS[6] durch eine dem Regenschirm ähnliche Einrichtung.

---

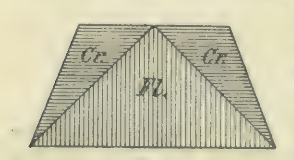
[1] Vgl. auch F. LIPPICH, Zentr.-Ztg. f. Opt. u. Mech. **2.** 49. 1881. — [2] S. PICKERING, Am. Journ. of Sci. **45.** 1868; Phil. Mag. (4) **36.** 39. 1868; s. auch F. LIPPICH, Zentr.-Ztg. f. Opt. u. Mech. **2.** 61. 1881; ROBINSON, Observatory 1882. p. 53; H. KRÜSS, Ztschr. f. Instrumentenk. **5.** 185. 1885. — [3] Eine vollständige Zusammenstellung ist ebenfalls in H. KAYSERS Handb. d. Spektroskopie, Leipzig 1900 gegeben worden, Bd. I, p. 373—394, 489—532. — [4] Ber. d. Wien. Akad. d. Wissensch. **47.** 26. 1862. Am. Journ. (2) **35.** 413. — [5] S. z. B. Browning Monthly Not. **30.** 198 u. 214. 1871. — [6] H. KRÜSS, Ztschr. f. Instrumentenk. **5.** 232. 1885; **8.** 388. 1888; **10.** 97. 1890; **21.** 161. 1901. An ersterer Stelle diskutiert KRÜSS des näheren die Vorteile und Bedingungen der Anwendung solcher Mechanismen. S. auch die Lehrbücher der Spektralanalyse von SCHELLEN. 2. Aufl., Braunschweig 1883. p. 223;

3. Von LITTROW rührt auch der Vorschlag her, dasselbe Prismensystem vom Licht mehrmals durchsetzen zu lassen. LITTROW ließ das Büschel in sich selbst reflektieren; später zog man nach dem Vorschlag von C. A. YOUNG und LOCKYER vor, die Prismen so viel mal höher zu machen als das Büschel sie durchsetzen soll und führte es durch je zwei Reflexionen senkrecht zum Hauptschnitt aus einer Etage in die andere über[1].

4. Wenn die Prismen durch Lufträume von einander getrennt sind, so ist der Lichtverlust durch partielle Reflexionen ein relativ großer. Außerdem müssen solche Prismen durch besondere mechanische Vorrichtungen in die gewünschte Stellung (z. B. der Minimalablenkung für irgend eine Wellenlänge) gebracht bezw. in derselben festgehalten werden, und endlich ist für manche Anwendung die hier mit der Dispersion Hand in Hand gehende Ablenkung unbequem. Allen drei Übelständen hilft die von AMICI (1860) erfundene Kombination von Prismen verschiedenen Brechungs- und Zerstreuungsvermögens mit verkitteten (parallelen) zugewandten Flächen ab, bei welchen die Ablenkung für irgend eine mittlere Wellenlänge aufgehoben ist, während ein gewisser Betrag von Dispersion bestehen bleibt. Wir haben die Theorie dieser geradsichtigen Prismen oder P. *„à vision directe“* oben näher betrachtet.

AMICI verwendete zuerst ein Flintglasprisma zwischen zwei mit ihrer Kante entgegengesetzten gleichen Prismen von Crownglas eingekittet (s. Figur 53 oben). Andere suchten die Dispersion zu steigern durch Anwendung zweier Flintglasprismen und dreier Crownglasprismen. Derartige Kombinationen sind oft beschrieben worden (s. die Werke von KAYSER und SCHEINER).

5. Wo auf die Geradsichtigkeit der Prismenkombination kein besonderer Wert gelegt wird, kann man die Dispersion erheblich steigern, indem man nach einer von RUTHERFORD[2] wieder aufgenommenen Idee BROWNINGS einem Prisma von hohem Zerstreuungsvermögen einen Winkel gibt, bei welchem (gemäß p. 188) aus Luft überhaupt kein Strahl mehr durchtreten könnte und an dieses beiderseits Prismen von möglichst niedrigem Zerstreuungsvermögen ansetzt (Figur 55), die gerade ausreichen, um den Durchtritt des Lichtes zu ermöglichen, die Dispersion aber nur wenig herabsetzen. Gegenüber einem einfachen Prisma bieten diese nach RUTHERFORD benannten — 3- oder 5-fachen — Prismensätze den Vorteil erheblich größerer Dispersion bei wenig vermehrtem Lichtverlust, da nur zwei Reflexionen an Luftgrenzen vorkommen. Außerdem verändern sich die stark zerstreuenden Flintgläser leicht an der Luft, wogegen sie hier durch die aufgekitteten Crownprismen geschützt sind, und endlich finden die Brechungen unter geringeren Winkeln statt, als bei einfachen Prismen von etwa 60°, wodurch die Ansprüche an die Ausführung der Flächen geringere werden.



Figur 55.
Das RUTHERFORDsche Dispersionsprisma.

Da die Größe der Dispersion wesentlich von der Differenz der Zerstreuungsvermögen der angewandten Substanz abhängt, manche Flüssigkeiten aber sich durch außerordentlich hohes Zerstreuungsvermögen auszeichnen, so wendet man mit Vorteil oft mit Flüssigkeiten gefüllte Hohlprismen an. Früher diente hierzu meist der Schwefelkohlenstoff, auf den BREWSTER die Aufmerksamkeit gelenkt hat. Von den vielen anderen Flüssigkeiten, die später vorgeschlagen worden sind,

---

H. KAYSER, Berlin 1883, p. 39; v. KONKOLY, Halle 1890, p. 175; SCHEINER, Leipzig 1890, p. 82 ff. und H. KAYSERS Handb. d. Spektroskopie, Leipzig 1900, p. 499—510 wegen der verschiedenen Arten von Adaptierung solcher und der im folgenden anzuführenden Apparate an die jeweilig in Frage stehende Beobachtungsmethode.

[1] S. die angeführten Lehrbücher der Spektralanalyse. — [2] RUTHERFORD, Am. Journ. of Sc. (3) 35. 71. 407. 1865.

sei nur der von WERNICKE[1] empfohlene Zimtsäureäthyläther genannt. Mit diesem ist ein RUTHERFURDsches Prismensystem konstruierbar, welches etwa dreimal so starke Dispersion besitzt, als ein einfaches Prisma aus schwerem Flint.

VII. Die Begrenzung der Strahlen und die von ihr abhängigen Eigenschaften der optischen Instrumente.

Der Raum, innerhalb dessen ein optisches Instrument von Strahlen durchsetzt werden kann, ist immer beschränkt. Schon die Öffnungen der Linsen und Spiegel sind selbstverständlich stets begrenzt, endlich, und bei den zu subjektivem Gebrauche bestimmten Instrumenten wird oft durch die Pupille des Beobachters eine weitere Begrenzung eingeführt. Außer diesen, sozusagen natürlichen Begrenzungen werden meistens noch andere eigens vorgesehen, um die Leistung des Instruments nach dieser oder jener Richtung zu beeinflussen. Wir wollen alle diese Begrenzungen (Blenden, Diaphragmen) als kreisförmig und konzentrisch zur Achse des Instruments annehmen und sie im folgenden gemeinsam behandeln.

Die Wirkung dieser Blenden ist zweifach:

1. Sie ermöglichen oder verbessern die Verwirklichung der optischen Abbildung mit den uns zu Gebote stehenden Linsen oder Spiegeln, indem sie einen Teil der Objektstrahlen aussondern und nur ihn an der Abbildung teilnehmen lassen. Unter optischer Abbildung sei hier wie früher die Vereinigung der von einem Objektpunkte ausgehenden Strahlen zu einem Bildpunkte verstanden. Bei einer Abbildung, wie der im zweiten Kapitel betrachteten — wo alle von je einem Punkte des Objekts ausgehenden Strahlen wieder in einem Punkte, dem Bildpunkte, vereinigt werden — wäre es völlig gleichgültig, welche von allen möglichen Strahlen tatsächlich die Abbildung bewirken. Wenigstens würden Lage, Größe und dioptrische Vollkommenheit des Bildes hierdurch gar nicht berührt. Die Betrachtungen der darauffolgenden Abschnitte jedoch haben gezeigt, daß es bei den uns vorzüglich zu Gebote stehenden Verwirklichungsweisen optischer Abbildung für den Gültigkeitsbereich einer Abbildung und für die Mittel zu seiner Erweiterung sehr wohl darauf ankommt, an welcher Stelle die spiegelnden und brechenden Flächen von den Strahlenbüscheln getroffen werden, sowie welche Neigungen zur optischen Achse und welche Öffnungen diese Büschel haben; und dies wird eben durch die Lage und Größe der Blenden festgelegt.

2. Sodann führen die Blenden aber auch eine von der bisher besprochenen verschiedene Art der Abbildung, nämlich die Darstellung eines dreidimensionalen Objekts auf einer Schirmebene (wie in der Lochkamera), herbei, die für den Zweck der meisten optischen Instrumente wesentlich ist.

Diese für die geometrische Optik wichtige Unterscheidung der eigentlichen optischen Abbildung von der der Lochkamera verliert ihre Schärfe, wenn man von den Betrachtungen der physikalischen Lichttheorie ausgeht (vgl. p. 16).

Wir betrachten zunächst die zuerst genannte Funktion der Blenden:

[1] WERNICKE, Ztschr. f. Instrumentenk. **1.** 353. 1881; s. auch ZENGER, ibid. p. 263. THOLLON, C. R. **86.** 329. 395. 1878; Journ. de Phys. **8.** 73. 1879.

VIIA. Die Blende als Mittel zur Auswahl der bei einer optischen Abbildung wirksamen Strahlen.

(Die Blendenwirkung bei der Abbildung je einer Ebene in eine andere.)

Bei einer geometrisch vollkommenen Abbildung wurde je eine Ebene in eine andere abgebildet. Wir werden im folgenden voraussetzen, daß die Abbildung wenigstens eine dioptrisch vollkommene sei; d. h. daß wenigstens ein ebenes Objekt ohne sphärische Aberrationen, Bildkrümmung und Verzeichnung abgebildet werde; d. h. nach den Erörterungen des vierten Kapitels, daß die dort angegebenen Bedingungen (bei weiten Büscheln die Sinusbedingung, bei engen die der astigmatischen Korrektion u. s. w.) mindestens für eine bestimmte Objektentfernung erfüllt seien. Wir nehmen daher ein ebenes Objekt, jedoch in einer mit Rücksicht auf manche Instrumente veränderlich zu denkenden Entfernung an.

Die nächste und unmittelbare Wirkung aller Blendungen ist es,
erstens die **Öffnungen der abbildenden Büschel**
und zweitens die **Ausdehnung des abgebildeten Objektteiles** einzuschränken. Die Art und das Maß dieser Beschränkungen hängen von der Anordnung und Größe der Blenden und von der Beschaffenheit des optischen Apparates ab.

Die Feststellung der wirksamen Blenden.

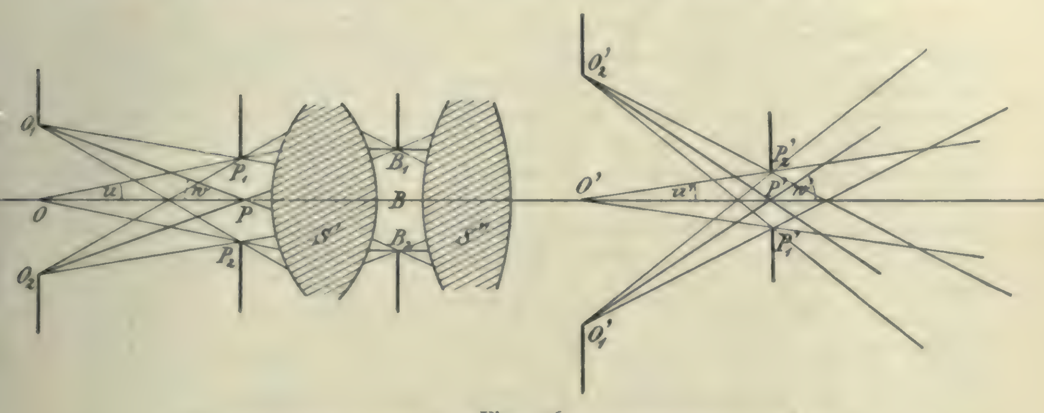
a) Die Begrenzung der Öffnung. Der Öffnungswinkel.

Sei ein Objekt $O_1 O O_2$ (Figur 56) in bestimmter Lage gegeben, so findet man zunächst diejenige von den vorhandenen Blenden, die die Öffnung der abbildenden Büschel am meisten einschränkt, folgendermaßen: Die Blenden B mögen irgendwo zwischen den Linsen des Systems S liegen, im speziellen Falle auch ganz vor oder ganz hinter dem System; der irgend einer von ihnen nach dem Objekte zu vorangehende Teil des Systems sei S', der ihr nach dem Bilde hin folgende S''. Ich denke mir nun jede vorhandene Blende durch das ihr zugehörige S' nach der Objektseite hin abgebildet — was sowohl theoretisch als experimentell ohne weiteres ausführbar ist — nach $P_1 P P_2$. Dann ist die für die Öffnung der abbildenden Büschel oder des Systems maßgebende Blende diejenige[1], deren Bild $P_1 P_2$ von O aus (nach vorwärts oder rückwärts) unter dem kleinsten Sehwinkel erscheint. Dieser Winkel selbst $= 2u$ heißt der Öffnungswinkel des Systems. (Wenn das Objekt im Unendlichen liegt, so tritt die lineare Öffnung des Systems an die Stelle der angularen). Denn bei der Bild-

[1] Da das vom Objektpunkt O ausgegangene Büschel in den Medien bis zum Bildraum im allgemeinen mit sphärischer Aberration behaftet ist, so kann auch der Fall eintreten, daß ein in einem solchen Medium gelegenes Diaphragma Strahlen von einer gewissen Konvergenz abblendet, ohne zugleich die stärker geneigten auszuschließen. Man betrachte daraufhin z. B. Figur 6, p. 21. Das Büschel wird durch ein solches Diaphragma gewissermaßen zerklüftet, indem dann eine oder mehrere Zonen in ihm fehlen. Die Öffnung des Büschels wollen wir jedoch auch in solchen Fällen bis zu derjenigen Zone rechnen, von welcher aus alle stärker geneigten abgeblendet sind und wollen das für sie maßgebende Diaphragma entsprechend bestimmen.

erzeugung durch Brechung oder Spiegelung wird niemals das Nebeneinander, die Reihenfolge der Strahlen eines Büschels geändert; also ist derjenige Strahl OP_1, der im Objektraum nach dem Rande des Bildes irgend einer Blende hinzielt, derselbe, der den Rand B_1 der Blende selbst passiert. Das Bild der nämlichen Blende B, durch den ihr nachfolgenden Teil S'' des Systems in den Bildraum projiziert, nach $P_1'P'P_2'$, erscheint dann aus demselben Grunde von dem zentralen Bildpunkte O' aus ebenfalls unter kleinerem Sehwinkel als jede andere.

Offenbar ist $P_1'P_2'$ nach Lage und Größe gleich dem Bilde, das das ganze System S von einem mit P_1P_2 identischen Objekt entwerfen würde. Wegen des eindeutigen Zusammenhanges zwischen den Punkten eines Objekts und seines Bildes muß jeder Strahl, der beim Austritt aus dem System durch ein Bild geht,



Figur 56.

Der Strahlenverlauf in einem (schematischen) optischen System (S' und S'').
O_1OO_2 das Objekt, $O_1'O'O_2'$ das Bild, B_1BB_2 die Aperturblende, P_1PP_2 die Eintrittspupille, $P_1'P'P_2'$ die Austrittspupille.

vor der Brechung durch die konjugierte Stelle von dessen Objekt gegangen sein und umgekehrt. Insoweit also in dem System S nur regelmäßige Brechungen und Spiegelungen in Frage stehen, leistet für die Begrenzung der nach dem Bilde zielenden Büschel eine Blende an der Stelle und von der Größe P_1P_2 genau dasselbe, wie eine solche von der Größe und an der Stelle von $P_1'P_2'$ und beide ebensoviel als die tatsächliche Blende B_1B_2[1].

Die Blende, welche für ein Objekt in einer Stellung auf der Achse wirksam ist, braucht es nicht zugleich für eine andere Lage desselben zu sein: wir denken uns daher stets die Lage des Objekts fixiert oder auf einen so kleinen Spielraum beschränkt, daß die Blenden ihre Funktionen behalten — wie es ja für die wichtigsten Instrumente (Mikroskop und Fernrohr) tatsächlich der Fall ist.

Abbe[2] hat die nach dem Objekt bezw. Bildraum projizierten Bilder der wirksamen Blende Öffnung und Öffnungsbild und später — nach Analogie der beim Auge geltenden Verhältnisse und Bezeichnungen — die Pupillen des Instruments genannt und zwar die erstere Eintritts-, die letztere Austrittspupille[3]. Die physische Blende B_1B_2 selbst bezeichnete er später oft als die Iris[4]; wir wollen die Bezeichnung Aperturblende gebrauchen.

---

[1] Wörtlich gilt dies natürlich nur, wenn P_1P_2 und $P_1'P_2'$ reelle Bilder der Blende B_1B_2 sind. — [2] E. Abbe, Beiträge zur Theorie des Mikroskops u. s. w. Max Schultzes Arch. f. mikr. Anat. 9. 419. 1873. — [3] Im folgenden meist durch E.-P. und A.-P. abgekürzt. — [4] Letztere Bezeichnung kann heute leicht zu Mißverständnissen Anlaß geben, da gegenwärtig in optischen Instrumenten vielfach Blenden von variabler Öffnung gebraucht und als „Irisblenden" bezeichnet werden.

Bei Objekten, welche nicht von selbst innerhalb des ganzen wie oben bestimmten Öffnungswinkels des Instruments Licht ausstrahlen, sondern von einer anderen begrenzten Lichtquelle beleuchtet werden, kann es vorkommen, daß statt der im Instrument vorhandenen Blenden die Lage und Größe jener Lichtquellen maßgebend wird für die Öffnung der abbildenden Strahlenbüschel. Es ist dies, wie aus dem oben Gesagten hervorgeht, immer dann der Fall, wenn die Lichtquelle oder ihr durch ein Beleuchtungssystem und das Objekt selbst modifiziertes Bild vom Objekt aus unter kleinerem Sehwinkel erscheint als die Eintrittspupille. Die Lichtquelle vikariiert dann ihrer Lage und Größe nach für die Eintrittspupille.

Die Hauptstrahlen. Der Strahlengang.

Die Strahlen, die von dem Objekte nach dem Mittelpunkte P der Pupille gehen — und deren konjugierte im Bild- und jedem Zwischenraume — sind bei der kreisförmig angenommenen Gestalt der Blenden, also der Büschelbasis, die Symmetriachsen der von den betreffenden Objektpunkten ausgehenden Büschel. Sie sind daher sozusagen auch die „optischen Schwerpunktslinien" dieser Büschel und in mehreren Beziehungen die Repräsentanten der Büschel als Ganzes, z. B. für deren Richtungen. Wir wollen sie, da sie nach der Definition von p. 11 die „Hauptstrahlen" der abbildenden Büschel sind, kurz als die Hauptstrahlen bezeichnen[1]. Bei genügend enger Blende kann man sie der Übersicht halber allein betrachten.

Insofern der Verlauf der Hauptstrahlen die Wirkungsweise des optischen Instruments kennzeichnet, wird er der Strahlengang des Instruments genannt.

b) Die Begrenzung des Objekts. Das Gesichtsfeld.

Die Ausdehnung des abgebildeten Teiles des Objekts ist im allgemeinen ebenfalls durch irgend welche Blenden begrenzt. Wenn man sich wie vorher alle vorhandenen Blenden nach dem Objektraum hin durch den ihnen voranstehenden Teil S' des Systems abgebildet denkt, so ist diejenige, deren so konstruiertes Bild von dem Mittelpunkt der Eintrittspupille, P, aus nach vorn oder hinten unter dem kleinsten Sehwinkel erscheint, die hierfür maßgebende. Dieser Sehwinkel selbst $= 2w$ heißt der Gesichtsfeldwinkel des Systems. Die Blende wird die Gesichtsfeldblende genannt und begrenzt die äußersten Hauptstrahlen; oder bestimmt die äußersten Objektpunkte, die durch Hauptstrahlen abgebildet werden — also bei genügend enger Eintrittspupille nach dem oben Gesagten: die äußersten Objektpunkte, die überhaupt abgebildet werden. Das Bild derselben Blende, durch den ihr nachfolgenden Teil des Systems nach dem Bildraum hin projiziert, erscheint dann von dem Mittelpunkt der Austrittspupille, P', aus ebenfalls unter kleinerem Sehwinkel, als alle anderen.

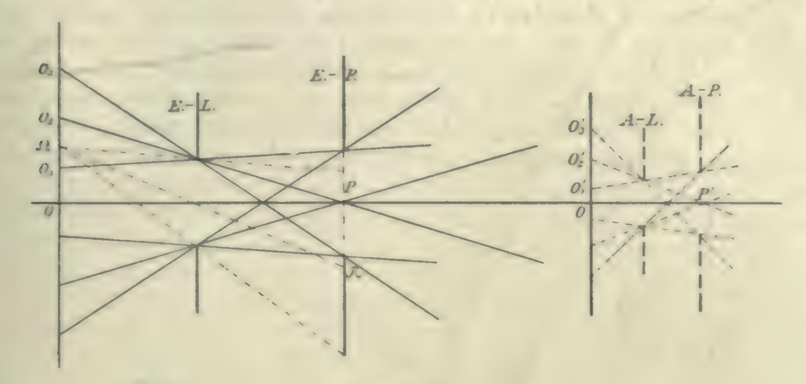
Das objektseitige Bild der Gesichtsfeldblende sei nach M. v. ROHR die Eintrittsluke (E.-L.) das bildseitige die Austrittsluke (A.-L.) genannt; denn sie spielen für das optische Instrument dieselbe Rolle wie Luken oder Fenster für ein aus dem Zimmer ins Freie blickendes Auge; nur daß die Luke nicht immer zwischen dem Objekt (oder Bild) und der Pupille gelegen zu sein braucht, sondern ihre die Abbildung beschränkende Wirkung auch behält, wenn die Strahlen sie erst bei gehöriger Verlängerung nach vorwärts oder rückwärts treffen.

Wenn die Größe der Pupillen nicht zu vernachlässigen ist, so wird das

[1] Als Hauptstrahlen werden manchmal auch solche Strahlen bezeichnet, die durch die Hauptpunkte gehen. Diese haben aber natürlich eine Bedeutung nur für graphisch-konstruktive Behandlung optischer Probleme — was angesichts häufiger Mißverständnisse dieses Sachverhalts hervorgehoben zu werden verdient (vgl. p. 48) und sind nur dann wirklich wichtig, wenn die Hauptpunkte mit den Pupillenmitten zusammenfallen. Das ist bei den weitverbreiteten symmetrischen Objektiven der Fall.

Objekt und das Bild nur dann scharf begrenzt sein, wenn die E.-L. in die Ebene des Objekts, die A.-L. in die Ebene des Bildes fällt.

Fällt aber die E.-L. nicht mit dem Objekt (die A.-L. nicht mit dem Bilde) zusammen, so wird für seitlich gelegene Objektpunkte die Gesichtsfeldblende aperturbeschränkend wirken; mit wachsender Entfernung eines Objektpunktes von der Achse wird von dem (*nach vorwärts oder rückwärts verlängerten*) Büschel,



Figur 57.
Die allmähliche Begrenzung eines Objekts O, das mit der E.-L. nicht zusammenfällt. Bis O_1 reicht der mit voller Öffnung leuchtende, bis O_2 der noch durch die Pupillenmitte leuchtende, bis O_3 der überhaupt noch leuchtende Teil der Objektebene.

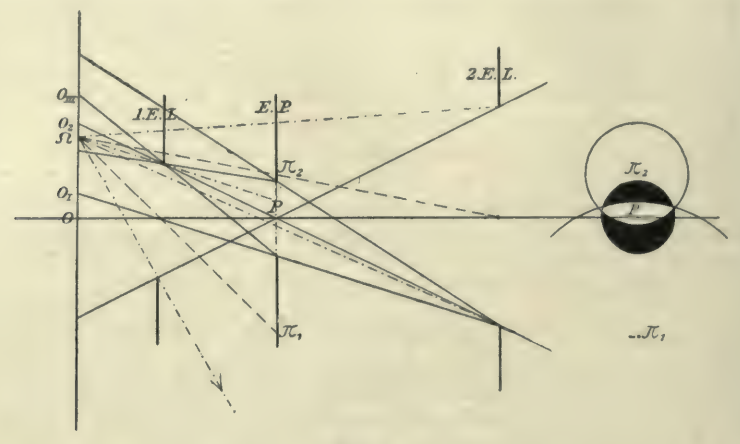
das von ihm ausgeht und das im allgemeinen durch die E.-P. begrenzt wird, ein immer größer werdender Teil durch die E.-L. abgefangen werden. Das Objekt wird allmählich abgeblendet (vignettiert werden. Man kann dann (Figur 57) einen die ganze Öffnung der E.-P. mit Strahlen treffenden Objektteil von dem Teile unterscheiden, für den die Fläche der E.-P. durch die E.-L. teilweise verdeckt wird, und von dem, der überhaupt nicht mehr an der Abbildung teilnehmen kann; und kann den zweiten von diesen Teilen in zwei Hälften zerlegen, von denen der eine die Mitte der E.-P. mit seinen Strahlen erreichen kann, der andere nicht. Die Fläche des Objekts, deren Strahlung die Mitte der E.-P. erreicht, erscheint von der E.-P. unter dem oben eingeführten Gesichtsfeldwinkel, die Winkel unter denen die anderen bezeichneten Teile erscheinen, werden weiter unten (bei der Betrachtung der Lupe) abgeleitet werden. Die Figur zeigt, daß der Teil des Objekts, in dem die allmähliche Abnahme der Büschelöffnung stattfindet, $O_1 O_3$, die Projektion der E.-P. durch den Rand der E.-L. ist und sich daher mit abnehmender E.-P. (in den Kreis O_2) zusammenzieht.

Figur 58.
Der Querschnitt eines Büschels in der Ebene der E.-P. von einem Punkte, dessen Strahlung durch eine Gesichtsfeldblende beschränkt wird.

Der in der Ebene der E.-P. gemessene Querschnitt eines Büschels, das von einem beliebigen Punkte Ω zwischen O_1 und O_3 ausgeht, ist für den Fall eines unendlich fernen Objekts von M. von Rohr[1] berechnet worden. Er ergibt sich durch die Projektion der E.-L. auf die Ebene der E.-P. von Ω aus. Diese ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt Π; und das gemeinsame Stück dieser Kreisfläche und der Pupillenöffnung ist der gesuchte Querschnitt (Figur 58).

[1] M. von Rohr, Ztschr. f. Instrumentenk. **18.** 198. 1898.

Zwei Gesichtsfeldblenden. Häufig tritt bei optischen Instrumenten der Fall ein, daß unsere Definition der Gesichtsfeldblende keine eindeutige Bestimmung ergibt, indem von P aus die Bilder mehrerer Blenden gleich groß erscheinen z. B. zweier Blenden bei Konstruktionen, die zu einer mittleren Aperturblende symmetrisch[1] sind (Figur 59). Die verschiedenen E.-L., die objektseitigen Bilder dieser Blenden, bestimmen dann natürlich dieselbe Grenze O_2 des noch durch die Pupillenmitte abgebildeten Objektteiles, aber die beiden anderen zu O_2 symmetrisch liegenden Grenzen (in der Figur 57 auf voriger Seite O_1 und O_3) oder der ringförmige Teil des Objekts, der durch Projektion der E.-P. von den Randpunkten der E.-L. entsteht, wird durch jede der verschiedenen Eintrittsluken anders bestimmt. Da bei deren gleichzeitiger Wirkung aber stets nur die stärkste Abblendung in Betracht kommt, so gelten von den durch die verschiedenen



Figur 59.
Die allmähliche Begrenzung eines Objekts durch zwei Gesichtsfeldblenden. Bis O_I reicht der mit voller Öffnung, bis O_2 der noch durch die Pupillenmitte, bis O_{III} der überhaupt noch abgebildete Teil. Ω ein Punkt zwischen O_I und O_{III}. Rechts der Querschnitt des von Ω ausgehenden Büschels in der Ebene der E.-P.

Blenden bestimmten Grenzen des ringförmigen Teiles die der Achse nächsten. Der durch einen Teil der E.-P. hindurchleuchtende ringförmige Objektteil (zwischen O_I und O_{III}) liegt jetzt nicht mehr symmetrisch zu dem Kreise durch O_2.

Betrachten wir jetzt einen beliebigen Punkt Ω zwischen O_I und O_{III}, so wird der in der Ebene der E.-P. gemessene Querschnitt des von ihm ausgehenden Büschels dasjenige Flächenstück sein, das der Kreisfläche der E.-P. und den Kreisflächen gemeinsam ist, die man durch Projektion aller E.-L. auf die Ebene der E.-P. von Ω aus erhält. Auf diese Art der Aperturbeschränkung seitlicher Büschel hat zuerst A. Miethe[2] hingewiesen; sie ist sodann von M. von Rohr[3] für den Spezialfall ausführlich behandelt worden, daß ein symmetrisches System ein Objekt in gleicher Größe abbildet.

Wirkung anderer Blenden. Man erkennt leicht aus der Figur, daß auch Blenden, die von P aus unter größerem Winkel als die Gesichtsfeldblende erscheinen, auf seitliche Punkte aperturbeschränkend wirken können. Die Er-

---

[1] oder auch nur hemisymmetrisch. Man versteht unter dieser Bezeichnung Systeme, deren beide durch die Aperturblende getrennte Teile zwar nicht zu dieser symmetrisch gleich (dann heißen die Systeme auch holosymmetrische) aber doch symmetrisch ähnlich sind, so daß durch die Vergrößerung aller Dimensionen eines der beiden Teile auf ein Vielfaches ihres Betrags ein symmetrisches System entsteht. — [2] A. Miethe, Phot. Mitteil. **25.** 11 und 22. 1888/89. — [3] M. v. Rohr, l. c. p. 200.

ledigung dieses Falles ist für die Praxis von geringer Wichtigkeit, sie würde sich indessen in einer dem vorhergehenden entsprechenden Weise durchführen lassen.

Die Umkehrbarkeit der Beziehung zwischen Pupillen und Bildern.

Wir wollen zunächst den einfachsten Fall betrachten, daß die Begrenzung des Bildes durch eine in ihm selbst oder in der Ebene eines ihm vorangehenden Zwischenbildes (also eventuell im Objekt selbst) liegende Blendung stattfinde; daß also z. B. in Figur 56, p. 213, $O_1 O_2$ und $O_1' O_2'$ Eintritts- und Austrittsluke sind. Hierher gehört der Fall, daß das ebene Objekt nur eine geringe Ausdehnung besitzt; dann ersetzt es die E.-L.

Dann kann man, wenn man einmal eine vollkommene Abbildung auch in den Pupillen voraussetzt, die Gesamtheit aller durch das System tretenden Strahlen in jedem Raume mit ganz gleichem Rechte auf zwei Arten in Büschel zusammenfassen (vgl. Figur 56): einmal als solche, welche ihre gemeinsame Basis in einer der Pupillen und ihre Spitzen in der Objekt- bezw. Bildebene haben, und das andere Mal als solche, welche umgekehrt ihre gemeinsame Basis im Objekt bezw. Bild (oder irgend einem Zwischenbild) und ihre Spitzen in der zugehörigen Pupille haben. Mit anderen Worten: Für ein nach Lage und Ausdehnung der Eintrittspupille $P_1 P_2$ gleiches Objekt ist — vermöge der im Systeme vorhandenen Blenden — das ursprüngliche Objekt $O_1 O_2$ als Eintrittspupille, dessen Bild $O_1' O_2'$ als Austrittspupille wirksam. Dieselbe Blende $B_1 B_2$, die in dem einen Falle die Öffnungen der wirksamen Büschel begrenzt, ist im anderen Falle für die Ausdehnung des zur Abbildung gelangenden Objekts maßgebend; Öffnungswinkel und Gesichtsfeldwinkel vertauschen also in den beiden Fällen ihre Funktionen.

Durch die gegenseitige Entfernung zweier Paare von konjugierten Ebenen und die Vergrößerung in ihnen ist eine Abbildung vollständig bestimmt. Wenn daher Ein- und Austrittspupille, sowie die Bilder der Gesichtsfeldblende im Objekt- und Bildraum gegeben sind, so kann durch Rechnung oder Konstruktion zu jedem Strahl der konjugierte gefunden werden, ohne daß man das System selbst weiter zu berücksichtigen hätte.

Bei der Betrachtung der Abbildungsfehler war stets eine gewisse Begrenzung, sowohl der Apertur, als des Gesichtsfeldes vorausgesetzt worden und von dem Maße dieser Begrenzung zeigten sich die **Bildfehler** abhängig. So die Aberrationen in der Achse von der Apertur (dem Öffnungswinkel) allein, die Aberrationen für seitliche Punkte — Astigmatismus, Koma, — sowie Distortion und Wölbung auch vom Gesichtsfeldwinkel und dem Orte der Pupillen.

Die von der Pupillenlage und dem Strahlengange abhängigen Eigenschaften der Instrumente.

1. Bei Instrumenten, welche zur subjektiven Beobachtung dienen, ist die Lage der Pupillen von Wichtigkeit für den

Umfang der Sichtbarkeit des Bildes.

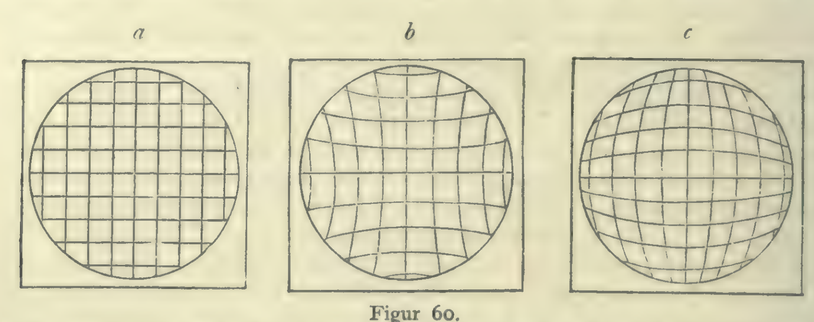
Die Pupille[1] des Auges[2] muß zusammenfallen mit der Austrittspupille des Instruments, damit das ganze von dem Instrumente entworfene Bild auf einmal übersehen werde, und sie muß jener an Größe mindestens gleich sein, damit alle von den Bildpunkten ausgehenden Strahlen ins Auge gelangen können. Nur

[1] D. h. die E.-P. des Auges. — [2] Für die folgenden Überlegungen ist **das Auge stets als ruhend** angenommen; vgl. auch das folgende Kapitel über das Auge.

wenn die Pupille des Auges sich an dieser Stelle befindet, wirkt dieselbe sicher nicht ihrerseits als Gesichtsfeldblende. Hingegen hängt es dann immer noch von ihrer Größe ab, ob sie nicht als Aperturblende wirksam wird. Da dies, wie wir noch sehen werden, niemals schadet, so bleibt allein das erstere Moment zu berücksichtigen. Die Austrittspupille wird daher auch oft als Augenkreis, ihr Mittelpunkt als Augenort bezeichnet. (Daneben sind noch die Benennungen RAMSDENscher und BIOTscher Kreis im Gebrauch.) Man sieht daher die A.-P. eines solchen Instruments, wenn man es mit der Objektseite vor eine genügend große helle Fläche bringt, als helles Scheibchen vor dem Okular schweben.

2. Die Verzeichnung.

Das Auftreten und die Größe dieses Bildfehlers ist ebenfalls vom Strahlengange abhängig. Wir sehen nämlich bei der Betrachtung der Verzeichnung von den übrigen Fehlern des Bildes ab. Fast in allen Fällen handelt es sich, wenn man Verzeichnungsfreiheit verlangt, um die Ähnlichkeit der Zeichnung, die von einem ebenen Objekt in einer Schirmebene erhalten wird, die man etwa in die



Figur 60.
Ein quadratisches Netz (*a*) und sein Bild bei kissenförmiger (*b*) und tonnenförmiger Verzeichnung (*c*).

Schnittpunkte der Parachsialstrahlen bringt[1]. Der Ort der wirklichen Bildpunkte und die etwaige Krümmung der Bildfläche ist also für diese Betrachtung gleichgültig, ebenso wie die Güte der Strahlenvereinigung in den Bildpunkten; es wird nur vorausgesetzt, daß Bilder der Objektpunkte an bestimmten Orten jener Schirmebene aufgefaßt werden.

Diese Orte sind aber nach dem oben Gesagten, im allgemeinen die Durchstoßungspunkte der Hauptstrahlen, als der Schwerlinien der abbildenden Büschel.

Verzeichnungsfreiheit bedeutet Konstanz der Vergrößerung für das ganze Objekt. Wenn die Vergrößerung eines Instruments im ganzen Sehfeld konstant ist, so erscheint ein quadratisches Netz wie Figur 60*a*. Wächst die Vergrößerung nach dem Rande des Sehfeldes, so wird das Aussehen des Bildes, das von Figur 60*b*, nimmt sie mit wachsendem Sehwinkel ab, so wird es das von Figur 60*c*.

Die Bedingungen für die Verzeichnungsfreiheit (Orthoskopie).

Befinde sich in O das achsensenkrechte ebene Objekt, sei O' der Schnittpunkt der Parachsialstrahlen von O. Die Abstände der Pupillen P und P' von Objekt und Bild heißen ξ und ξ' und werden zunächst aberrationsfrei vorausgesetzt.

[1] Diese vereinfachende Festsetzung beschränkt unsere Folgerungen kaum, denn meistens wird das Bild sphärisch korrigiert sein. Wenn die A.-P. aberrationsfrei ist, ist die Lage der Schirmebene für den Charakter der Verzeichnung überhaupt gleichgültig, aber auch sonst erst in zweiter Ordnung dafür bestimmend.

Sind dann $O_1 O_2$ zwei von der Achse verschieden weit entfernte Punkte des Objekts, $O_1' O_2'$ die entsprechenden Punkte des Bildes bezw. deren Zentralprojektionen von P' auf eine das Bild in O' berührende Ebene, dann ist

$$O O_1 = y_1 = \xi \operatorname{tg} w_1 \quad , \qquad O' O_1' = y_1' = \xi' \operatorname{tg} w_1' \quad ,$$
$$O O_2 = y_2 = \xi \operatorname{tg} w_2 \quad , \qquad O' O_2' = y_2' = \xi' \operatorname{tg} w_2' \quad .$$

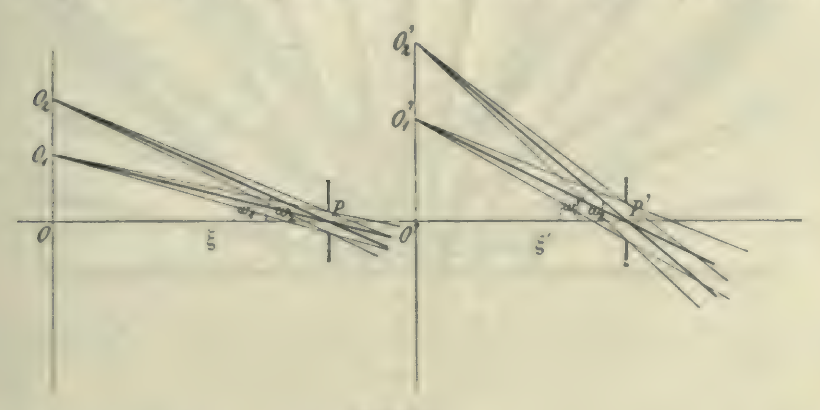
Damit nun die Vergrößerung in den beiden betrachteten Ebenen konstant, d. h. unabhängig von der Bild- und Objektgröße selbst seien, muß

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{y_2'}{y_2} = \text{u. s. w.}$$

sein; also

$$\frac{\operatorname{tg} w_1'}{\operatorname{tg} w_1} = \frac{\operatorname{tg} w_2'}{\operatorname{tg} w_2} = \text{u. s. w. } \ldots = \text{const.} \quad ,$$

d. h. das Verhältnis der trigonometrischen Tangenten der Winkel die entsprechende Hauptstrahlen im Bilde und Objekte mit der



Figur 61.
Die Verzeichnung, als bestimmt durch das Konvergenzverhältnis der Hauptstrahlen.

Achse des Systems einschließen, muß konstant sein. Ist dies der Fall, so heißen P und P', die Kreuzungspunkte der betreffenden Hauptstrahlen, die „orthoskopischen Punkte“ des Systems.

Da aber für sehr kleine Winkel w, für welche die Bedingungen kollinearer Abbildung erfüllt sind, notwendig

$$\frac{\operatorname{tg} w_0'}{\operatorname{tg} w_0} = \Gamma = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{B} \quad ,$$

wo Γ das in den Punkten P und P' bestehende Konvergenz, B das in ihnen bestehende lineare Vergrößerungsverhältnis bezeichnet, so ist auch allgemein in den Punkten P, P'

$$\text{(I)} \qquad \frac{\operatorname{tg} w_k'}{\operatorname{tg} w_k} = \frac{n}{n'} \, \frac{1}{B} \quad .$$

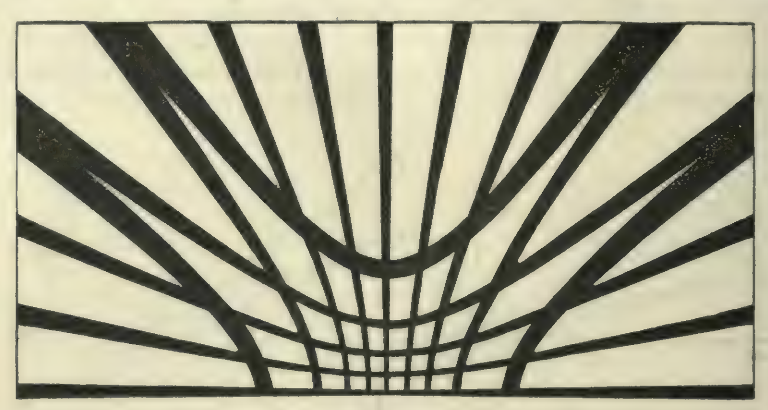
Dies ist die AIRYsche[1] sogenannte „Tangentenbedingung“.

Wie hieraus ersichtlich, können orthoskopische Punkte niemals zugleich „aplanatische“ in dem hier angewandten Sinne sein. Bei der vollkommen kollinearen Abbildung dagegen sind alle konjugierten Punktepaare der Achse orthoskopische und aplanatische zugleich.

[1] G. B. AIRY, (1827), Cambr. Phil. Trans. **3**. 1. 1830.

Der Gegensatz zwischen den orthoskopischen und den früher betrachteten aplanatischen Punkten eines Linsensystems, sowie die Bedeutung des Strahlenganges überhaupt, das Verhältnis der Pupillen zu dem Objekt und Bild, für welches sie wirksam sind und die oben ausgesprochene Reziprozität dieses Verhältnisses treten ganz besonders auffallend in Erscheinung bei dem früher (p. 132) erwähnten Experiment, mittels dessen Abbe[1] den charakteristischen Gang des Konvergenzverhältnisses in aplanatischen Punkten beobachtete. Da nämlich die aplanatischen Punkte kraft der Bedingung des Aplanatismus (konstantes Sinusverhältnis der in ihnen sich kreuzenden Büschelstrahlen) dem spezifischen Merkmal orthoskopischer Punkte (konstantes Tangentenverhältnis der in ihnen sich kreuzenden Hauptstrahlen) widersprechen, so muß ein aplanatisches System eine diesem ihm eigentümlichen Konvergenzverhältnis gemäß voraus zu bestimmende Verzerrung des Bildes ergeben, sobald es eine von dem aplanatischen Punkte entfernte Ebene durch Strahlenkegel abbildet, deren Hauptstrahlen sich in **diesem aplanatischen Punkte kreuzen.**

Die spezifische Art dieser Verzerrung läßt sich genügend kennzeichnen, indem man die Umgestaltung bestimmt, die ein System paralleler Geraden bei einer derartigen Abbildung erleidet, oder indem man umgekehrt die Gestalt derjenigen Kurven aufsucht, welche sich im Bilde als parallele Gerade darstellen. Eine leicht auszuführende Rechnung, auf die hier vorliegenden Voraussetzungen angewandt, ergibt das Resultat: Irgend eine Schar paralleler Geraden in einer zur optischen Achse senkrechten Ebene bildet sich durch ein aplanatisches System als eine Schar von Ellipsen über derselben Hauptachse, aber mit verschiedenen Nebenachsen ab (die unendlich entfernte Gerade als einschließender Halbkreis) und eine bestimmte Schar von Hyperbeln mit gleichem Mittelpunkte und gleichen Nebenachsen, aber verschieden großer Hauptachse wird im Bilde als ein System von parallelen Geraden wiedergegeben. Hierbei ist der Vereinfachung wegen angenommen, daß der Konvergenzwinkel der Strahlen im aplanatischen Punkte auf der Bildseite als verschwindend klein angesehen, hier also der Sinus der Tangente gleichgesetzt werden könne. Die für das Gesetz des Aplanatismus am meisten charakteristische Erscheinung erhält man, wenn als Objektfiguren zwei Scharen von Hyperbeln mit gemeinsamen Mittelpunkten und senkrecht sich schneidenden Hauptachsen genommen werden, beide entworfen nach der Gleichung



Figur 62.

Abbes Probeobjekt zur Prüfung der Konstanz des Sinusverhältnisses. Die Kurven erscheinen in der vorgeschriebenen Weise durch ein aplanatisches System betrachtet, als ein Netz von einander rechtwinklig schneidenden Geraden.

$$y = \frac{e}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2} \quad ,$$

wo e — die gemeinsame Nebenachse in beiden Scharen — den Abstand der Objektebene von dem betreffenden aplanatischen Fokus darstellt, und wenn zugleich die Werte von a in beiden Scharen nach der Formel

$$a = \frac{e \cdot u}{\sqrt{l - u^2}}$$

gleichen Zunahmen des u entsprechend — z. B. für die Beträge $u = 0$; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 u. s. w. gewählt werden. Diese Figur (siehe Figur 62) ergibt also, nachdem der gemeinsame Mittelpunkt aller Kurven in die Achse, die Ebene der Zeichnung senkrecht zur Achse in den

[1] E. Abbe, Carls Repert. 16. 303. 1881.

richtigen Abstand e vom aplanatischen Fokus gebracht ist, als Bild zwei Scharen von äquidistanten Parallelen, die einander rechtwinklig schneiden. Die krummlinig begrenzten, nach außen hin immer weiter sich ausdehnenden und immer stärker deformierten Felder der Objektfigur stellen sich im Bilde sämtlich als kongruente quadratische Felder dar; die Kreuzung der Hyperbeln, die nach außen hin unter immer spitzer bezw. stumpfer werdenden Winkeln erfolgt, wird allenthalben als eine rechtwinklige Kreuzung wiedergegeben, und auch die entfernteren Kurven beider Hyperbelsysteme, deren Äste in der Figur überhaupt keinen Durchschnitt ergeben, vielmehr sichtlich divergent verlaufen (z. B. die beiden für $u = 0{,}8$), erscheinen im Bilde unter rechtwinkliger Kreuzung, ihre Durchschnittspunkte aber freilich — entsprechend dem mathematischen Imaginären — in einem Abstand von der Mitte des Bildes, zu welchem kein vom Luftraum ausgehender Lichtstrahl mehr gelangen kann.

Die Beobachtung dieser Erscheinung kann mit Mikroskopobjektiven von nicht allzu kurzer Brennweite — bis zu etwa 3 mm herab und genügender Apertur hinreichend deutlich mit bloßem Auge erfolgen, indem man die Figur gut geebnet (auf ein Brettchen geklebt) auf den Tisch des Mikroskops legt, den Mittelpunkt der Kurven in die Achse rückt und den Tubus mit dem zu erprobenden Objektiv so weit hebt, daß der Einstellungspunkt des letzteren den richtigen Abstand e von der Zeichnung erhält (beistehende Figur ist für einen Abstand $e = 12{,}5$ mm entworfen). Damit dann noch der wesentlichen Bedingung genügt werde, daß die aplanatischen Punkte für die Abbildung der Zeichnung Pupillenmittelpunkte werden, ist nichts weiter nötig, als daß die Pupille des Auges, mit dem die Erscheinung beobachtet wird, annähernd an die Stelle des aplanatischen Bildpunktes gebracht werde. Dies ist genügend nahe der Fall, wenn man nach Entfernung des Okulars aus dem Tubus des Mikroskops vom offenen Ende desselben her mit bloßem Auge auf das dann über dem Objektiv schwebend erscheinende Luftbildchen der Zeichnung herabsieht. Bei Objektiven mit sehr kurzer Brennweite, die dieses Bildchen zu klein werden lassen, muß man zur Beobachtung ein schwach vergrößerndes Hilfsmikroskop benutzen, welches in den Haupttubus eingeschoben und auf das Bild eingestellt wird. Es muß dann allerdings besonders darauf Bedacht genommen werden, daß eine den Strahlengang begrenzende Blende in diesem Hilfsmikroskop wenigstens annähernd an einer solchen Stelle sich befindet, an der ihr Ort dem aplanatischen Fokus des zu beobachtenden Objektivs konjugiert ist.

Die AIRYsche Bedingung der Verzeichnungsfreiheit genügt in vielen Fällen, bedarf aber im allgemeinen einer Ergänzung.

Die unter verschiedenen Winkeln w die Achse schneidenden Hauptstrahlen werden nämlich im allgemeinen nicht durch denselben Punkt P gehen, sondern durch andere Achsenpunkte, deren Entfernung von P, δ, eine Funktion von w ist; ebenso werden die bildseitigen Hauptstrahlen die Achse in verschiedenen, von w' oder w abhängigen Entfernungen δ' von P' schneiden; oder das Projektionszentrum, von dem aus das Objekt angeschaut, und das, von dem aus das Bild projiziert wird, verschieben sich ein wenig auf der Achse, wenn man die verschiedenen Teile des Objekts nacheinander betrachtet.

Denn die Hauptstrahlen sind ja dadurch festgelegt, daß sie durch den Mittelpunkt der physischen Blende gehen; P und P' waren die Bildpunkte dieses Mittelpunktes, durch den vor und den hinter der Blende gelegenen Teil des Systems, S' und S'' (Figur 56, p. 213), entworfen: und zwar von Strahlenbüscheln, deren Öffnungswinkel w war. Diese Blendenbilder werden aber im allgemeinen mit sphärischer Aberration behaftet sein.

Zu diesem Ergebnis gelangten BOW und SUTTON schon 1861 und 1862; doch wurden ihre Untersuchungen vergessen, und erst in neuerer Zeit sind dieselben Resultate von neuem entwickelt worden[1].

Es ist also die durch S' und S'' erzeugte sphärische Aberration des Hauptstrahlenbüschels noch zu berücksichtigen; oder auch die Änderung der Aberration, die ein (in der Blende homozentrisches, durch Brechung an S' mit einer gewissen (durch die Lage der Blende und S' bestimmten) sphärischen Aberration behaftetes Büschel durch das ganze System erfährt.

---

[1] Die schwer zugängliche ältere Literatur findet man bei M. v. ROHR, Ztschr. f. Instrumentenk. **18.** 4. 1898. Neuere Arbeiten: D. KAEMPFFER, EDERS Jahrb. f. Phot. u. Rep. **11.** 247. 1897. O LUMMER in MÜLLER-POUILLETS Lehrb. d. Phys. 9. Aufl. Bd. Optik 1897 und Ztschr. f. Instrumentenk. **17.** 217. 225. 1897. M. v. ROHR, ibid. p. 271; dieser zum Teil auf ABBE zurückzuführenden Arbeit sind die oben gegebenen Formulierungen entnommen.

Daher ist jetzt

$$\text{(II)} \qquad \frac{y'}{y} = \frac{\xi_0' + \delta'}{\xi_0 + \delta} \cdot \frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = \text{const.}$$

zu setzen, um Verzeichnungsfreiheit zu erhalten (v. ROHR).

Man kann diese Konstanz erreichen durch:

$\delta = \delta' = 0$ (aberrationsfreie Pupillen)
$\frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = \text{const.}$
} BOW-SUTTONsche Bedingung der Verzeichnungsfreiheit.

Ein System, das diese Bedingung erfüllt, ist für alle Objektentfernungen verzeichnungsfrei. Bei den auf p. 70 genannten Systemen, bei denen die Blendenmitte im gemeinsamen Zentrum aller brechenden Flächen liegt, ist die BOW-SUTTONsche Bedingung offenbar streng erfüllt.

Durch eine Reihenentwickelung der beiden Faktoren von $\frac{y'}{y}$, die meist nur wenig von den für 0-Strahlen geltenden Werten abweichen, zeigte M. v. ROHR, daß in erster Annäherung für jedes System eine Objektentfernung existiert, bei der der Einfluß der Pupillenaberration den Einfluß der Veränderungen des Tangentenverhältnisses aufhebt, das System also richtig zeichnet. Verzeichnungsfreiheit für alle Abstände erfordert in erster Annäherung nur eine Beziehung zwischen den ersten Koeffizienten der Reihen.

Wenn die Blende gerade in der Mitte zwischen zwei gleichen, zu ihr symmetrisch angeordneten Teilen steht[1], oder allgemeiner: wenn zwei im Typus gleiche, nur in verschiedenen Dimensionen ausgeführte Systemteile symmetrisch zu einer Mittelblende stehen, von der sie im Verhältnis ihrer Dimensionen (oder Brennweiten) entfernt sind (ROTHWELL 1858), d. h. bei sogenannten holo- und hemisymmetrischen Dublets, ist stets $w' = w$ (denn ein die Blendenmitte passierender Strahl trifft offenbar auf entsprechende Flächen von S' und S'' unter gleichen Einfallswinkeln); daher ist die AIRYsche Bedingung erfüllt und diese Systeme sind streng orthoskopisch, wenn

$$\frac{\xi_0' + \delta'}{\xi_0 + \delta}$$

unabhängig von w ist. Ist nun das Verhältnis der Dimensionen von S' und S'' gleich ν, so wird $\delta = \nu\,\delta'$; und das System ist streng verzeichnungsfrei für den Objektabstand $\xi = \nu\,\xi'$ (R. H. BOW, 1861).

Wenn die Pupillen dabei, wie es bei derartigen photographischen Objektiven der Fall ist, in die Hauptpunkte fallen, so ist $\frac{\xi}{\xi'} = \frac{1}{\beta}$ (nach Gleichung 17, p. 51).

Hemisymmetrische Objektive zeichnen also streng richtig, wenn Objekt und Bild im selben Verhältnis stehen wie die ihnen zugewandten Systemteile. (Holosymmetrische also bei Reproduktionen in gleicher Größe.)

Für Systeme mit Vorder- oder Hinterblende ist δ oder $\delta' = 0$ zu setzen.

Sowohl die durch (I) als die durch (II) gegebene Bedingung kann näherungsweise durch die Elemente des Systems ausgedrückt werden, was hier nach Arbeiten ABBES geschehen soll, die bisher nicht veröffentlicht worden sind.

Wir gebrauchen die Bezeichnungen von p. 137, unterscheiden demnach den Scheitelabstand der Pupillen x und x' von dem des Objekt- und Bildpunktes s und s'. Das Tangentenverhältnis nach der Brechung an k Flächen ist:

$$\text{(1)} \qquad \frac{\operatorname{tg} w_k'}{\operatorname{tg} w_1} = \frac{\sin w_k'}{\sin w_1} \cdot \frac{\cos w_1}{\cos w_k'} \; .$$

---

[1] Die notwendige Verzeichnung symmetrischer für die Brennebene korrigierter Objektive für unendlich entfernte Objekte folgert BRUNS aus ganz allgemeinen Betrachtungen, vgl. oben p. 160.

Nun ist für irgend eine brechende Fläche

$$\frac{\sin w'}{\sin w} = \frac{p}{p'} \quad \text{(p. 67)}$$

$$= \frac{n}{n'} \frac{x - r}{x' - r} \quad \text{(Gleichung I, p. 67).}$$

Wenn wir wie auf p. 111 s und s', so auch hier x und x' entwickeln und nur das erste Glied berücksichtigen:

$$= \frac{n}{n'} \frac{x_0 - r + \mathfrak{A}\, w^2}{x_0' - r + \mathfrak{A}'\, w'^2} = \frac{n}{n'} \frac{x_0 - r}{x_0' - r} \left(1 + \frac{\mathfrak{A}\, w^2}{x_0 - r} - \frac{\mathfrak{A}'\, w'^2}{x_0' - r}\right) \quad .$$

Da nach p. 111 mit Vernachlässigung erst vierter Potenzen

$$w^2 = \left(\frac{r}{x_0}\right)^2 \varphi^2 \quad ,$$

so ist

$$\frac{\sin w'}{\sin w} = \frac{n}{n'} \frac{x_0 - r}{x_0' - r} \left[1 + \left(\frac{n\,\mathfrak{A}}{x_0^{\,3}} \frac{x_0}{n(x_0 - r)} - \frac{n'\,\mathfrak{A}'}{x_0'^{\,3}} \frac{x_0'}{n(x_0' - r)}\right) r^2 \varphi\right] \quad .$$

Für parachsiale Strahlen ist der Sinus mit dem Tangens zu vertauschen, daher $\frac{n}{n'} \frac{x_0 - r}{x_0' - r} = \Gamma$, dem Konvergenzverhältnis in den Pupillen. Setzen wir ferner (mit Vernachlässigung höchstens von φ^3) $r\varphi = y$, der Einfallshöhe, und lassen jetzt den Index 0 fort, so ist

$$\frac{\sin w'}{\sin w} = \Gamma \left[1 - \Delta \left(\frac{n\,\mathfrak{A}}{r x^3}\right) \frac{1}{Q_x} y^2\right] \quad .$$

Daraus folgt für das Verhältnis der Sinus vor und nach k brechenden Flächen, bei Berücksichtigung von $y_1 = w_1 x_1$, wenn Γ_k das Konvergenzverhältnis eines Parachsialstrahles nach der $k$ten und vor der ersten Fläche bedeutet:

$$\text{(2)} \qquad \frac{\sin w_k'}{\sin w_1} = \Gamma_k \left[1 - x_1^{\,2} w_1^{\,2} \, \Sigma \Delta \frac{n\,\mathfrak{A}}{r x^3} \frac{1}{Q_x} \left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2\right] \quad .$$

Ferner ist für eine Brechung:

$$\frac{\cos w}{\cos w'} = \frac{1 - \frac{1}{2} w^2}{1 - \frac{1}{2} w'^2} = 1 - \tfrac{1}{2}(w^2 - w'^2) \quad .$$

Nach k Brechungen erhält man also:

$$\frac{\cos w_1}{\cos w_k'} = 1 - \tfrac{1}{2}(w_1^{\,2} - w_k'^{\,2}) = 1 - \tfrac{1}{2} w_1^{\,2} \left(1 - \frac{w_k'^{\,2}}{w_1^{\,2}}\right) \quad .$$

Dafür mit Vernachlässigung mindestens vierter Potenzen:

$$\text{(3)} \qquad \frac{\cos w_1}{\cos w_k'} = 1 - \tfrac{1}{2} w_1^{\,2} (1 - \Gamma_k^{\,2}) \quad .$$

Durch (2) und (3) erhält man für Gleichung (1):

$$\text{(4)} \qquad \frac{\operatorname{tg} w_k'}{\operatorname{tg} w_1} = \Gamma_k \left[1 - w_1^{\,2} \left(x_1^{\,2} \sum \left\{\Delta \frac{n\,\mathfrak{A}}{r x^3} \frac{1}{Q_x} \left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2\right\} + \tfrac{1}{2}(1 - \Gamma_k^{\,2})\right)\right] \quad .$$

Also lautet die Bedingung konstanten Tangentenverhältnisses:

(Ia) $$x_1^2 \sum \left\{ \left(\frac{y_k}{y_1}\right) \varDelta \frac{n\mathfrak{A}}{r x^3} \frac{1}{Q_x} \right\} + \tfrac{1}{2}(1 - \Gamma_k^2) = 0 \quad .$$

Entwickelung des ersten Faktors der Gleichung (II).

Für eine brechende Fläche gilt:

$$\xi + \delta = x - s_0 ; \qquad \xi' + \delta' = x' - s_0'$$

(s_0 und s_0' sind die von w unabhängigen Scheitelabstände des Objekts und der Schirmebene).

$$\frac{\xi' + \delta'}{\xi + \delta} = \frac{x' - s_0'}{x - s_0} = \frac{x_0' - s_0' + \dfrac{\mathfrak{A}' r^2}{x_0'^2}\varphi^2}{x_0 - s_0 + \dfrac{\mathfrak{A} r^2}{x_0^2}\varphi^2} \quad \text{(wie oben nach p. 111)}$$

$$= \frac{x_0' - s_0'}{x_0 - s_0}\left[1 + \left(\frac{\mathfrak{A}'}{x_0'^2(x_0' - s_0)} - \frac{\mathfrak{A}}{x_0^2(x_0 - s_0)}\right) r^2 \varphi^2\right] \quad .$$

Mit Weglassung des Index:

$$= \frac{x' s'}{x s} \frac{\dfrac{1}{s'} - \dfrac{1}{x'}}{\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{x}} \left[1 + \left(\frac{\mathfrak{A}'}{s' x'^3 \left(\dfrac{1}{s'} - \dfrac{1}{x'}\right)} - \frac{\mathfrak{A}}{s x^3 \left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{x}\right)}\right) r^2 \varphi^2\right]$$

$$= \frac{n}{n'} \frac{x' s'}{x s} \frac{Q_x - Q_s}{Q_x - Q_s}\left[1 + \frac{1}{Q_x - Q_s}\left(\frac{n' \mathfrak{A}'}{s' x'^3} - \frac{n \mathfrak{A}}{s x^3}\right) r^2 \varphi^2\right]$$

$$\left(\frac{x'}{x} = \frac{y : x}{y : x'} = \frac{\sin w}{\sin w'}, \quad \text{für Parachsialstrahlen} = \frac{1}{\Gamma}\right) \quad .$$

Für k brechende Flächen erhalten wir ähnlich wie oben das Produkt:

(5) $$\frac{x_k' - s_k'}{x_1 - s_1} = \frac{n_1}{n_k'} \frac{s_k'}{\Gamma_k s_1}\left[1 + (w_1 x_1)^2 \sum \left\{ \left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2 \frac{1}{Q_x - Q_s} \varDelta \frac{n \mathfrak{A}}{s x^3} \right\}\right] \quad .$$

Durch Multiplikation von (4) und (5) ergibt sich für Gleichung (II):

$$\frac{y'}{y} = \frac{n_1}{n_k'} \frac{s_k'}{s_1}\left[1 + w_1^2 x_1^2 \sum \left\{ \left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2 \varDelta \frac{n\mathfrak{A}}{x^3} \left(\frac{1}{Q_x - Q_s} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{Q_x} \frac{1}{r}\right) \right\} - \frac{w_1^2}{2}(1 - \Gamma_k^2)\right].$$

Die Ausrechnung ergibt

$$\frac{1}{Q_x - Q_s} \frac{1}{s'} - \frac{1}{Q_x} \frac{1}{r} = \frac{Q_s}{x' Q_x (Q_x - Q_s)} \quad ,$$

$$\frac{1}{Q_x - Q_s} \frac{1}{s} - \frac{1}{Q_x} \frac{1}{r} = \frac{Q_s}{x Q_x (Q_x - Q_s)} \quad .$$

Daher ist

$$\varDelta \frac{n \mathfrak{A}}{x^3} \left(\frac{1}{Q_x - Q_s} \frac{1}{s} - \frac{1}{Q_x} \frac{1}{r}\right) = \varDelta \frac{n \mathfrak{A}}{x^4} \frac{Q_s}{Q_x (Q_x - Q_s)}$$

und nach Gleichung (5) p. 111:

$$= -\tfrac{1}{2} \frac{Q_s Q_x}{Q_x - Q_s} \varDelta \frac{1}{n x} \quad ,$$

$$w_1 x_1 = y_1 = r_1 \varphi_1 \quad ,$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{n_1}{n_k'} \frac{s_k'}{s_1}\left[1 + \frac{r_1^2 \varphi_1^2}{2} \sum \left\{ \left(\frac{y_k}{y_1}\right)^2 \frac{Q_s Q_x}{Q_s - Q_x} \varDelta \frac{1}{n x} \right\} - \frac{w_1^2}{2}(1 - \Gamma_k^2)\right] \quad .$$

Daher lautet die vollständige Bedingung der Verzeichnungsfreiheit:

$$\text{(IIa)} \qquad \frac{r_1^2 q_1^2}{2} \sum \left\{ \left(\frac{y_k}{y_1} \right)^2 \frac{Q_s Q_x}{Q_s - Q_x} \Delta \frac{1}{n x} \right\} - \frac{w_1^2}{2} (1 - \Gamma_k^2) = 0 \quad .$$

Hier, wie in Gleichung (Ia), ist natürlich jedes $\frac{y_k}{y_1}$ in der auf p. 115 für $\frac{h_k}{h_1}$ angegebenen Weise berechnet zu denken: der Ausdruck läßt sich daher im Anschluß an die Durchrechnung eines parachsialen Strahles berechnen.

Doch gilt für diese Näherungsformeln dasselbe, wie für die entsprechenden Formeln bei anderen Bildfehlern (sphärische Aberration, Krümmung). Bei großen Bildwinkeln ist es von geringem Werte und kann sogar schädlich sein, die Verzeichnung in der Mitte des Sehfelds aufzuheben; man wird sie über das ganze Sehfeld möglichst gleichmäßig zu verteilen suchen, indem man sie etwa für einen endlichen mittleren Winkel w aufhebt. Über die Folgen eines solchen Verfahrens, wenn die Zonen der Verzeichnung beachtet werden, s. M. v. ROHR, l. c.

Um die Verzeichnung überhaupt unschädlich zu machen, ist von R. H. BOW und für die besonderen Zwecke der Photogrammetrie von C. KOPPE das Auskunftsmittel angegeben worden, bei der Benutzung der Aufnahme das Objektiv vorzuschalten und auf diese Weise den ursprünglichen Strahlengang wiederherzustellen[1].

3. Die Veränderung des Öffnungswinkels bei Verschiebungen des Objekts auf der Achse.

Der Öffnungswinkel oder die angulare Apertur im Objekt- und ebenso im Bildraum hängt nach dem oben Gesagten nur von dem Gesichtswinkel ab, unter welchem die Ein- und Austrittspupille bezüglich vom Objekt und Bild aus erscheinen. Wenn in einem Instrument die Möglichkeit vorliegt, daß das Objekt seine Lage auf der Achse variiert, — und diese Möglichkeit ist natürlich niemals ganz ausgeschlossen — so ist die Lage der Pupillen auf der Achse maßgebend dafür, ob, in welchem Maße und in welchem Sinne sich dabei die Öffnungen der abbildenden Büschel verändern. Denn da die Lage und Größe der Pupille als der Basis der Strahlenbüschel in dem betreffenden Raume deren Öffnung bestimmt, so wird offenbar bei einer gewissen Annäherung, z. B. des Objekts an die Eintrittspupille, der Öffnungswinkel unter sonst gleichen Umständen desto stärker sich ändern, je näher bereits die Pupille am Objekt liegt. Da außerdem die Pupille im Sinne des Lichteinfalls sowohl vor als hinter dem Objekt liegen kann — dies hängt ganz von der Lage der Aperturblende und des Objekts zu dem Vorderteil S' des Systems ab — so kann einer Bewegung des Objekts im Sinne des Lichteinfalls ebensowohl eine Vergrößerung als eine Verminderung der Büschelöffnungen entsprechen.

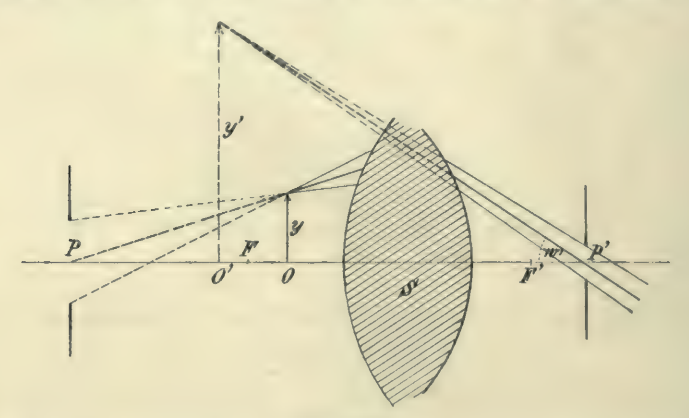
4. Die Vergrößerung und das Vergrößerungsvermögen.

An und für sich kann, wie wir früher (p. 41) gesehen haben, jedes optische System, jeden Wert der Vergrößerung β (und jedes Konvergenzverhältnis γ) in konjugierten Punkten hervorbringen. Nur die Lage der physischen Bestandteile des Systems könnte hierin eine Beschränkung verursachen, indem sie die beliebige Annäherung reeller Objekte z. B. an den vorderen Brennpunkt verhinderte. Diese durch das Verhältnis der wirklichen Bild- und Objektdimensionen definierte aktuelle oder objektive Vergrößerung spielt unmittelbar überall da eine Rolle, wo das Bild auf einen Schirm projiziert wird (photographische Objektive, Pro-

[1] Vgl. M. v. ROHR, Theorie u. Gesch. d. photogr. Obj. Berlin 1899 p. 17.

jektionsmikroskop u. s. w.), oder wo die linearen Dimensionen des in Luft projizierten Bildes eines endlich entfernten Gegenstandes einer Ausmessung unterworfen werden sollen (des vom Objektiv allein entworfenen Bildes bei allen optischen Meßinstrumenten, dem Mikrometermikroskop, dem mit Meßeinrichtung versehenen Fernrohr u. s. w.).

In den zur Unterstützung des Sehens bei subjektiver Beobachtung bestimmten Instrumenten jedoch bildet den Maßstab für die Leistung eines Instruments in bezug auf vergrößernde Wirkung offenbar nicht die lineare Größe des Bildes selbst, sondern seine Größe auf der Netzhaut des beobachtenden Auges oder was auf dasselbe hinauskommt, der Sehwinkel, unter dem es von der A.-P. des Instruments — und der mit dieser in Koinzidenz zu bringenden E.-P. des



Figur 63.
Das Vergrößerungsvermögen, als abhängig vom Strahlengang des Instruments.

Auges — aus erscheint. Insofern ist also der Strahlengang im Instrument — mag er durch die zu diesem gehörigen Blenden oder, wie bei der einfachen Lupe durch die Stellung des Auges bestimmt sein — mit maßgebend für die (subjektive) Vergrößerung, die das Instrument leistet.

Der Sehwinkel w', unter welchem das Objekt y von der A.-P. des Instruments aus erscheint, läßt sich aus der Lage der Pupillen und Bilder gegen einander berechnen. Sind die Entfernungen des Objekts von der E.-P. $PO = \xi$, die des Bildes von der A.-P. $P'O' = \xi'$, die derselben von den Brennpunkten der entsprechenden Räume $FO = x$, $F'O' = x'$, endlich die Abstände der Pupillen von denselben Brennpunkten $FP = X$, $F'P' = X'$, so ist (Figur 63).

$$\operatorname{tg} w' = \frac{y'}{\xi'} \quad , \qquad \frac{\operatorname{tg} w'}{y} = \frac{y'}{y} \cdot \frac{1}{\xi'} = \frac{\beta}{\xi'} \quad .$$

Ist das System verzeichnungsfrei, so ist β unabhängig von w und gleich dem Werte, den es für parachsiale Punkte hat $= \beta_0 = \dfrac{x'}{f'}$.

Nun ist $\xi' = x' - X'$; also

$$\frac{\operatorname{tg} w'}{y} = \frac{1}{f'}\left(1 + \frac{X'}{\xi'}\right) = V \quad . \tag{1}$$

Das Verhältnis des Sehwinkels, unter welchem ein Objekt von der A.-P. aus durch das Instrument erscheint, zur Größe dieses Objekts ist nach Abbe[1] das richtige Maß für dessen Vergrößerungswirkung,

[1] E. Abbe, Note on the proper definition of the amplifying power of a lens or lens system. Journ. R. Micr. Soc. (2) 4. 348. 1884.

es werde als **Vergrößerungsvermögen**[1] V **des Instruments** bezeichnet. V ist bestimmt durch ein Hauptglied, die reziproke hintere Brennweite des Systems, welche wir früher bereits als die „Stärke" des Systems ($1/f' = \varphi'$) bezeichneten. In zweiter Linie sind auf das Vergrößerungsvermögen von Einfluß der Abstand der A.-P. vom hinteren Brennpunkt, und die Entfernung des Bildes von der A.-P. Mit Ausnahme einiger besonderer Fälle wird der erste Abstand stets sehr klein oder ganz Null sein. Letztere Entfernung ist identisch mit der Entfernung des Bildes vom Auge (der Sehweite), hängt also von dessen Akkommodationszustande ab. Diese Sehweite aber ist gegenüber der Entfernung $F'P' = X'$ stets sehr beträchtlich; daher ist das Korrektionsglied $\frac{X'}{\xi'}$ in den meisten Fällen ein sehr kleiner echter Bruch. Die reziproke Brennweite des Systems allein bildet also im wesentlichen das Maß für den Sehwinkel, unter welchem die Längeneinheit durch das System hindurch erscheint, d. h. für das Vergrößerungsvermögen V des Systems. Sie bildet denjenigen Teil des Vergrößerungsvermögens, welcher von den rein zufälligen Umständen — Lage der A.-P. zur hinteren Brennebene, Sehweite des Beobachters — unabhängig ist. Wenn die A.-P. des Systems in dessen hinterer Brennebene liegt, so ist für jede Sehweite bezw. Bildentfernung die Größe $\varphi' = 1/f'$ das genaue Maß der Vergrößerung; ebenso ist es dies bei jeder Lage der A.-P. gegen F' für ein normales nicht akkommodierendes Auge. In jedem Falle aber ist der Einfluß dieser beiden Faktoren sehr klein. Der Winkel, unter dem ein Instrument die Längeneinheit erscheinen läßt, hängt daher im wesentlichen nur von dem Instrument und nicht von dem Beobachter ab.

Im allgemeinen ist es üblich, ein zur Unterstützung des Sehens bestimmtes Instrument durch ein anderes Maß zu charakterisieren, bei dem die Sehweite des Beobachters eine wesentliche Rolle spielt, und das gewöhnlich kurz als **„die Vergrößerung des Instruments"** (N) bezeichnet wird. Wir geben von den verschiedenen, hierfür vorgeschlagenen — und im Endresultat auf dasselbe hinauskommenden Definitionen diejenige, welche dem Sinne des Wortes „Vergrößerung" am getreuesten ist. Danach wird als die Vergrößerung eines — nach Art der Mikroskope wirkenden — Instruments das Verhältnis der Sehwinkel (bezw. ihrer trigonometrischen Tangenten) definiert, unter denen einmal das Bild des Gegenstandes im Instrument, und dann der Gegenstand selbst dem unbewaffneten Auge erscheint, wenn beide sich in der gleichen Entfernung l vom Auge befinden; oder was dasselbe ist, nach dem Verhältnis der Netzhautbilder in beiden Fällen. Bezeichnen wir die so definierte Vergrößerung mit N, so ist

$$N = \frac{y'}{l} : \frac{y}{l} = \left(\frac{y'}{y}\right)_l = (\beta)_{\xi' = l} \qquad (2)$$

Hiernach ist diese Vergrößerung auch das Größenverhältnis des in der Entfernung l von der A.-P. liegenden[2] (oder auf diese Entfernung projizierten) Bildes zu dem Objekte, also ein Sonderfall der linearen (objektiven) Vergrößerung.

Um vergleichbare Werte zu erhalten, mußte man eine gewisse gemeinsame Normalentfernung l annehmen, wofür man die sogenannte „Weite des deutlichen Sehens" 250 mm (10 Zoll) gewählt hat. Es ist das diejenige Entfernung vom Auge, in welche etwa Normalsichtige kleine Gegenstände zu bringen pflegen, die sie längere Zeit zu betrachten haben; eine Entfernung, in der solche Gegenstände unter einem nicht allzu kleinen Sehwinkel erscheinen, auf die aber von

[1] Wir unterscheiden in dieser Weise das ABBEsche Maß von dem im folgenden definierten. — [2] und zwar vor der A.-P., weswegen l negativ ist.

einem normalen Auge längere Zeit ohne erhebliche Anstrengung akkommodiert werden kann.

Dieses Maß, das auch noch auf verschiedene andere Weisen definiert werden kann, hat zweifellos den Vorzug großer Anschaulichkeit für sich. Da jeder eine Vorstellung davon hat, in welcher Größe ihm z. B. 1 mm in der Entfernung von 250 mm erscheint, so gewinnen auch die so bemessenen Vergrößerungsziffern, 100, 200, 1000, sofort eine anschauliche Bedeutung. Wiewohl daher für den praktischen Gebrauch mit Vorteil an dieser Bestimmungsweise festgehalten werden kann, so verdient vom wissenschaftlichen Standpunkte aus doch jedenfalls die von Abbe den Vorzug. Da nämlich, wie wir eben gesehen haben, der Sehwinkel, unter dem das Bild im Instrument erscheint, von der Akkommodationsweite so gut wie unabhängig ist, so kann man N auch bezeichnen als das Verhältnis dieses konstanten Sehwinkels zu demjenigen, unter dem das Objekt aus der Entfernung l erscheint. Also ist

$$N = \frac{\operatorname{tg} w'}{y/l} = \frac{\operatorname{tg} w'}{y} \cdot l = \frac{l}{f'} = l\,V \quad . \tag{3}$$

Die Vergrößerung ist also das l-fache des nach Abbe bestimmten Vergrößerungsvermögens. Insofern die Sehweite verschiedener Beobachter (Kurz- und Weitsichtiger) verschieden ist, der Wert von l also im gleichen Maße variiert, läßt das übliche Maß der Vergrößerung erkennen, daß der subjektive Nutzen, den ein Vergrößerungsinstrument einem Beobachter gewährt, proportional ist der Mindestentfernung, auf die er akkommodieren kann — für Weitsichtige also größer ist als für Kurzsichtige. In dem Abbeschen Maße hingegen ist nach dem Gesagten nur derjenige Teil der Wirkung ausgedrückt, der von dem Instrument als solchem abhängt. Es verhalten sich daher beide Bestimmungsweisen zu einander wie die nach dem konventionellen und die nach dem absoluten Maßsystem geschehenden in anderen Gebieten der Physik.

Beide Definitionen fallen zusammen, wenn das Objekt sich in unendlicher Entfernung befindet. Alsdann kann die Größe des Objekts nicht anders gemessen werden, als durch den Sehwinkel, unter dem es erscheint, und zwar von der E.-P. aus, falls diese nicht etwa selbst im Unendlichen liegt. Die (angulare) **Vergrößerung von Teleskopen** ist, wie wir früher bereits hervorgehoben haben, identisch mit dem Konvergenzverhältnis des Systems in den Pupillen $= \Gamma$.

Das eigentliche Gegenstück zu der Vergrößerung in den nach Art eines Mikroskops wirkenden Apparaten bildet die **Größe des Maßstabs, in der Projektionssysteme sehr entfernte Gegenstände abbilden,** z. B. das Objektiv eines Fernrohres, dieses für sich betrachtet. Hier ist von Interesse das Verhältnis der linearen Bildgröße zu dem Sehwinkel, unter welchem von der E.-P. des Instruments aus das Objekt erscheint, also das Verhältnis $y'/\operatorname{tg} w$.

Bei den früheren Bezeichnungen ist, wenn wir in (1) Bild- und Objektraum vertauschen:

$$\frac{y'}{\operatorname{tg} w} = \frac{f}{1 + \frac{X}{\xi}} = f\frac{\xi}{x} = M \quad . \tag{4}$$

Liegt die E.-P. in der vorderen Brennebene, so wird $x = \xi$, also

$$\frac{y'}{\operatorname{tg} w} = f \quad ; \tag{5}$$

ebenso, wenn das Objekt sehr entfernt wird, in welchem Falle die Bildebene sich ja mehr und mehr der hinteren Brennebene nähert, und die obige Beziehung mit der Definition der vorderen Brennweite zusammenfällt.

Liegen die Pupillen in den Hauptebenen, so ist

$$\frac{y'}{\operatorname{tg} w'} = f(1 - \beta) \quad . \tag{6}$$

Die Tachymetrie. In der Geodäsie will man oft aus der Größe des Bildes eines bekannten Gegenstandes (Meßlatte) auf seine Entfernung einen Schluß ziehen. Diese Entfernung ξ, gemessen von der Eintrittspupille des Systems, ist

$$\xi = \frac{y}{\operatorname{tg} w} \quad .$$

In solchen Fällen ist es vorteilhaft, zur Bestimmung von $\operatorname{tg} w$ sich der einfacheren Formel $\operatorname{tg} w = y'/f$ bedienen zu können; zu diesem Zwecke muß man also die E.-P. des Instruments in dessen vorderen Brennpunkt verlegen. Dann ist der Abstand $(-\xi)$ der Meßlatte gleich dem Reduktionsstab $(-1:\beta)$ multipliziert mit der Brennweite.

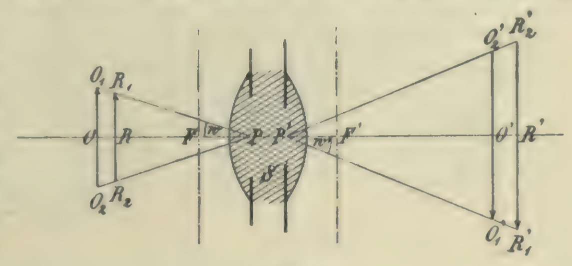
Bei Benutzung photographischer Objektive zu gleichem Zwecke ist zu beachten, daß die Pupillen meist in den Hauptpunkten oder ihnen doch sehr nahe liegen (holo- und hemisymmetrische Objektive). Dann ist

$$\xi = f\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) \quad , \tag{7}$$

wobei zu beachten ist, daß ξ und β negativ sein muß und β meist klein ist.

5. Messungen.

Der Strahlengang ist endlich von großer Wichtigkeit in den zahlreichen Fällen, in denen optische Instrumente dazu dienen, um aus den Größen der Bilder, die sie entwerfen, die Größe der Objekte zu ermitteln. Da die Bilder niemals wirklich dioptrisch vollkommen sind, da ferner das Auge des Beobachters die Fähigkeit der Akkommodation für verschiedene Entfernungen besitzt, und da dasselbe endlich eine beschränkte Sehschärfe hat, so wird die Einstellung auf das Bild immer einer gewissen Unsicherheit unterliegen; oder es wird im allgemeinen die Ebene, welche der Netzhaut des beobachtenden Auges bei dessen momentanem Akkommodationszustand konjugiert ist, die Pointierungsebene, mehr oder minder weit entfernt sein von der Ebene, in welcher das schärfste Bild des anvisierten Objekts liegt, der Bildebene. Der Messung — mag sie nun mittels körperlicher Marken (Fäden oder dergl.) oder mittels der Bilder selbst (Heliometer) erfolgen — wird daher im allgemeinen nicht das wahre, sondern das Zerstreuungsbild des gemessenen Gegenstandes in der Pointierungsebene unterworfen. Die Größe desselben ist nach dem oben Ausgeführten bestimmt durch den Gang der Hauptstrahlen. Denn da auf diesen als den Schwerlinien der vom Objekt oder Bild ausgehenden Büschel die Mitten der Zerstreuungskreise unscharfer Bildpunkte liegen, so bestimmen die Durchstoßungspunkte der Hauptstrahlen mit der Pointierungsebene unmittelbar die Bildgröße. In der Pointierungsebene $O_1' O_2'$ (Figur 64) wird O_1' als Bild jedes Punktes O_1, R_1 aufgefaßt, welcher auf dem zu $O_1' P'$ im Objektraum konjugierten Hauptstrahle liegt, somit $O_1' O_2'$ als Bild von $O_1 O_2$ oder auch von $R_1 R_2$. Umgekehrt wird



Figur 64.
Der Strahlengang in seiner Bedeutung für die Ausmessung optischer Bilder.

das Bild desselben Punktes O_1 in O_1' oder R_1' und das Bild von $O_1 O_2$ in $O_1' O_2'$ oder $R_1' R_2'$ aufgefaßt, je nachdem die Pointierungsebene sich in O' oder R' befindet.

Nun ist (Figur 64)

$$y' = \xi' \cdot \operatorname{tg} w' \quad , \qquad y = \xi \cdot \operatorname{tg} w \quad ,$$

wenn y die Ordinate des Objekts, ξ sein Abstand von der Eintrittspupille P und w die Neigung des Hauptstrahles gegen die Achse ist; analog y' die in der Pointierungsebene aufgefaßte Bildgröße, ξ' der Abstand der Pointierungsebene von der Austrittspupille P' und w' der zu w konjugierte Winkel. Daher wird die in der Pointierungsebene gemessene Vergrößerung

(1) $$[\beta] = \frac{y'}{y} = \frac{\xi'}{\xi} \cdot \frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} \quad .$$

Nehmen wir das Tangentenverhältnis in den hier aberrationsfrei vorausgesetzten Pupillen als konstant, d. h. orthoskopische Abbildung an, so ist $\operatorname{tg} w' / \operatorname{tg} w = \Gamma$ auch das Konvergenzverhältnis der Parachsialstrahlen in P und P' und dies $\Gamma_0 = \frac{n}{n'} \frac{1}{B}$. Also

(2) $$[\beta] = \frac{\xi'}{\xi} \cdot \Gamma = \frac{n}{n'} \frac{\xi'}{\xi} \cdot \frac{1}{B} \quad .$$

Diese Formel zeigt, daß und wie die beobachtete Vergrößerung abhängt von der Lage der Pupillen zu Objekt- und Messungsebene, sowie von der Vergrößerung in ersteren — und nur von diesen Faktoren.

Es können nun in der Paxis zwei Fälle vorkommen: erstens der, daß die Entfernung der Pointierungsebene von der Austrittspupille — bezw. dem abbildenden System überhaupt — fixiert ist; alsdann sind Schwankungen der Objektentfernung möglich, welche auf die Bestimmung von β einwirken. Dies ist z. B. beim Mikrometermikroskop der Fall. Oder umgekehrt, die Entfernung des Objekts vom System ist als unveränderlich anzusehen, die der Pointierungsebene aber ist Variationen unterworfen (z. B. beim Fernrohr durch den Einfluß der Temperaturschwankungen auf das Objektiv und Tubusrohr, durch veränderte Okulareinstellung u. dergl.). Je nachdem der eine oder der andere dieser beiden Fälle vorliegt, wird man suchen, die Einrichtung des Instruments so zu treffen, daß die Entfernung des Objekts von der Eintritts- oder die der Pointierungsebene von der Austrittspupille ihren Einfluß auf die Messung von β verliert. Und dies ist, wie ABBE[1] gezeigt hat, in der Tat möglich.

Führen wir noch die Entfernungen der Pupillen und Objekt- bezw. Bildebenen von den Brennebenen der betreffenden Räume ein, X, X' und x, x', so haben wir

$$\xi' = x' - X' \quad ; \qquad \xi = x - X$$

und nach den Fundamentalformeln

$$\Gamma = - \frac{f}{X'} = - \frac{X}{f'} \quad ;$$

daher

(3) $$[\beta] = \frac{x' - X'}{x - X} \Gamma = - \frac{x' - X'}{f' \left(\frac{x}{X} - 1 \right)} = - \frac{\frac{x'}{X'} - 1}{x - X} f \quad .$$

[1] Über mikrometrische Messung mittels optischer Bilder. Sitzber. Jen. Ges. f. Med. u. Naturw. 1878.

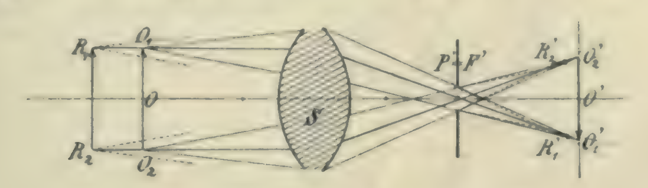
Je nachdem also die Eintritts- oder die Austrittspupille in unendliche Entfernung verlegt, d. h. X oder $X' = \infty$ — je nachdem das System nach der Bezeichnung Abbes nach der Objekt- oder Bildseite „telezentrisch“ gemacht — wird, ist

$$(4a) \qquad [\beta] = \frac{\xi'}{f'}$$

unabhängig von der Objektentfernung, oder

$$(4b) \qquad [\beta] = \frac{f}{\xi}$$

unabhängig von der Lage der Pointierungsebene.



Figur 65.
Ein auf der Objektseite telezentrischer Strahlengang.

Dies ergibt sich auch, wie ein Blick auf die vorstehende Figur (Figur 65) zeigt, unmittelbar daraus, daß die Hauptstrahlen im ersteren Falle im Objektraum, im letzteren im Bildraum parallel zur Achse verlaufen. Eine wenig beachtete nach der Bildseite telezentrische Konstruktion ist bereits vor 1860 von I. Porro ausgeführt worden, worauf M. v. Rohr aufmerksam gemacht hat[1].

Bei der gewöhnlichen Einrichtung der zu Messungen dienenden Instrumente liegen die Pupillen wiederum nahe an den Hauptebenen oder Knotenebenen. Alsdann ist Γ oder $B = 1$ und $[\beta] = \frac{\xi'}{\xi}$. Bei der hier betrachteten singulären Art von Strahlenbegrenzung wird $\Gamma = \infty$ bezw. $= 0$; β wird ganz unabhängig von Γ und B und tritt dafür in unmittelbare Abhängigkeit von der Brennweite des abbildenden Systems.

Verwirklicht aber wird diese Art des Strahlenganges einfach dadurch, daß die Aperturblende im ersteren Falle in die hintere, im letzteren Falle in die vordere Brennebene gesetzt wird, oder wenn zwischen die Linsen des Systems, dann an eine Stelle, die jenen Ebenen konjugiert ist in begug auf den zwischen beiden befindlichen Teil des Systems. Wie dies in den einzelnen Arten optischer Instrumente am zweckmäßigsten einzurichten ist, kann erst erörtert werden, wenn wir die Konstruktion derselben des näheren besprochen haben.

Die von der Pupillengröße und der Apertur abhängigen Eigenschaften der Instrumente.

1. Die Maßbeziehungen zwischen Pupillen und Bildern.

Die auf p. 50 entwickelten Abbildungsgleichungen, bezogen auf konjugierte Punkte, enthalten alle hier in Frage kommenden Beziehungen. Insbesondere geben die Gleichungen (II*) die Beziehungen zwischen der Vergrößerung β_0, welche

[1] M. v. Rohr, Theorie u. Gesch. d. phot. Obj. Berlin 1899, p. 113. Porro nannte die Eigenschaft seines Fernrohrobjektivs, die Bildgröße nicht mit der Einstellungsweite des Okulars zu ändern, anallatisme longitudinal.

in dem einen Paare von konjugierten Punkten, z. B. in den Pupillen, besteht und den Abszissen, der Vergrößerung und dem Konvergenzverhältnis in dem anderen Paare, also in Objekt- und Bildpunkt. Speziell ist die Gleichung (17) eine Beziehung zwischen der linearen Vergrößerung β in Objekt- und Bildpunkt, derjenigen B in den Pupillen und den Abszissen der ersteren bezogen auf die letzteren ξ, ξ' nämlich

$$\text{(1)} \qquad \frac{\xi_0'}{\xi_0} = \frac{n'}{n} \cdot \beta_0 B_0 \quad .$$

Diese Gleichung bezieht sich zunächst nur auf die für parachsiale Strahlen geltenden Bildorte und Bildgrößen, was durch die Indizes angedeutet ist. Es kann nun entweder, wie wir gesehen haben (IV. Kapitel), der Bildwinkel ausgedehnt und die Pupillen — wenigstens im Verhältnis zu ihren Abständen ξ, ξ' — klein sein oder umgekehrt können die letzteren erhebliche Größe haben und Bild und Objekt ein entsprechend kleineres Gesichtsfeld einnehmen.

Im ersteren Falle wird bei einem möglichst vollkommen wirkenden System das Bild eines ebenen Objekts selber eben, d. h. $\xi' = \xi_0'$, und die Vergrößerung in Objekt und Bild $\beta = y'/y$ konstant, also auch $= \beta_0$ sein. Die Aberrationen in den Pupillen sind aber infolge der besonderen Konstruktionsart der meisten hier in Betracht kommenden Instrumente gewöhnlich nicht sehr groß; es kommt also in den Pupillen von selbst nur der Grenzwert von B oder doch ein ihm sehr nahe liegender in Betracht. Die Gleichung (1) bleibt daher hier ohne weiteres in der Form bestehen

$$\text{(1a)} \qquad \frac{\xi'}{\xi} = \frac{n'}{n} \beta \cdot B \quad .$$

In dem anderen Falle — Abbildung kleiner Objektflächen durch weitgeöffnete Büschel — kann man nicht ebenso einfach aus der Größe der vorliegenden endlichen Maßstücke auf die in Gleichung (1) eintretenden Grenzwerte oder auf ihre gegenseitigen Beziehungen einen Schluß ziehen. Es wird in den Pupillen[1] vermöge der Bedingung des Aplanatismus (s. oben p. 220) eine beträchtliche Verzeichnung bestehen, und eine starke Krümmung ist erfahrungsmäßig ebenfalls stets vorhanden. Infolge dessen variieren ξ', ξ und B mit dem Divergenzwinkel u der vom Objekt ausgehenden Büschel. In dem allgemeinsten Falle, daß E.-P. und A.-P. beides Bilder einer zwischen den Bestandteilen des Systems gelegenen physischen Blende sind, sind beide als gekrümmte (Rotations-) Flächen anzunehmen, für deren Gestalt keinerlei Anhaltspunkte vorhanden sind. Ihre Orte und Größen sind also nur durch die Grenzwerte, d. h. die Ränder definiert.

Bezeichnen wir mit p, p' die sich allein der Messung unmittelbar darbietenden Halbmesser der ganzen E.-P. und A.-P., mit B_U ihr Verhältnis p'/p, mit ξ_U, ξ_U' die Länge der von Objekt- und Bildpunkt nach den Rändern der Pupillen gezogenen Strahlen, mit $[\xi_0]$, $[\xi_0']$ aber die (meßbaren) Entfernungen der durch die Pupillenränder gehenden Ebenen von Objekt und Bild, so haben wir (Figur 66)

$$\xi_U = \frac{p}{\sin U} \quad ; \qquad \xi_U' = \frac{p'}{\sin U'} \quad ,$$

also

$$\frac{\xi_U'}{\xi_U} = \frac{p'}{p} \cdot \frac{\sin U}{\sin U'} \quad .$$

Wenn O und O' aplanatische Punkte sind, so ist das Verhältnis der Grenzwinkelsinus — wie das der Sinus irgend welcher anderen einander konjugierten Winkel —

[1] Die dann durch enge Büschel, also mit genügender Schärfe, abgebildet werden.

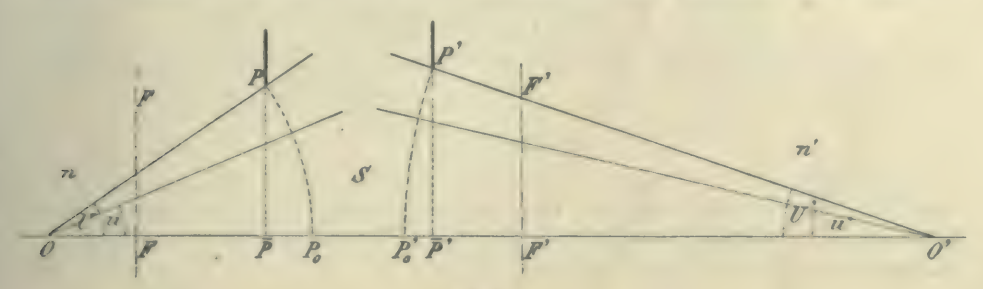
$$\frac{\sin U'}{\sin U''} = \frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{n'}{n}\beta \quad .$$

Also wird

(2)
$$\frac{\xi_U'}{\xi_U} = \frac{n'}{n}\beta B_U = \frac{n' y' p'}{n y p}$$

für die Entfernungen der Pupillenränder von Objekt und Bild.

Wenn die Pupillen als Kugelflächen angenommen werden, so würde dieselbe Beziehung innerhalb der ganzen Ausdehnung derselben, d. h. für jedes



Figur 66.
Zu den Beziehungen zwischen der Objekt- und der Pupillenvergrößerung bei großem Öffnungswinkel.

u und p gelten. Messen wir aber in den durch die Pupillenränder definierten Ebenen, deren Entfernungen von Objekt und Bild bezw.

$$OP = [\xi_0] = \xi_U \cdot \cos U \qquad \text{und} \qquad O'P' = [\xi_0'] = \xi_U' \cdot \cos U'$$

sind, so wird das Verhältnis dieser Strecken

(3)
$$\frac{[\xi_0']}{[\xi_0]} = \frac{n'}{n}\beta B_U \frac{\cos U'}{\cos U} = \frac{n' y' p'}{n y p}\,\frac{\cos U'}{\cos U} \quad .$$

Dieselbe Bezeichnung gilt *mutatis mutandis*, wenn man statt der Gesamtgrößen der Pupillen in den durch ihre Ränder definierten Ebenen die Achsenentfernungen entsprechender, d. h. auf konjugierten Strahlen liegender Punkte mißt, p_u, p_u'; nämlich

(3a)
$$\frac{[\xi_0']}{[\xi_0]} = \frac{n'}{n}\beta \frac{p_u'}{p_u}\,\frac{\cos u'}{\cos u} = \frac{n'}{n}\beta [B_u] \frac{\cos u'}{\cos u} \quad .$$

Für den Grenzwert $[B_0]$ endlich von $[B_u]$ bestimmt sich das Verhältnis der Kosinus als $= 1$ und es wird

$$\frac{[\xi_0']}{[\xi_0]} = \frac{n'}{n}\beta [B_0] \quad ,$$

d. h. dieselbe Gleichung, welche auch in jeder anderen Schirm- oder Pointierungsebene gilt (vgl. p. 230).

Teleskopische Systeme. Hier ist für parachsiale Strahlen die lineare sowohl als die angulare Vergrößerung dieselbe für alle Strahlen der Achse; also $\beta_0 = B_0 = \text{const.}$ und $\gamma_0 = \Gamma_0 = \text{const.}$ Wenn ein solches teleskopisches System aplanatisch ist für die unendlich fernen Punkte, so wird der Ausdruck der Sinusbedingung bei ihm nach p. 132

$$\frac{h'}{h} = \text{const.}$$

sein muß, wo h' die Höhe über der Achse ist, in welcher ein Strahl aus dem System austritt, dessen konjugierter in der Höhe h in das System eintrat. Diese parallel der Achse ein- und austretenden Strahlen sind die Hauptstrahlen für die Abbildung der Pupillen; sonach ist

$$\frac{h'}{h} = \frac{p'}{p} = B$$

ebenfalls konstant, d. h. unabhängig von dem Werte von p innerhalb der ganzen aplanatisch abbildenden Öffnung des Systems. Bei unendlich fernen Objekten ist, wie oben ausgeführt, die Vergrößerung identisch mit dem Konvergenzverhältnis der Hauptstrahlen in den Pupillen, Γ. Diese wird somit aus dem linearen Vergrößerungsverhältnis in den Pupillen, B, gemäß dem HELMHOLTZ-LAGRANGE-schen Satze berechnet zu

$$\Gamma = \frac{n}{n'} \frac{1}{B} = \frac{n}{n'} \frac{p}{p'} \quad (4)$$[1]

wo für p und p' beliebige zusammengehörige Werte genommen werden können, die Messung von p und p' aber bei telezentrischem Strahlengange ausgeführt werden muß.

2. Beziehungen zwischen Apertur, Brennweite und Pupillengröße.

Bei Systemen mit endlicher Brennweite sind von Interesse die beiden besonderen Fälle, daß entweder die bildformierenden Büschel eng und die vom Objekt divergierenden relativ weit sind (Mikroskop) oder umgekehrt die ersteren weit und die letzteren eng (lichtstärkere photographische Objektive). Es ist oft wünschenswert, im ersteren Falle die numerische Apertur der vom Objekt ausgehenden Büschel aus der Lage und Größe der A.-P., im anderen Falle die der bildformierenden aus der Lage und Größe der E.-P. zu ermitteln, da beim Gebrauche dieser Systeme das eine Mal die A.-P., das andere Mal die E.-P. bequem zugänglich ist. Nehmen wir in dem beim Mikroskop verwirklichten Falle die Konvergenz der bildseitigen Büschel als so gering an, daß die Sinus für die Tangenten gesetzt werden können, so ist (Figur 66)

$$p' = [\xi_0'] \sin U' = [\xi_0'] \frac{n \sin U}{n'} \frac{1}{\beta} = [\xi_0'] \frac{a}{n'} \frac{1}{\beta} .$$

Ist nun die Ebene der A.-P. von der hinteren Brennebene des Systems um X' entfernt, d. h. $F'P' = X'$, der Bildpunkt O' von derselben um x', $F'O' = x'$, also $x' = [\xi_0'] + X'$, so wird unter Berücksichtigung von $\beta = \frac{x'}{f'}$

$$p' = \frac{[\xi_0']}{x'} \frac{a}{n'} f' = a \cdot \frac{f'}{n'} : \left(1 + \frac{X'}{[\xi_0']}\right) ,$$

folglich, wenn n', wie es fast stets der Fall ist, $= 1$ angenommen wird,

$$a = \frac{p'}{f'} \left(1 + \frac{X'}{[\xi_0']}\right) = p' V \quad (5)$$

nach Gleichung (1), p. 226.

Wenn $[\xi_0']$ groß ist gegen X', insbesondere wenn die A.-P. geradezu in der hinteren Brennebene liegt, also $X' = 0$ ist (vgl. p. 227), wird einfach

[1] Diese Beziehung wurde für parachsiale Strahlen schon von LAGRANGE aufgestellt und ihre Benutzung zu dem hier erwähnten Zwecke empfohlen. Mém. Acad. Berlin 1803. p. 3.

$$(5a)\qquad a = \frac{p'}{f'}\quad .$$

Dies gilt natürlich ebenso in bezug auf das ganze Mikroskop, wie für das Objektiv eines solchen allein, wofern nur die Divergenzwinkel nach dem Bilde zu klein genug sind, um deren Sinus für die Tangenten setzen zu können.

Für den anderen Fall, wo die Abbildung wie bei photographischen Objektiven mit engen objektseitigen Büscheln stattfindet, hat man ganz entsprechend bei analoger Bezeichnung

$$p = [\xi_0]\frac{n'\sin U'}{n}\qquad \beta = \frac{[\xi_0]}{x}\qquad \frac{f}{n}\,a' = a'\cdot\frac{f}{n} : \left(1 + \frac{X}{[\xi_0]}\right)\quad ,$$

also, da n stets $= 1$ ist,

$$(6)\qquad a' = \frac{p}{f}\left(1 + \frac{X}{[\xi_0]}\right) = \frac{p}{M}$$

nach Gleichung (4) p. 228. Wenn nun wieder X sehr klein ist gegen $[\xi_0]$, so wird einfach

$$(6a)\qquad a' = \frac{p}{f}\quad .$$

3. Die Lichtstärke optischer Instrumente.

Obwohl wir uns im allgemeinen auf die geometrischen Eigenschaften des Strahlenverlaufs beschränken, wollen wir hier die Bedeutung der Pupillenlage und Apertur auch für die Intensität der von optischen Systemen hervorgebrachten Wirkungen erörtern. Wir können nämlich mit den bisher erworbenen Mitteln leicht über diese Intensität Aussagen machen, ohne auf den physikalischen Charakter der Vorgänge einzugehen. Wir benutzen dabei einen der geometrischen Optik fremden Begriff, den der Lichtmenge, brauchen aber seine physikalischen Gesetze nicht zu untersuchen, sondern beschränken uns darauf, aus dem folgenden Grundsatze Schlüsse zu ziehen:

Innerhalb einer von Lichtstrahlen gebildeten Röhre, einer Lichtröhre, bleibt die Lichtmenge stets dieselbe.

Das Folgende gilt zunächst für die einzelnen Farben; wenn diese nicht oder wenig getrennt werden, sind dieselben Begriffe und Sätze auch auf zusammengesetztes Licht im ganzen anzuwenden.

A. Die photometrischen Grundbegriffe.

Eine Lichtröhre besteht aus einer vierfach unendlichen Mannigfaltigkeit von Strahlen, die in einem von Strahlen begrenzten Raume um einen Strahl verlaufen. Diese Lichtröhre soll in ihrem Verlaufe beliebige Verbiegungen, stetige oder unstetige, erleiden dürfen; nur darf sie sich nicht teilen (aus einem Strahle dürfen nicht zwei Strahlen entstehen, s. w. u.).

Die von einer solchen Lichtröhre an irgend einer Stelle geführte **Lichtmenge** messen wir, indem wir die Röhre dort durch eine hindurchgelegte Fläche schneiden. (Im besonderen Falle kann diese Fläche diejenige sein, von der die Lichtröhre ihren Ursprung nimmt, also die Lichtquelle, oder diejenige, wo sie ihr Ende findet, also die beleuchtete Fläche. Wir werden diese Fälle aber nicht von dem allgemeinen des Durchtritts durch die Fläche zu unterscheiden brauchen.) Die Lichtröhre schneidet aus der Fläche ein Stück heraus, und wir können die vierfach unendlich vielen Strahlen der Lichtröhre zusammenfassen in die zweifach unendlich vielen Strahlenbüschel, die von den Punkten dieses Flächenstücks ausgehen. Dies können wir an jeder Stelle der Lichtröhre ausführen, stets

werden auf diese Weise alle Strahlen der Röhre erschöpft. Wir werden es im folgenden stets an zwei Stellen tun und dann den im Eingange ausgesprochenen Satz anwenden.

Beschränken wir uns zunächst auf eine überall unendlich dünne Lichtröhre, die aus der hindurchgelegten Fläche ein Element herausschneidet, so definieren wir nun: Die von der elementaren Lichtröhre geführte Lichtmenge, die unser Element durchsetzt, ist proportional

1. der Projektion des Elements auf die Richtung der Lichtröhre, oder auch die Richtung der Büschel, die von irgend einem Punkte des Elements ausgehen;

2. der räumlichen Öffnung dieser Büschel, d. h. der Größe des Flächenstücks, das ein solches Büschel auf einer mit dem Radius 1 um das Element als Zentrum konstruierten Kugel ausschneidet.

Bezeichnen wir das Flächenelement mit df, den Winkel, den die Lichtrichtung mit seiner Normalen bildet, mit ϑ, den räumlichen Winkel seiner Öffnung mit $d\omega$, so ist also die Lichtmenge

$$dL = df \cdot \cos\vartheta \cdot d\omega \cdot k \quad . \tag{1}$$

Wird die Lichtröhre im weiteren Verlaufe von endlichem Querschnitt, d. h. wird das Element von endlich geöffneten Büscheln durchsetzt, so ist die Lichtmenge gleich der Summe der Lichtmengen der elementaren Röhren, die alle df durchsetzenden Strahlen erschöpfen:

$$dL = df \iint \cos\vartheta\, k\, d\omega \quad ; \tag{1a}$$

und ist die Lichtröhre überhaupt endlich, die Schnittfläche von endlicher Ausdehnung, so ist die Lichtmenge gleich der Summe der Lichtmengen, die die einzelnen Elemente der Fläche durchsetzen:

$$L = \iint df \iint \cos\vartheta\, k\, d\omega \quad . \tag{1b}$$

Die Konstante k ist nach (1) die auf die Flächeneinheit und die Einheit des Öffnungswinkels bezogene Lichtmenge. Sie heißt die **Leuchtkraft** der das Element df in der durch ϑ bezeichneten Richtung durchsetzenden Elementarröhre (oder der Elementarbüschel) am Orte jenes Elements [1] und hängt bei endlich geöffneten Büscheln von ϑ, auf einer endlichen Fläche vom Orte ab [2]. Häufig wird sie auch die **spezifische Intensität** oder der **Glanz** genannt.

Ist k konstant innerhalb der endlichen ein Flächenelement durchsetzenden

[1] Wir bezeichnen diese Leuchtkraft ebenso wie die Lichtmenge und im folgenden die Lichtdichte als Eigenschaften nicht der Fläche, sondern der Lichtröhre oder der Büschel, um Verwechslungen mit der auf einer physischen, auffangenden Fläche erregten Leuchtkraft zu vermeiden. Die hier durchgeführte Darstellungsweise überhaupt wurde veranlaßt durch: R. Straubel, Gerlands Beiträge zur Geophysik, Erg.-Bd. I (Verhandl. der ersten internat. seismol. Konfer.) p. 290. 1902. — [2] Ist im speziellen Falle die betrachtete Schnittfläche die Ausgangsfläche der Lichtröhre, d. h. die Oberfläche des strahlenden Körpers, so hängt die Leuchtkraft k von dessen physischer Beschaffenheit (Oberflächenbeschaffenheit, Temperatur u. s. w.) ab und, wenn es ein nur mittelbar lichtstrahlender Körper ist, auch von der Beleuchtung, unter der er selbst sich befindet. Bei glühenden festen Körpern scheint k nahezu eine Konstante in bezug auf ϑ zu sein. Bei anderen aber und namentlich bei den mittelbar — durch diffuse Reflexion, Diffraktion oder dergl. — strahlenden wird k im allgemeinen jede beliebige Funktion des Ausstrahlungswinkels sein können und sowohl von seiner Größe, als dem Azimut der Strahlungsrichtung abhängen. Nur bei vollkommen schwarzen, d. h. alle Strahlen jeder Art absorbierenden Körpern ist k wirklich eine Konstante und sogar für alle Körper dieser Eigenschaft dieselbe, es hängt nur von der Temperatur ab. Einige von einem der Herren Mitarbeiter von Carl Zeiss in Jena gütigst mitgeteilten Zahlen für k bedeuten praktisch brauchbare Durchschnittswerte:

Petroleumlampe	0,036	Glühlampe	0,80
Acetylenlampe	0,07	Nernstlampe	3,0
Auerbrenner	0,10	Gleichstrom-Bogenlampe	140

(Durchschnittswert zwischen Fäden und Öffnungen).

Büschel, liegen deren Achsen in der Normale des Elements und ist ihr Querschnitt kreisförmig, so ist die durch das Element tretende Lichtmenge nach (1a):

$$dL = k \int\limits_{\zeta=0}^{\zeta=2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\vartheta=\Theta} \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\zeta \quad ,$$

wenn wir mit ζ den Winkel bezeichnen, der das Azimut einer um die Normale auf df gedrehten Ebene mißt. Also ist

(1c) $$dL = \pi k \, df \sin^2\Theta \quad .$$

Die Lichtdichte oder Beleuchtungsstärke. Die eine Fläche durchsetzende Lichtmenge, auf die Flächeneinheit reduziert, kann die Lichtdichte genannt werden und heißt insbesondere bei beleuchteten Flächen die Beleuchtungsstärke. Es ist also die Lichtdichte an einer Stelle einer von Büscheln mit dem räumlichen Öffnungswinkel $d\omega$ durchsetzten Fläche

(2) $$dB = \cos\vartheta \, k \, d\omega \quad ,$$

und wenn die Fläche von Büscheln mit endlichem Öffnungswinkel durchsetzt wird,

(2a) $$B = \iint \cos\vartheta \, k \, d\omega \quad ,$$

endlich, wenn die Achse der Büschel mit der Normalen zusammenfällt, ihr Querschnitt kreisförmig, und k innerhalb ihrer Öffnung konstant ist:

(2b) $$B = \pi k \sin^2\Theta \quad .$$

B. Die unmittelbare Lichtstrahlung
(in einem völlig durchsichtigen Medium).

a) Die Leuchtkraft. Betrachten wir zwei in demselben Medium liegende Flächen, deren Konturen eine endliche Lichtröhre bestimmen. Wir verfolgen eine elementare Lichtröhre, die aus den beiden Flächen zwei beliebige Elemente, df und df', herausschneidet, die um die Länge r von einander entfernt sein und gegen ihre Verbindungslinie die Winkel ϑ und ϑ' bilden mögen. Wir fassen die Strahlen der Röhre einmal in Büschel, die ihre Spitzen in df und df' als Basis, das andere Mal in Büschel zusammen, die ihre Spitzen in df' und df zur Basis haben. Die ersteren besitzen den räumlichen Öffnungswinkel $d\omega = \frac{df' \cos\vartheta'}{r^2}$, die letzteren $d\omega' = \frac{df \cos\vartheta}{r^2}$. Nun ist die von der Elementarröhre geführte Lichtmenge bei df:

$$dL = df \cos\vartheta \, k \, d\omega \quad ;$$

bei df':

$$dL' = df' \cos\vartheta' \, k' \, d\omega'$$

und aus der Anwendung unseres Grundsatzes

$$dL = dL'$$

folgt:

(3) $$k = k' \quad .$$

Da man diese Betrachtung auf zwei beliebige Elemente der beiden Flächen anwenden kann, so folgt: Auf zwei von einer beliebigen geradstrahligen Lichtröhre durchsetzten Flächen trifft jede sie verbindende Gerade Stellen, an denen in der Richtung der Verbindungslinie gleiche Leuchtkraft vorhanden ist.

b) Die Beleuchtungsstärke. Ist k an einer Stelle einer der beiden Flächen von der Richtung unabhängig, und erscheint die andere Fläche von dort aus wie durch einen Kreiskegel ausgeschnitten, der zur Normalen der ersten Fläche symmetrisch liegt und den halben Kegelwinkel Θ besitzt, so ist die Lichtdichte oder Beleuchtungsstärke an jener Stelle

$$\pi k \sin^2 \Theta \tag{4}$$

und kann durch Nähern und durch Vergrößern der zweiten Fläche gesteigert werden. Ihr Maximalwert πk wird z. B. erreicht, wenn beide Flächen zusammenfallen.

C. *Die Lichtstrahlung durch optische Systeme*[1].

a) Die Leuchtkraft. Seien die beiden betrachteten Flächen, die wir als Schnittflächen einer endlichen Lichtröhre voraussetzen, durch ein beliebiges optisches System getrennt, über das wir ebenso wie auf p. 155 gar keine besonderen Annahmen machen. Die erste Fläche liege in einem Medium mit dem Index n, die zweite in einem Medium n'. Die Konturen beider Flächen bestimmen wieder eine Lichtröhre, in der die beide Flächen durchsetzende Strahlung stattfindet. Eine beliebige Elementarröhre schneidet aus den beiden Flächen zwei Elemente df und df' heraus und durchsetzt diese Elemente in Richtungen, die in bezug auf das Instrument einander entsprechen, also z. B. durch den Satz vom kürzesten Lichtwege bestimmt sind; und die mit den Normalen der Elemente die Winkel ϑ und ϑ' einschließen mögen. Sei der Öffnungswinkel eines durch einen Punkt von df gehenden Büschels, das in der zweiten Fläche gerade df' herausschneidet, $d\omega$, der entsprechende $d\omega'$. Dann ist wieder

$$dL = df \cos\vartheta\, k\, d\omega \quad ; \qquad dL' = df' \cos\vartheta'\, k'\, d\omega' \quad .$$

Nun gilt aber nach dem STRAUBELschen Satze von p. 161 gerade für die so bestimmten Öffnungswinkel und Flächenelemente:

$$n^2 \cos\vartheta\, d\omega\, df = n'^2 \cos\vartheta'\, d\omega'\, df' \quad ;$$

also ist

$$k : k' = n^2 : n'^2 \quad . \tag{5}$$

Wendet man wieder dieselbe Betrachtung auf zwei beliebige Elemente der beiden Flächen an, so erhält man den Satz:

Ein beliebiger durch ein optisches System verfolgter Strahl trifft zwei beliebige Flächen in Stellen, die in der dort von ihm eingeschlagenen Richtung gleiche Leuchtkraft besitzen, oder, wenn die Stellen in verschiedenen Medien liegen, eine Leuchtkraft, die sich mit dem Quadrate des Brechungsverhältnisses ändert. Oder: Längs eines durch eine beliebige Reihe brechender Medien verfolgten Strahles ändert sich die Leuchtkraft nur im Verhältnis der Quadrate der Brechungsindizes.

Die Verluste durch Absorption und Reflexion.

Die Gleichung $dL = dL'$ hat zur Voraussetzung, daß innerhalb eines Mediums keine Absorption stattfindet, daß die Medien völlig durchsichtig sind. Die obige Art ihrer Anwendung hat ferner zur Voraussetzung, daß die Lichtröhre, die, von df ausgehend, df' einschließt, sich unterwegs nicht teilt; daß an der Grenzfläche zweier Medien entweder keine Reflexion oder keine Brechung stattfindet. In Wirklichkeit spielt bei den meisten optischen Instrumenten der Absorptionsverlust eine sehr geringe Rolle. Literaturübersichten s. bei H. KRÜSS[2]: Über den Lichtverlust in sogenannten durchsichtigen Körpern, und (bis auf die neueste Zeit) bei H. A. KRÜSS[3], Die Durchlässigkeit einer Anzahl Jenaer optischer Gläser u. s. w. Vgl. auch A. PFLÜGER, Phys. Ztschr. und WIED. Ann. 1903. Der Verlust durch Reflexion an brechenden

[1] R. STRAUBEL, Phys. Ztschr. **4.** 115. 1902. — [2] H. KRÜSS, Abhandl. d. Naturw. Vereins in Hamburg **11.** 1. 1889, abgedruckt in Zentralztg. f. Opt. u. Mech. **11.** 1890. — [3] H. A. KRÜSS, Jenaer Inaug.-Diss. 1903 und Ztschr. f. Instrumentenk. 1903.

Flächen wird nach den FRESNELschen Formeln[1] berechnet. Für wichtige Sonderfälle sind u. a. Rechnungen über beide Verlustquellen von H. KRÜSS[2] und M. v. ROHR[3] angestellt worden. Für den Reflexionsverlust ergibt sich, daß man sich, wenn die Einfallswinkel der Strahlen nicht außergewöhnlich groß sind (Mikroskopobjektive) auf die Berechnung des Verlustes paraxialer Strahlen beschränken kann; da sich für eine jede an Luft grenzende Fläche bei senkrechter Inzidenz der Reflexionsverlust $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$ ergibt, so erhält man also rund einen Verlust von 4—5% für jede freie Fläche. Diese Verluste haben zur Folge, daß in Wirklichkeit, wenn wir k als die Leuchtkraft der ursprünglichen Fläche annehmen, stets

(5 a) $$k' < \frac{n'^2}{n^2} k$$

sein wird. Meist wird man natürlich bestrebt sein, diese Verluste möglichst klein zu halten.

Die oben angestellte Betrachtung und die Anwendbarkeit des geometrischen Hilfssatzes von STRAUBEL versagen in dem Falle, daß die von den Punkten eines Elements ausgehenden Büschel an der Stelle des anderen einen Querschnitt besitzen, der von höherer Ordnung unendlich klein ist als die Büschelöffnung; d. h. im Falle der Abbildung der Punkte des einen Elements auf das andere. In diesem Falle bestimmen die Elemente df und df' nicht die Breite einer durch beide gehenden Lichtröhre an anderen Stellen; wir können den Öffnungswinkel $d\omega$ beliebig wählen, soweit noch eine Abbildung stattfindet, aber dann ist $d\omega'$ bestimmt; denn dieser ist jetzt der von den konjugierten Strahlen gebildete Winkel. Die Lichtmengen, die durch die beiden Elemente hindurchgehen, sind natürlich wie früher

$$dL = df \cos\vartheta\, k\, d\omega \quad ; \qquad dL' = df' \cos\vartheta'\, k'\, d\omega' \quad .$$

Nun ist aber nach dem Satze von CLAUSIUS, p. 162, in diesem Falle

$$n^2 \cos\vartheta\, k\, d\omega\, df = n'^2 \cos\vartheta'\, k'\, d\omega'\, df' \quad ,$$

also wie oben

(6) $$k : k' = n^2 : n'^2 \quad .$$

Der oben ausgesprochene Satz erleidet also auch hier keine Ausnahme.

Denselben Beweis haben wir unter etwas anders gefaßter Voraussetzung schon auf p. 131 geführt[4]. — Mit Berücksichtigung der oben erwähnten Verlustfaktoren gilt auch für den Fall der konjugierten Elemente:

(6a) $$k' < k\,\frac{n'^2}{n^2} \quad .$$

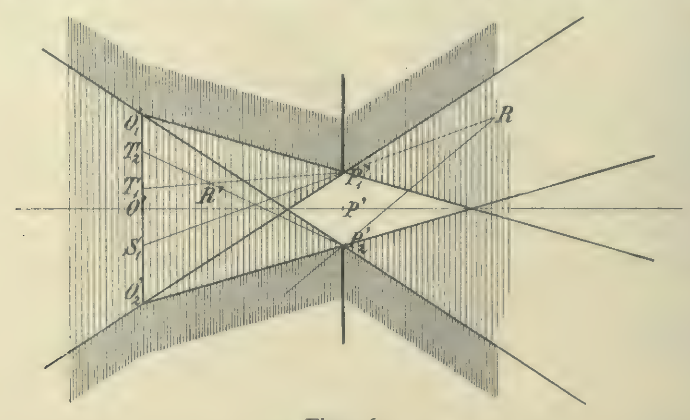
b) Die durch optische Instrumente hervorgebrachte Lichtdichte oder Beleuchtungsstärke. Die Kondensoren. Die Beleuchtungsstärke hängt nun, da k' durch die Formeln (5) und (6) oder (5a) und (6a) festgestellt ist, lediglich von der Öffnung und der Richtung der auf die betrachtete Schnittfläche fallenden Büschel ab. Will man die Beleuchtungsstärke an einer Stelle möglichst steigern, so kann man dies bei gegebener Lichtquelle nur durch möglichst weit geöffnete, mit der Achse senkrecht auf die Fläche fallende Büschel erreichen, also auf dieselbe Weise und mit höchstens dem gleichen Erfolge, wie bei direkter Strahlung in demselben Medium, wenn man nur die Lichtquelle dem Orte der Wirkung so weit nähern kann (oder in manchen Fällen: wenn man die Lichtquelle so weit vergrößern kann), daß am Orte der Wirkung derselbe Raumwinkel der einfallenden Büschel erreicht wird.

Nur die praktische Unmöglichkeit solcher Annäherung (oder Vergrößerung) begründet daher die Anwendung von optischen Systemen zur Erhöhung der Beleuchtungsstärke.

[1] E. VERDET-EXNER, Vorles. üb. die Wellentheorie des Lichtes. Braunschweig 1881 u. 1884. p. 340—354. — [2] H. KRÜSS, l. s. c. und Ztschr. f. Instrumentenk. **5**. 185. 1885; Photogr Rundschau 1901. p. 154. — [3] M. v. ROHR, Ztschr. f. Instrumentenk. **18**. 173. 1898. — [4] Die dort irrtümlich hinzugesetzten Worte: „also unabhängig von ϑ" sind zu streichen.

„Alle Vorrichtungen zur Verstärkung einer Beleuchtung, zur sogen. Lichtkonzentration, können daher niemals einen anderen Zweck haben — wenigstens niemals einen anderen wirklich erfüllen — als den: mit Hilfe einer gegebenen Lichtquelle von beschränkten Dimensionen oder an einem entfernten Orte dennoch eine solche Wirkung zu erzielen, wie sie direkt nur durch eine sonst gleichartige, aber von anderer Ausdehnung oder in anderer Lage erreichbar wäre"[1]. Nur in dem Falle, daß das Licht der zu beleuchtenden Fläche in einem anderen Medium als Luft zugeführt wird — wie dies z. B. bei den sogen. Immersionskondensoren der Mikroskope und im Auge der Fall ist — wird die Beleuchtungsstärke bei gleicher Winkelöffnung der Büschel im Verhältnis von $n^2:1$ gesteigert.

Beschränken wir uns nun wieder auf zentrierte Systeme, welche die auf p. 212 definierte „dioptrische Vollkommenheit" besitzen, so gestattet uns, da wir nun



Figur 67.
Zur Lichtdichte im Bildraum.
Die Konstruktion des durch einen Punkt des Bildraumes gehenden Büschels. $O_1' O_2'$ das Bild der Lichtquelle oder die A.-L.; $P_1' P_2'$ die A.-P. In dem weiß gebliebenen Raume werden die Büschel durch die A.-L. bestimmt; in dem breit gestrichelten auch durch die A.-P. oder allein durch die A.-P.; der dunkel gestrichelte Raumteil erhält überhaupt kein Licht. (Die Linie RP_2' ist durch eine Linie RO_2' zu ersetzen.)

den nicht geometrischen Faktor der Lichtmenge kennen, die Theorie der Strahlenbegrenzung, die Lichtdichte an jeder Stelle des Bildraumes eines solchen Instruments zu berechnen; denn sie liefert uns die Konstruktion des durch einen beliebigen Punkt des Bildraumes gehenden Büschels. Dieses Büschel haben wir bisher immer als durch die A.-P. bestimmt oder wenigstens mitbestimmt angenommen, indem wir uns auf den Ort des Bildes beschränkten, der bei den meisten Instrumenten nur in geringem Maße veränderlich ist. Da die Helligkeit aber im ganzen Bildraume von Interesse ist, so wollen wir hier das Büschel durch einen ganz beliebigen Punkt des Raumes betrachten, wobei wir etwa ein allseitig leuchtendes, beliebig großes Objekt, eine E.-P. und eine E.-L. voraussetzen. Statt dessen können wir offenbar auch ein begrenztes Objekt am Orte jener E.-L. annehmen, dessen Strahlung durch die E.-P. gegeben ist. Dann gehört im Bildraume zu jedem Punkte R oder R' ein Strahlenkegel, der der gemeinsame Teil der beiden Kegel ist, die man durch Verbindung von R mit dem Rande der A.-P. und dem Rande der A.-L. (oder statt letzterer dem Rande des begrenzten Bildes) erhält (vgl. Figur 67).

[1] E. Abbe, l. c. p. 277.

Offenbar spielen bei dieser Betrachtung die A.-P. und A.-L. dieselbe Rolle: sie sind vertauschbar. Nehmen wir nicht nur zwei, sondern wie früher auf p. 216 mehr gleichzeitig wirksame Blenden an, so ergibt sich die einfache Lösung der Aufgabe nach Analogie.

Die größte Beleuchtungsstärke ist offenbar in dem Achsenpunkte einer achsensenkrechten Fläche vorhanden, in der Nähe des Schnittpunktes von $O_1'P_2'$ mit $O_2'P_1'$. Die durchschnittliche Beleuchtungsstärke in der A.-P. wird größer sein wie in der A.-L., wenn die erste, wie in der Figur, kleiner ist, und umgekehrt — was sich nach unseren Voraussetzungen von selbst versteht. An welche Stelle des erhaltenen Raumes man eine zu beleuchtende Fläche bringt, wird u. a. von deren Größe abhängen. Bild und A.-P. besitzen an sich keine Vorzüge vor einander, die die Wahl bestimmen, jedoch beide vor anderen Ebenen den Vorzug, daß die in ihren Punkten vereinigten Büschel nur durch eine Blende begrenzt werden, während an anderen Stellen die auf p. 215 besprochene Vignettierung des Randes auftritt. Vgl. auch den später folgenden Abschnitt über Beleuchtungsvorrichtungen.

Ist k' an der betrachteten Stelle von der Richtung unabhängig, so ist die Beleuchtungsstärke z. B. im Achsenpunkte der Bildebene, O', nach (2b) und (6)

$$B' = \pi \frac{n'^2}{n^2} k \sin^2 U' \quad ,$$

wenn k die Leuchtkraft des Objekts und U' den halben Öffnungswinkel im Bilde bedeutet; oder, für $n = 1$, und da wir

$$n' \sin U' = a'$$

gesetzt haben (bildseitige numerische Apertur nach Abbe)

$$B' = \pi a'^2 k \quad , \tag{7}$$

und da nach dem Sinussatze

$$a' = \frac{a}{\beta}$$

ist ($a = n \sin U$), so ist

$$B' = \frac{\pi a^2}{\beta^2} k \quad . \tag{8}$$

Die Lichtdichte der die Abbildung bewirkenden Lichtröhre ist im Objekt

$$B = \pi k a^2 \quad ; \qquad B : B' = \beta^2 \quad .$$

Also ist das Verhältnis der Lichtdichte oder Beleuchtungsstärke im Achsenpunkte von Objekt und Bild unabhängig von der Blendenlage gleich dem Quadrate der Vergrößerung, eine nach unserer Voraussetzung des Sinussatzes (d. h. keiner Streuung der Strahlung zwischen den Elementen auf der Achse) selbstverständliche Folgerung aus der Konstanz der Lichtmenge.

Andere Darstellungsweisen.

Die beiden Flächen, die wir im vorhergehenden stets als von derselben Lichtröhre durchsetzt angenommen haben, können, wie erwähnt, die ursprünglich leuchtende und die schließlich beleuchtete sein; oder es kann z. B. die zweite Fläche eine nicht physisch vorhandene, gedachte Fläche sein. Eine solche kann dazu dienen, die Lichtwirkung der ursprünglichen leuchtenden Fläche zu ersetzen, wenn man sie Punkt für Punkt in den Richtungen Strahlen aussendend denkt, in denen sie in Wirklichkeit von den Strahlen der ursprünglichen Lichtquelle durchsetzt wird und wenn man ihre Elemente in jeder Richtung mit derjenigen Leuchtkraft strahlend annimmt, die an der Stelle dieser Elemente die Leuchtkraft (d. i. die Lichtmenge pro Flächen- und Winkeleinheit) der von der eigentlichen Lichtquelle ausgehenden diese Elemente in der betreffenden Richtung durchsetzenden Elementarröhre ist. Die zweite Fläche

kann daher als „äquivalente Lichtverteilung“ (LAMBERT[1]) für die erste eintreten, wenn man, kurz ausgedrückt, sie in denselben Richtungen und in jeder einzelnen Richtung mit derselben Leuchtkraft strahlend denkt, in denen und mit der sie von der ersten Fläche beleuchtet wird.

Eine andere Deutung der von uns rein formal als Schnittflächen der Lichtröhre angenommenen Flächen hat den ersten Arbeiten über diesen Gegenstand zugrunde gelegen. Man kann sie auch als einander zustrahlende Oberflächen auffassen, in der Weise und mit den besonderen Einschränkungen, wie wir auf p. 130 kurz auseinandergesetzt haben (vollkommene Schwärze, Abschluß des Systems nach außen). Dann wird der von uns vorausgesetzte Satz von der Konstanz der Lichtmenge eine Folge des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie.

Die Ableitung der Gleichungen für die Leuchtkraft.

Für diesen besonderen Fall ist die obige Gleichung (5) zuerst von KIRCHHOFF[2] abgeleitet, der Fall der konjugierten Elemente (im obigen Gleichung (6)) zuerst von CLAUSIUS[3] behandelt worden. ABBE[4] ging nicht von solchen Betrachtungen aus, sondern von den wirklichen physikalischen Veränderungen der Lichtwellen an brechenden und spiegelnden Flächen, „die sich nachträglich wieder in die Sprache der Strahlungshypothese umsetzen lassen“ und so ebenfalls auf die Gleichungen (5) und (6) (oder, wenn man will, auf strengere Bestimmungen der Leuchtkraft) führen. In der fast gleichzeitigen Abhandlung von HELMHOLTZ[5], ist die Gleichung (6) streng nur für paraxiale Strahlen bewiesen (und aus ihr der Sinussatz abgeleitet, wogegen STRAUBEL Einwand erhoben hat; vgl. das auf p. 131 Gesagte[6]). Übrigens waren diese Beziehungen [(5) und (6)] implizite schon in den Sätzen über die Helligkeit reziproker Bilder enthalten, die HELMHOLTZ bereits in den ersten Lieferungen der Physiologischen Optik[7] mitteilte (1856) (vgl. Satz III, p. 170 der ersten Auflage, der für den paraxialen Raum zentrierter Systeme eine Umkehrung der obigen Sätze darstellt, die zu den Gleichungen (5) und (6) führen). Auf anderem Wege gelangte u. a. BLONDEL[8] zu der Gleichung (5); LUMMER[9] lieferte eine einfache Veranschaulichung ihres Inhalts.

Die oben gegebene kürzeste Ableitung dieser Gleichung rührt von R. STRAUBEL[10] her.

Die Ableitung der Lichtwirkungen der optischen Instrumente

fällt, wie wir sehen werden, nach vollzogener Ableitung der Gleichungen (5) und (6) fast zusammen mit der Theorie der Strahlenbegrenzung. Sie wurde wie jene zuerst von ABBE in der genannten Abhandlung (1871) entwickelt. Er bediente sich der Konstruktion der äquivalenten Lichtverteilung (s. o.) und faßte seine Ergebnisse in drei anschaulichen Sätzen zusammen (deren Inhalt natürlich mit den unseren identisch ist), indem er einmal das Bild der Lichtquelle, sodann die A.-P. als äquivalente Leuchtfläche einführte. HELMHOLTZ hatte ähnliche Hilfsmittel zum Teil bereits in der Physiologischen Optik (1856) benutzt, wo er die Helligkeit der mit dem Augenspiegel erhaltenen Bilder diskutierte (p. 173 ff.). Ebendort finden sich auch die Definitionen der subjektiven Helligkeit von Flächen und von Punkten und ihre Abhängigkeit von der benutzten Pupillenöffnung, auf die wir unten noch eingehen werden. Die Beziehung zu der Vergrößerung eines optischen Instruments findet sich in der zweiten Abhandlung ABBEs und in der oben genannten Arbeit von HELMHOLTZ (1874).

Eine „elementare Darstellung der Helligkeit optischer Instrumente“ lieferte H. KRÜSS.[11]

D. Folgerungen für einige Sonderfälle.

α) Die Beleuchtungsstärke projizierter Bilder.

Sind bei diesen die bildseitigen Büschel eng genug (Vergrößerungen, Mikrophotographie), so daß man sin und tang vertauschen kann, so ist mit den Bezeichnungen von p. 234

---

[1] LAMBERT, Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae, 1760, deutsch von E. ANDING in OSTWALDs Klassikern Nr. 31—33, Leipzig 1892, vgl. Nr. 31, p. 38. — [2] G. KIRCHHOFF, zit. a. p. 161. — [3] R. CLAUSIUS, zit. a. p. 161. — [4] E. ABBE, Jenaische Ztschr. f. Med. u. Naturw. **6.** 263. 1871; M. SCHULTZEs Archiv f. mikrosk. Anat. **9.** 26. 1873. — [5] H. HELMHOLTZ, POGG. Ann. Jubelbd. p. 557. 1874. — [6] Die dort irrtümlich hinzugefügten Worte: „Also unabhängig von ϑ“ sind zu streichen. — [7] H. HELMHOLTZ, Handb. d. physiol. Optik. Leipzig 1860—68; auch Wissenschaftl. Abhandl. **2.** 142. Es ist hier der Ort, einen auf p. 162 begangenen Irrtum zu berichtigen. Die dort erwähnte CLAUSIUSsche Gleichung ist nicht älter wie die HELMHOLTZ-LAGRANGEsche. Die betreffenden Teile der physiol. Optik erschienen nicht nur vor der CLAUSIUSschen, sondern sogar vor der KIRCHHOFFschen Abhandlung. — [8] M. A. BLONDEL, Théorie des projecteurs, Paris 1894; Compt. rend. de l'Assoc. Franç. pour l'Avanc. des Sciences 1899, p. 316. — [9] O. LUMMER in MÜLLER-POUILLETs Lehrbuch der Physik **2.** 680. Braunschweig 1897. — [10] R. STRAUBEL, Phys. Ztschr. **4.** 115. 1902. — [11] H. KRÜSS, Deutsche Mech.-Ztg. 1902. p. 245 u. 254.

(9) $$B = \pi k \cdot \frac{p'^2}{[\xi_0']^2} \quad .$$

Andererseits gilt für Systeme, die mit engen objektseitigen Büscheln arbeiten, z. B. photographische bei den gewöhnlichen Aufnahmen, nach Gleich. (6), p. 235

(10) $$B' = \pi k \left(\frac{p}{f}\right)^2 \left(1 + \frac{X}{[\xi_0]}\right)^2 \quad \text{oder} \quad = \pi k \left(\frac{p}{M}\right)^2$$

und, wenn Gleichung (6a), p. 235, gilt:

(10a) $$B' = \pi k \left(\frac{p}{f}\right)^2 \quad .$$

Daher wird die Lichtstärke photographischer Objektive durch die relative Öffnung

$$\frac{p}{f}$$

gemessen. Über die Wirkung auf photographische Platten vgl. p. 247.

Die Abnahme der Beleuchtungsstärke nach dem Rande einer (achsensenkrechten) Ebene zu, z. B. der Bildebene, ist aus der Figur 67 direkt einleuchtend. Die Beleuchtungsstärke ergibt sich bei kleinem Öffnungswinkel, wenn wir die Formel (2) anwenden dürfen, für die Bildebene proportional der vierten Potenz des Kosinus des bildseitigen Gesichtsfeldwinkels; denn $d\omega$ ist hier der räumliche Öffnungswinkel, unter dem die Pupille erscheint, und der dritten Potenz jenes Kosinus proportional. Maßregeln zur Abhilfe s. a. p. 304.

β) Die scheinbare Helligkeit.

Unsere Theorie ist für den wichtigsten besonderen Fall noch etwas weiter auszuführen. Dieser betrifft das Auge als optisches Instrument.

Das empfindende Organ des Auges besteht aus einzelnen, getrennten Elementen. Wir verstehen unter Helligkeit den Licht*reiz*, definiert durch die Lichtmenge, die diesen Elementen zugeführt wird. Um die *Empfindung*, ihre Art der Abhängigkeit vom Reize und von der getroffenen Stelle der Netzhaut, brauchen wir uns hier nicht zu kümmern.

Die Flächenhelligkeit. Es erscheine nun eine leuchtende Fläche groß genug, um eine größere Anzahl der lichtempfindlichen Elemente zu bedecken. Das betrachtete Flächenstück kann dabei klein genug sein, um die Variation der Lichtdichte in dem Netzhautbilde dieses Stückes zu vernachlässigen. Dann kann man als Maß der Reizung statt der Reizung eines Elements oder der auf ein Element fallenden Lichtmenge, indem man überall gleiche Dichte dieser Elemente voraussetzt, die ihr proportionale, auf die Flächeneinheit entfallende Lichtmenge ansehen, d. h. die Beleuchtungsstärke der Netzhaut in der Umgebung der betrachteten Stelle.

Da der im Auge verlaufende Strahlenkegel nur von der Lage und Größe der Pupille (genauer der A.-P.) des Auges abhängt, so kann die Helligkeit irgend eines kleinen Flächenstückes nur noch von der Leuchtkraft in seinem Netzhautbilde, also nach Gleichung (6) nur von der Leuchtkraft des Objekts in der Richtung der von ihm in das Auge gelangenden Strahlen abhängen. Wofern die Pupille also nach Lage und Größe unverändert bleibt, so wird eine Fläche, deren Leuchtkraft vom Ausgangswinkel der Strahlen unabhängig ist, in jeder Entfernung gleich hell erscheinen.

In den verschiedenen Teilen der lichtstrahlenden Fläche kann, ohne daß obige Betrachtung ihre Geltung verliert, k beliebig verschiedene Werte besitzen; nur muß es für jede Stelle der Fläche konstanten Wert haben innerhalb derjenigen Sehwinkel, unter denen die Pupille des Beobachters von der Fläche aus

in den verschiedenen Entfernungen erscheint. Diese Voraussetzung wird im allgemeinen auch bei nicht selbstleuchtenden Flächen erfüllt sein, so daß obiger Satz eine ziemlich weitgehende Gültigkeit besitzt. Vorausgesetzt ist bei seiner Ableitung ferner, daß die Pupillenöffnung bei Betrachtung der Fläche in der Nähe dieselbe sei, als wenn dieselbe fern ist, und es ist die Absorption des Lichtes durch das zwischen Fläche und Auge befindliche Medium vernachlässigt.

Ist k überhaupt vom Winkel unabhängig, so wird eine solche Fläche auch in jeder Orientierung gleich hell erscheinen.

Bei verschiedener Pupillenöffnung ist die Helligkeit nach der Gleichung (10), da wir das Auge mit genügender Genauigkeit als zentriertes System auffassen können, dem Quadrate des Radius der Pupille proportional, wenn das Objekt innerhalb des Winkelraumes der Pupille konstante Leuchtkraft besitzt.

Die Helligkeit von Punkten. Erscheint die leuchtende Fläche aber unter einem so kleinen Gesichtswinkel, daß nur ein Netzhautelement gereizt wird, so ist die Reizung dieses Elements nicht mehr, wie früher, der auf die Flächeneinheit bezogenen Lichtmenge proportional, die Beleuchtungsstärke ist nicht mehr ein Maß der Helligkeit, sondern man muß bei der ursprünglichen Definition stehen bleiben und die Helligkeit der auf jenes Element, d. i. der gesamten ins Auge fallenden Lichtmenge proportional setzen.

Die beiden Helligkeitsmaße sind offenbar unter einander nicht vergleichbar, was sich in der Verschiedenheit der Dimensionen äußert. Sie werden vergleichbar, wenn man beidemal die Helligkeit gleich (nicht nur proportional) der auf das Element fallenden Lichtmenge, also die Flächenhelligkeit gleich dem Produkt aus der Beleuchtungsstärke und der Größe des Netzhautelements setzt.

Die Helligkeit eines unter so kleinem Sehwinkel erscheinenden Gegenstandes ist also gleich der Lichtmenge, die von ihm ins Auge gelangt, und wenn wir diese Lichtmenge z. B. in der Pupillenfläche messen (oder nach (1c) in der Netzhautfläche), ergibt sie sich umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung des Gegenstandes vom Auge, und dem Quadrate des Radius der Pupille direkt proportional.

γ) Die Flächenhelligkeit beim Sehen durch optische Instrumente.

Ist die Leuchtkraft des Objekts vom Ausgangswinkel unabhängig, so ist die Beleuchtungsstärke auf der Netzhaut, also die Helligkeit der Objektfläche, beim Sehen durch irgend ein Instrument höchstens die gleiche wie beim Sehen mit dem Auge allein. Denn die Leuchtkraft eines durch optische Systeme erzeugten Bildes ist nach (6a) höchstens gleich der des Gegenstandes; und die Öffnung der Büschel, die beim Sehen mit dem unbewaffneten Auge durch die Pupille gegeben ist, kann durch das Instrument nur herabgesetzt werden. Ist nämlich p', der Halbmesser der A.-P. des Instruments, die wir mit der Pupille des Auges dem Orte nach zusammenfallend denken, größer als p_0, der Halbmesser der Augenpupille, so blendet diese doch den übrig bleibenden Teil der A.-P. ab und wirkt selbst als A.-P. Ist p' kleiner, so wird die Helligkeit in dem oben abgeleiteten Verhältnis herabgesetzt, es ist also

$$\frac{H}{H_0} = \frac{p'^2}{p_0^2} \quad .$$

Liegt die A.-P. des Instruments nicht an der Stelle der Augenpupille, so kann man doch an dieser Stelle sich sofort eine Blende angeben, die ein axiales Büschel in demselben Grade beschränkt, und wir betrachten, wie oben erwähnt, die Helligkeit nur im Achsenpunkte des Auges und des Instruments.

Bei den nach Art des Mikroskops wirkenden Systemen fanden wir auf p. 234 für den Halbmesser der A.-P., p',

$$p' = \frac{a}{V} \quad ,$$

wo $a = n \cdot \sin u$ die Apertur des in das System eintretenden Büschels, V das Vergrößerungsvermögen bezeichnet und $n' = 1$ angenommen ist. Also

(10) $$H = H_0 \frac{a^2}{V^2 p_0^2} = H_0 \frac{a^2 l^2}{N^2 p_0^2} \quad ,$$

wenn N die lineare auf die Entfernung l bezogene Vergrößerung des Systems ist.

Die „Normalvergrößerung" V_0 bezw. N_0, bei welcher das Bild in gleicher Helligkeit erscheint, wie das Objekt dem bloßen Auge (natürlich in Luft) erscheinen würde, ist hiernach

(11) $$V_0 = \frac{a}{p_0} \quad \text{bezw.} \quad N_0 = \frac{a \cdot l}{p_0} \quad .$$

Bei derselben Apertur a ist unter verschiedener Vergrößerung

(12) $$H : H_0 = V_0^2 : V^2 = N_0^2 : N_0^2 \quad ,$$

solange $V > V_0$ bezw. $N > N_0$; hingegen ist

(12a) $$H = H_0 \, , \text{ wenn } V \leqq V_0 \text{ bezw. } N \leqq N_0 \quad .$$

Die Helligkeit des Bildes im Mikroskop ist also höchstens gleich der des Sehens mit bloßem Auge, und zwar dann, wenn die Vergrößerung gleich oder kleiner als die Normalvergrößerung ist.

Die Helligkeit des Bildes im Mikroskop ist bei ungeänderter Apertur umgekehrt proportional der Flächenvergrößerung, solange diese größer als die Normalvergrößerung ist[1].

Bei gegebener Vergrößerung ist die Helligkeit des Bildes proportional dem Quadrate der Apertur der einfallenden Büschel.

Man erhält hiernach folgende zusammengehörige Werte der Apertur der (konventionellen) Vergrößerung und Helligkeit, wenn man den Radius der Augenpupille $p_0 = 1{,}5$ mm annimmt

	$H = H_0$	$H = \frac{1}{4} H_0$	$H = \frac{1}{9} H_0$	$H = \frac{1}{16} H_0$
$a = 0{,}5$	83,3	166,7	250,0	333,3
1,0	166,7	333,3	500,0	666,7
1,5	250,0	500,0	750,0	1000,0

Die Vergrößerungszahlen der dritten Spalte ($H = \frac{1}{9} H_0$, also $p = 0{,}5$ mm) kann man, wie wir später sehen werden, sehr annähernd als diejenigen der unverminderten Deutlichkeit des Bildes bezeichnen; sie sind beim Mikroskop, wo künstliche Beleuchtung anwendbar ist, von weit größerer Bedeutung als diejenigen der unverminderten Objekthelligkeit.

Bei teleskopischen Systemen fanden wir (p. 234) die angulare Vergrößerung gleich dem Reziproken der linearen Vergrößerung in den Pupillen

$$\Gamma = \frac{p}{p'} \qquad \text{also} \qquad p' = \frac{p}{\Gamma} \quad .$$

Daher ist hier

(13) $$H = H_0 \frac{p^2}{p_0^2} \frac{1}{\Gamma^2} \quad ,$$

d. h. es spielt hier die lineare Öffnung p genau dieselbe Rolle wie bei mikroskopischen Systemen die numerische Apertur a. Die Normalvergrößerung Γ_0 ist $= p/p_0$. Somit kommen bei unverminderter Helligkeit des Bildes auf je 3 mm, behufs Einhaltung normaler Deutlichkeit auf je 0,5 mm Öffnung eine Vergrößerungsziffer.

Wir können daher das allgemeine Resultat dieser Betrachtung dahin aus-

[1] E. ABBE, SCHULTZEs Arch. f. mikr. Anat. 9. 438. 1873. H. HELMHOLTZ, l. c., p. 567.

sprechen: Insoweit flächenhaft ausgedehnte Objekte in Frage stehen, ist die Leistung optischer Instrumente — von welcher Konstruktion und welchen Anwendungsgebietes auch dieselben sein mögen — darauf gerichtet und zugleich beschränkt, die Objekte dem Auge im Bilde unter vergrößertem Sehwinkel darzubieten, aber in höchstens der gleichen Helligkeit.

δ) Die Helligkeit von Punkten beim Sehen durch optische Instrumente.

Wird aber das System zur Beobachtung von Sternen benützt, welche wegen ihrer großen Entfernung sich auch bei der von dem Teleskop gelieferten Vergrößerung wie leuchtende Punkte darstellen, so tritt für diese der andere Begriff der Helligkeit in Kraft, wonach dieselbe der gesamten zum Bildpunkte übergeführten Lichtmenge proportional ist. Solange also die Vergrößerung Γ des Teleskops kleiner ist als die Normalvergrößerung Γ_0 — die A.-P. größer als die Augenpupille — reduziert sich die wirksame (Halb-) Öffnung des Systems auf $\Gamma \cdot p_0$, und die Helligkeit des Sternbildes im Teleskop ist Γ^2 mal größer als die des direkt gesehenen Sternes. Wenn die Vergrößerung den Wert Γ_0 oder einen größeren hat, so ist die Helligkeit im Bilde dauernd $(p/p_0)^2$ mal größer als mit freiem Auge. Man kann also, beide Fälle zusammenfassend, auch sagen, die Helligkeit des Sternbildes ist so viel mal so groß als die des direkt gesehenen Sternes, als das Quadrat der wirksamen Öffnung (p^2) des Systems das Quadrat der Öffnung der Augenpupille (p_0^2) enthält[1].

Da der Himmelsgrund, von welchem sich die beobachteten Sterne abheben, gemäß dem Obigen durch das Teleskop höchstens in gleicher Helligkeit erscheinen kann als mit bloßem Auge, so wird außer der absoluten Helligkeit des Sternbildes auch der Helligkeitsunterschied zwischen dem Stern und dem Untergrund mit wachsender Vergrößerung immer größer. Infolgedessen werden Sterne durch Teleskope proportional dem Quadrate ihrer wirksamen Öffnung sichtbarer gemacht. Da die Helligkeit des Himmelsgrundes bei weiterer (Über) Vergrößerung noch proportional dem Quadrate dieser abnimmt, die des Sternes aber hierbei konstant bleibt, so ist bei Übervergrößerung die Sichtbarkeit des Sternes noch vermehrt. Dies Verhältnis geht aber nicht ins Unbegrenzte weiter, da von einer gewissen Vergrößerung an das Sternbild — teils infolge der Aberrationsreste, teils unabhängig von solchen infolge der Beugung — flächenhaft ausgedehnt wird. —

Neuerdings hat dasselbe Prinzip durch H. SIEDENTOPF[2] auch am Mikroskop Anwendung gefunden, der unter der Grenze der Erkennbarkeit liegende Objekte beobachtete. Solche werden, so lange die von ihnen ausgehenden Beugungsscheibchen noch nicht größer erscheinen, als daß sie wesentlich ein Netzhautelement bedecken, proportional dem Quadrat der numerischen Apertur des Mikroskops sichtbarer gemacht.

Wenn die Leuchtkraft des Objekts nicht nach einfachen Regeln bestimmt ist, so lassen sich, wie schon bemerkt, auch keine weiteren Beziehungen als die früher angegebenen zwischen der Helligkeit des direkt gesehenen Objekts bezw. eines bei unveränderter Leuchtkraft bloß in seinen Dimensionen vergrößerten Bildes und der Helligkeit seines durch das Instrument beobachteten Bildes feststellen. Bei einer stetig von der Normalen an abnehmenden Strahlungsintensität des Objekts z. B. wird dieses dem bloßen Auge in senkrechter Richtung gesehen heller erscheinen müssen als durch das Instrument bei der Normalvergrößerung; denn im ersteren Falle sind die Strahlen der nach der Pupille gelangenden Büschel durchaus von der maximalen Intensität; in den nach der

---

[1] Hierbei ist vernachlässigt, daß sich in Wirklichkeit die Pupille bei Beobachtung des helleren Sternbildes zusammenzieht, beim Sehen mit bloßem Auge aber in dunkler Nacht eine viel größere Öffnung als 3 mm annimmt. — [2] H. SIEDENTOPF und R. ZSIGMONDY, DRUDES Ann. der Phys. **10.** 1903.

A.-P. des Instruments zielenden Büscheln aber ist das gesamte einfallende Büschel sozusagen noch einmal in verkleinertem Maßstabe reproduziert, d. h. es enthält neben den zentralen hellen Strahlen auch die peripheren mehr und mehr lichtschwachen. Infolgedessen ist die durch ein solches Büschel ausgestrahlte ins Auge gelangende Lichtmenge, und damit die Helligkeit des Bildes, auch bei der „Normalvergrößerung" kleiner als die des direkt gesehenen Objekts. Verglichen mit der Helligkeit des direkt, aber ganz schräg angesehenen Objekts wiederum würde sie größer sein, und so kann bei entsprechenden Strahlungsgesetzen und entsprechenden Umständen jedes beliebige Verhältnis zwischen beiden Helligkeiten statt haben.

ε) Die Wirkung auf die photographische Platte.

Lummer[1] hat darauf hingewiesen, daß hier infolge des Kornes der Platten dieselbe Unterscheidung wie bei der Netzhaut erforderlich ist. Hängt die Schwärzung von der auf die einzelnen Plattenelemente fallenden Lichtmenge ab, so ist bei ausgedehnteren leuchtenden Flächen die Schwärzung der Beleuchtungsstärke proportional und wird daher durch die Formeln von p. 243 gegeben. Bedeckt das Bild der Lichtquelle oder der hellste Teil seines Zerstreuungskreises nur ein Plattenelement (Sternaufnahmen), so wird die Schwärzung der gesamten auffallenden Lichtmenge proportional, wächst also mit dem Quadrate der E.-P. direkt und umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung der Lichtquelle. Lummer hat auch untersucht, wie weit man die Dimensionen eines gegebenen Objektivs vergrößern kann, ohne daß die Gültigkeit dieses „Punktgesetzes" aufhört.

4. Die Beugungserscheinungen.

Die Apertur der Systeme ist endlich noch maßgebend für die Beugungserscheinungen, die die Abbildung begleiten oder vielmehr, vom Standpunkte der Undulationstheorie, deren eigentliches Wesen ausmachen (p. 16).

Wenn das Objekt selbstleuchtend ist, also jeder seiner Punkte unabhängig von den benachbarten das Zentrum einer Wellenbewegung ist, so begrenzt die E.-P. bei nahen Objekten die angulare, bei unendlich entfernten die lineare Ausdehnung der in das System eintretenden, die A.-P. ebenso diejenige der zum Bilde übergeführten Wellenflächen. Die angulare Öffnung der letzteren aber bestimmt die Größe des Beugungsscheibchens, welches in der dem Objekt dioptrisch konjugierten Ebene nach den Gesetzen der Diffraktionstheorie an Stelle eines Bildpunktes entsteht. Auf diese Weise wird die Apertur, und zwar wie eine nähere Betrachtung lehrt, in dem von uns stets benutzten Maße als Produkt aus Brechungsexponent des Objektmediums und Sinus des halben Öffnungswinkels in diesem Medium, bestimmend für die Feinheit des „Korns", das auch bei der größten dioptrischen Vollkommenheit des Systems im Bilde stets vorhanden ist. Die Schärfe, in der sich die Konturen größerer Objekte abbilden und das Auseinandertreten, die sichtbare Scheidung sehr nahe benachbarter Objektelemente hängen also in diesem Falle unmittelbar und allein von der Apertur des Systems ab.

Wenn das Objekt nicht selbstleuchtend ist, sondern von einer anderen Lichtquelle beleuchtet oder durchleuchtet wird, so findet der angedeutete Abbildungsvorgang nur in bezug auf diese originäre Lichtquelle statt. Die Strahlen (Elementarwellen), die das Objekt von jedem Punkt der Lichtquelle erhält, stehen jedoch in diesem Falle mit einander in einer einfachen Phasenverknüpfung, die

[1] O. Lummer, Verh. d. phys. Ges. zu Berlin **14.** 24. 1895. In derselben Abhandlung hat Lummer auch das Gesetz der Wirkung leuchtender Linien auf die Netzhaut oder die Platte behandelt („Strichgesetz").

nur von der Neigung des Objekts gegen die Verbindungslinie mit der Lichtquelle abhängt, und das gleiche ist dann, gemäß der physischen Beschaffenheit des Objekts (seiner Absorptions- und Verzögerungswirkung) mit den von diesem ausgehenden reflektierten oder durchgelassenen Elementarwellen der Fall. Diese sind nach Richtung, Intensität und Phase anzusehen als der Beugungseffekt, den das Objekt jedem Punkt der Lichtquelle gegenüber ausübt. Die angulare Ausdehnung des Beugungseffektes wie seine ganze innere Beschaffenheit hängen hier in erster Linie von der Natur des in Frage stehenden Objekts ab. Die Apertur, d. h. die E.-P. nach Lage, Größe und Brechungsexponent des Objektmediums, ist dann bestimmend für den Umfang, in welchem dies am Objekt gebeugte Licht Zugang zum System und Bilde hat.

Eine nähere Analyse des hier in Frage stehenden Vorgangs zeigt, daß die Lichtverteilung in der dem Objekt dioptrisch konjugierten Ebene des Bildraums, das sogenannte Bild des Objekts, ganz und gar bestimmt ist durch die geometrische wie physische Beschaffenheit des in das System eingelassenen Teiles jener Beugungserscheinung. Über den Zusammenhang zwischen dem, was man in in solchen Fällen als Bild des Objekts auffaßt, mit diesem selbst und den Bestimmungsstücken (Brennweite und Apertur) des Systems lassen sich dann mehrere Sätze von ziemlicher Allgemeinheit aufstellen, welche durch zahlreiche Erfahrungen als im wesentlichen sicher zutreffend erwiesen sind.

Doch wollten wir den physikalischen Charakter beider Arten von Abbildung, der primären von selbstleuchtenden und der sekundären von beleuchteten Objekten, hier nur erwähnen, um auf die Bedeutung der Apertur hinzuweisen.

VII B. Die Blende als Mittel zur flächenhaften Darstellung eines Raumes.

(Die spezifische Blenden- oder Tiefen-Wirkung.)

Die bisher ausschließlich besprochene Anforderung an die Leistung optischer Vorrichtungen bestand im allgemeinsten Falle in der Abbildung eines Raumes in einen anderen, spezieller in der Abbildung einer Ebene in die ihr konjugierte.

Dies ist jedoch in fast allen Fällen nicht der eigentliche Zweck dieser Instrumente. Ihre Aufgabe ist entweder die Erzeugung eines Bildes auf einem physischen Schirme, wenn es Projektionssysteme, z. B. photographische, sind, oder die Unterstützung des Sehens; begreifen wir aber auch das Auge mit in die optische Einrichtung ein, so ist auch der Zweck dieser Instrumente die Erzeugung des Netzhautbildes und wir können zusammenfassend sagen, daß die von fast allen optischen Instrumenten geforderte Leistung darin besteht, daß sie ein flächenhaftes Bild erzeugen. Diese Leistung kann aber nicht als Spezialfall der räumlichen Abbildung aufgefaßt werden, weil das geforderte Bild nicht bloß einer Objektfläche entsprechen, sondern einen Teil des Objektraumes wiedergeben soll.

Wie wir durch eine flächenhafte Zeichnung die Charakterisierung eines Raumes auszuführen haben, — die natürlich unvollständig ist, da ein dreidimensionales Gebilde durch ein zweidimensionales nicht wiedergegeben werden kann; und die sich deshalb auf die verschiedenste Weise ausgeführt denken ließe, — ist uns durch die Art unserer Gesichtswahrnehmungen vorgeschrieben. Es geschieht beim Auge durch Projektion mittels gerader Linien von einem Punkte

aus (perspektivisch). Daher müssen alle Zeichnungen und Bilder körperlicher Gegenstände, um in uns denselben Eindruck wie die Natur hervorzurufen, perspektivisch gezeichnet sein. Wir müssen daher dasselbe von den durch Projektionssysteme erzeugten, auf einem Schirm aufgefangenen optischen Bildern fordern. Und es wird durch dasselbe Mittel wie im Auge[1], nämlich wie unten gezeigt werden soll, durch die Begrenzung der Strahlen erreicht.

Für die zur Unterstützung des Sehens bestimmten Instrumente könnte man es bei der Aufgabe, einen Raum in einem andern abzubilden, bewenden lassen, da der Bildraum dann gleichwie ein Objektraum angesehen wird, und das Auge vermöge der Pupille die geforderte perspektivische Zeichnung auf der Netzhaut entstehen läßt. Aber es ist bequemer, die Pupille als eine zu dem Instrument gehörige Blende zu betrachten. Sie bewirkt bei dieser Auffassung, daß das letzte vom Instrument erzeugte Bild eine flächenhafte perspektivische Zeichnung eines vor dem Instrument liegenden Raumteiles ist, die von dem Auge, das jetzt aller spezifischen Blendenwirkung entkleidet zu denken ist, nach den gewöhnlichen dioptrischen Gesetzen auf die Fläche der Netzhaut übertragen wird. — Oftmals aber ist auch tatsächlich der Sitz der spezifischen Blendenwirkung im Instrument selbst, indem statt der Pupille des Auges eine künstliche Blende wirksam ist.

Wir haben also die Strahlenbegrenzung als Mittel zur perspektivischen Darstellung eines Raumes auf einer Fläche zu untersuchen, und zwar sowohl wenn auf dieser Fläche eine reelle, als auch wenn auf ihr eine virtuelle Abbildung stattfindet.

Diese spezifische Wirkung der Blenden wird am reinsten hervortreten, wenn wir von ihrer anderen Funktion, die bei der eigentlichen dioptrischen oder katoptrischen Abbildung wirksamen Strahlen zwecks Verbesserung der Bilder zu begrenzen, zunächst absehen. Dazu legen wir eine vollkommene Abbildung nach den im zweiten Kapitel behandelten Gesetzen der Betrachtung zu Grunde, da bei dieser keine Begrenzung der Strahlen von vornherein vorauszusetzen ist.

a) Die Einführung einer Blende in eine vollkommene (ohne Strahlenbegrenzung vollzogene) Abbildung zweier Räume.

Auf einer Ebene des Bildraumes wird nur eine Ebene des Objektraumes abgebildet. Nach M. v. ROHR[2] wollen wir diese bevorzugte Objektebene als Einstellungsebene (E.-E.), ihr Bild, indem wir unseren Vorstellungen die bekannten Einrichtungen der photographischen Kamera zugrunde legen, ohne dadurch die Allgemeinheit zu beschränken, als Mattscheibenebene (M.-E.) bezeichnen. Alle Objektpunkte, R_1, R_2 vor und hinter der E.-E. erzeugen Bildpunkte, die außerhalb der M.-E. liegen und auf dieser, bei der vorausgesetzten Abbildung durch beliebig geöffnete Büschel, unendlich große Zerstreuungskreise hervorrufen, also dort nicht bemerkbar sind.

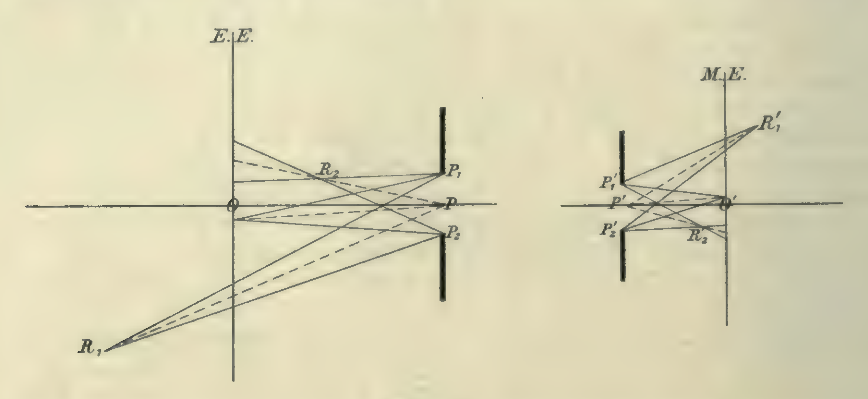
Um endliche Zerstreuungskreise zu erhalten, muß man die Öffnung der Bildbüschel durch eine „in den Bildraum gesetzte" Blende verengern, die eine physische Blende oder ein Bild einer solchen sein kann. Der Ausdruck soll nichts weiter besagen, als daß den von den Bildpunkten ausgehenden Büscheln an einer bestimmten Stelle eine bestimmte Breite vorgeschrieben ist. Wir setzen diese Blende konzentrisch zur Achse des Bildraumes voraus. Die Zerstreuungs-

[1] Dies gilt für das unbewegte Auge. Die Perspektive des ruhenden Auges (des indirekten Sehens) wird durch die Begrenzung der Strahlen mittels der Pupille erzeugt, aber sie spielt vielleicht keine so bedeutende Rolle, wie die Perspektive beim Sehen mit dem bewegten Auge, auf die wir im folgenden Abschnitte eingehen wollen. Es ist für uns genügend, auf die Notwendigkeit perspektivischer Bilder als durch die Natur des Auges begründet hinzuweisen. — [2] M. v. ROHR, Zur Geschichte und Theorie des photographischen Teleobjektivs. Weimar, Schwier. 1897. p. 18.

kreise sind die Schnittpunkte der M.-E. mit den Kegeln, die die Bildpunkte $R_1' R_2'$ . . . zur Spitze und die Blende $P_1' P_2'$ zur Basis haben (Figur 68).

Der „im Bildraum liegenden“ Blende entspricht eine „im Objektraum liegende“, die das jener konjugierte Objekt darstellt und die von den Objektpunkten ausgehenden Büschel auf eine bestimmte Weite reduziert.

Die wirksamen Strahlen eines Objektpunktes, die man erhält, wenn man ihn mit allen Punkten der Objektraumblende verbindet, ergaben auf der E.-E. einen Zerstreuungskreis. Die Durchstoßungspunkte der Objektstrahlen mit der E.-E. sind aber den Durchstoßungspunkten der entsprechenden Bildstrahlen mit der M.-E. konjugiert. Die Zerstreuungsfigur auf der E.-E. ist daher der auf der



Figur 68.
Die Wirkung einer Blende bei räumlicher Verteilung der darzustellenden Objekte. Die Zerstreuungsfigur, die auf der M.-E. entsteht, und die ihr ähnliche, die auf der E.-E. konstruierbar ist.

M.-E. ähnlich und in dem Maßstabe der in diesen beiden konjugierten Ebenen bestehenden Lateralvergrößerung verändert.

Bei genügend kleiner Öffnung der bildseitigen Büschel können nun die Zerstreuungskreise auf der M.-E. klein genug sein, um als Bildpunkte aufgefaßt zu werden, die man etwa in den Durchstoßungspunkt der Schwerlinie des Büschels, des Hauptstrahles, verlegt. Wir können dann von einer durch die Abblendung — nach Art der Lochkamera — bewirkten Abbildung der im Raume vor und hinter der E.-E. gelegenen Punkte sprechen; denn es entsteht eine Zeichnung dieses Raumes auf der M.-E., die zum Teil etwa aus wirklichen Bildpunkten (den konjugierten der Punkte der E.-E.), zum Teil aus genügend kleinen Zerstreuungskreisen besteht. Diese Zeichnung ist aber bis auf den Maßstab dieselbe, die auf der E.-E. einesteils durch die etwa auf ihr vorhandenen Objektpunkte, zum andern Teil durch die Zerstreuungskreise der objektseitigen Büschel gebildet wird; und die Leistung des optischen Systems besteht nur darin, diese Zeichnung zu vergrößern oder zu verkleinern.

b) Die Realisierung der Tiefenwirkung in den optischen Instrumenten.

1. Mehrere Blenden. In den wirklichen Instrumenten sind meistens, wie schon erwähnt, mehrere Blenden vorhanden (Linsenfassungen und besondere Blendenscheiben). Fragen wir zunächst, welche von den in beliebiger Zahl vorausgesetzten Blenden die oben besprochenen Funktionen übernimmt, d. h. welche die Lage und Größe des von irgend einem Objektpunkt R herrührenden Zerstreuungskreises auf der M.-E. bestimmt; oder auch, welche Blende die von R ausgehenden Strahlen am meisten beschränkt. Wir haben dieselbe Frage auf

p. 212 bereits für die auf der E.-E. liegenden Punkte beantwortet. Wie dort denken wir uns alle Blenden durch die vor ihnen liegenden Systementeile „in den Objektraum" abgebildet. Nun suchen wir dasjenige Bild, das von R unter dem kleinsten Winkel gesehen wird. Das so bestimmte Blendenbild nennen wir „die Eintrittspupille des Punktes R" (die ihm entsprechende physische Blende die „Aperturblende für R").

Sehr einfach wird nun die Beantwortung der oben gestellten Frage, wenn alle Punkte des in Betracht gezogenen Objektraumes dieselbe Aperturblende besitzen. Dann tritt die E.-P. für die oben sogen. Objektraumblende, die A.-P. für die Bildraumblende ein.

Sind dagegen für verschiedene Teile des Objektraumes verschiedene Aperturblenden wirksam, so ist jeder dieser Raumteile gesondert für sich in derselben Weise wie es hier angegeben wird, zu behandeln. In der Praxis ist der Raum der dem Instrument dargebotenen Objekten kaum jemals aus Teilen zusammengesetzt, die verschiedene Aperturblenden besitzen. Wir gehen auf diesen Fall nicht weiter ein und bemerken nur, daß, wie sich aus dem Folgenden ergibt, dann z. B. der Augenpunkt der Perspektive für die verschiedenen Raumteile verschieden ist, so daß die Zeichnung auf der M.-E. schon aus diesem Grunde (ebenso wie wegen der Verschiedenheit in der Tiefe der Schärfe, mit der die einzelnen Teile abgebildet werden) nicht brauchbar sein kann.

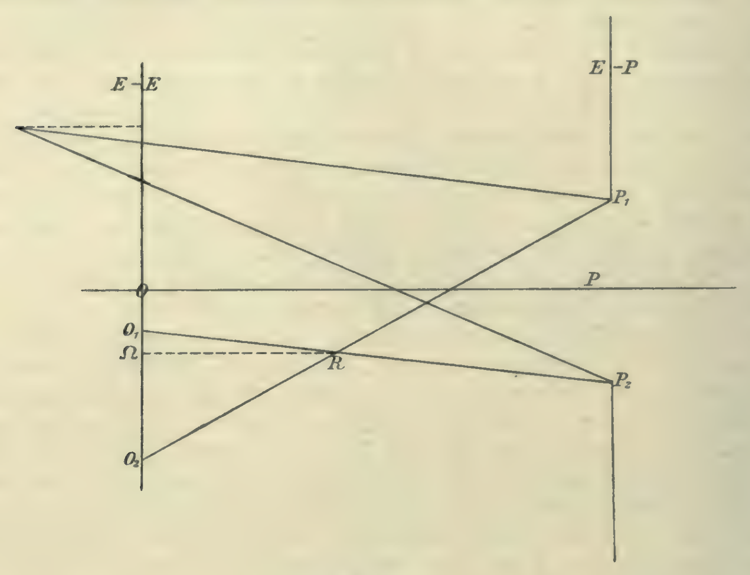
Nun wird wiederum diejenige Blende, deren objektseitiges Bild von der Mitte der E.-P. am kleinsten erscheint, den an der Abbildung teilnehmenden Raumteil bestimmen, Wenn wir z. B. in Figur 57 die achsensenkrechte Ebene in O jetzt nicht mehr als einzige Objektebene, sondern als E.-E. auffassen, so wird offenbar der ganze Raum vor der E.-L. in derselben Weise wie früher die Ebene in O zerfällt werden. Ein Teil, der Inhalt eines Kegels mit der E.-P. und E.-L. als Basen, durchstrahlt die volle E.-P., der Raumteil, der den Inhalt des andern zu denselben Basen zugehörigen Kegels ausmacht, durchstrahlt mindestens einen Teil der E.-P., der übrige Raum ist von der Abbildung ausgeschlossen. Nur im Falle unendlich enger Aperturblende, unendlich kleiner E.-P., findet ein plötzlicher Übergang von abgebildeten zu abgeblendeten Punkten statt. Dann kann man auch die oben eingeführte Projektionsfigur auf der E.-E. als das abzubildende Objekt betrachten und die Aufgabe dadurch auf die früher behandelte zurückführen.

Ebenso ist für den Fall zweier von der Mitte der E.-P. gleich groß erscheinender Blenden aus der Figur 59 leicht die Abgrenzung des abgebildeten Raumes und der Teil der E.-P. zu ersehen, der von den Strahlen irgend eines Punktes durchsetzt werden kann.

2. Die Abbildungsfehler. Sodann wird bei den wirklichen Instrumenten die im vorhergehenden angenommene Vollkommenheit der Abbildung nicht vorhanden sein. Die Einführung der Zerstreuungsfigur auf der E.-E. ermöglichte es Abbe jedoch, sowohl von den Aberrationen der Objektpunkte wie von den weniger ins Gewicht fallenden der Pupillen, abzusehen und das Problem in dieser Hinsicht auf das frühere, der Abbildung einer Ebene in eine andere, zurückzuführen.

Setzen wir nämlich voraus, daß die letztere geleistet, daß (Figur 69) die E.-E. bei O, in die M.-E. bei O' scharf und richtig abgebildet sei, so wird eine Untersuchung der Aberrationen der O benachbarten Objektpunkte überflüssig, obwohl z. B. ein Achsenpunkt in der Nähe von O als Nachbarpunkt eines aplanatischen Punktes notwendig mit sphärischer Aberration behaftet sein muß (p. 134). Denn die Zerstreuungsfigur auf der E.-E., die wir durch Verbindung der Punkte R mit allen Punkten der E.-P. erhielten, wird genau wie eine aus wirklichen Objektpunkten bestehende, in der E.-E. liegende Zeichnung in der M.-E. abgebildet. Die von irgend einem Punkte R nach der E.-P. zielenden

Strahlen sind nämlich zugleich Strahlen von Büscheln, die von den Punkten der E.-E. ausgehen. Die Durchstoßungspunkte der konjugierten Strahlen mit der M.-E. sind daher identisch mit den Punkten der M.-E., die jenen Durchstoßungspunkten auf der E.-E. als Bildpunkte (gemäß der in den beiden konjugierten Ebenen bestehenden Vergrößerung) entsprechen. Es folgt hieraus u. a., daß, wie auch der Charakter und Grad der Korrektion in den Büscheln des Bildraumes in der Nachbarschaft der E.-E. sein mag, doch jedenfalls die Durchstoßungspunkte der von je einem Punkte R ausgehenden Strahlen mit der E.-E. und



Figur 69.

Der auf der E.-E. konstruierte Zerstreuungskreis $O_1 O_2$ des nicht eingestellten Punktes R.

$O_1 O_2 = z$ $\quad P_1 P_2 = p$ $\quad PO = \xi$ $\quad$ abs $[R\Omega] = \Delta$ $\quad \sphericalangle P_1 O P = u$

M.-E. in diesen dieselbe Reihenfolge und sogar proportionale Abstände von einander haben.

Wir werden also im folgenden, indem wir eine scharfe und richtige Abbildung der E.-E. voraussetzen, durch Benutzung der Zerstreuungsfigur auf der E.-E. von der Berücksichtigung der übrigen Aberrationen befreit sein.

c) Die Perspektive.

Die Zeichnung, die man in der M.-E. erhält, ist also, wie wir sahen, bis auf den Maßstab mit der auf der E.-E. konstruierbaren Zerstreuungsfigur identisch. Sofern man darin auch nur Umrisse erkennen kann, ist sie also eine perspektivische Zeichnung des Objektraumes, aufgenommen von einem in der Mitte der E.-P. gelegenen Augenpunkte. Bei der Darstellung irgend welcher im Raume verteilter Objekte hängt die Perspektive des Bildes auf der M.-E. also nur von der Lage der E.-P. in bezug auf diese Objekte ab, hat also mit den besonderen Eigenschaften des Systems (wenn dieses nur die E.-E. verzeichnungsfrei abbildet), z. B. mit seiner Brennweite, nichts zu tun[1]. Mit verschiedener Brennweite erhaltene Bilder sind einander ähnlich.

[1] Diese Erkenntnis findet sich nach M. v. Rohr, Theorie u. Gesch. des photogr. Obj., p. 208, zuerst in einem T. H. unterzeichneten Artikel des Brit. Journ. of Phot. **13.** 138. 1866.

Wird diese Zeichnung z. B. auf photographischem Wege fixiert, so muß sie nach dem Gesagten von einem bestimmten Punkte (der von dem gewählten Maßstabe und dem Abstand der E.-P. von der E.-E. abhängt) betrachtet werden, um den natürlichen Eindruck hervorzurufen. Denn dieser muß derselbe sein, als ob man von der E.-P. in den Objektraum hineinsieht. Der richtige Abstand der Betrachtung wird daher gleich dem Abstand der E.-P. von der E.-E. sein, multipliziert mit der Linearvergrößerung β (oder dividiert durch den Reduktionsmaßstab $r = 1 : \beta$) der Aufnahme.

Wird das Bild nicht fixiert, sondern als reelles Luftbild oder virtuelles Bild durch andere Teile des Instruments (Okulare) angeschaut, so ändert sich an dieser Betrachtung nichts. Die Forderung richtiger Perspektive ist aber bei solchen Instrumenten nicht erfüllt. Genaueres s. in dem Abschnitt: „Das Sehen" (p. 274) und „Das photographische Objektiv" (p. 299).

Das Visieren. Alle Punkte auf einem Hauptstrahle sind im Bilde der M.-E. durch konzentrische Kreise dargestellt oder verdecken einander auf diesem Bilde. Um mehrere Punkte zur Deckung zu bringen, muß man also die Mitte der E.-P. in ihre Verbindungslinie bringen. Beim Auge heißt dieser Vorgang Visieren; seine Untersuchung führte HELMHOLTZ dazu, die Theorie der Strahlenbegrenzung für das Auge zu entwickeln.

Der SCHEINERsche Versuch. Sehen wir einmal von unserer Voraussetzung zur Achse konzentrischer Blenden ab und denken uns die Aperturblende aus mehreren, z. B. zwei getrennten (etwa in einer achsensenkrechten Ebene liegenden, der Achse benachbarten) Öffnungen bestehend. Dann wird die E.-P. ebenfalls aus zwei Öffnungen bestehen, wir erhalten zwei Projektionszentren im Objektraum, zwei Zeichnungen in der E.-E. und zwei ähnliche in der M.-E., also zwei verschiedene Bilder des Objektraumes, die aber in den Punkten zusammenfallen, die die Bilder auf der E.-E. gelegener Punkte sind. Alle anderen Punkte sind doppelt wiedergegeben und die Mitten der sie vertretenden Zerstreuungskreise sind desto weiter von einander entfernt, je weiter die Punkte von der E.-E. abstehen. Liegen die beiden E.-P. etwa vertikal über einander, so liegen die Doppelbilder ebenso; und wenn etwa bei den zwischen E.-E. und E.-P. gelegenen Objektpunkten das obere Bild von der oberen E.-P. herrührt, so wird bei den außerhalb dieser Strecke gelegenen Objektpunkten das obere Bild von der unteren E.-P. erzeugt. Diese Anordnung ist auch beim Auge leicht herzustellen (durch ein vor die Pupille gehaltenes Kartenblatt mit zwei feinen Öffnungen, deren Abstand geringer als der Pupillendurchmesser ist) und als die des SCHEINERschen Versuches bekannt[1].

Der Einfluß der Verlegung der Pupillen. Die Blendenlage hat natürlich bei einem vollkommen wirkenden System auf die Lage wirklicher Bildpunkte, z. B. R_1', R_2' (Figur 68), keinen Einfluß, jedoch wesentlichen Einfluß auf die Durchstoßungspunkte der Hauptstrahlen in der M.-E. und E.-E. Wir brauchen nach dem Gesagten nur die E.-E. zu betrachten und es ergibt sich, daß eine Verschiebung der Blenden den Augenpunkt der Perspektive verändert, unter dem die räumliche Anordnung der Objektpunkte betrachtet erschien.

Durch die Einführung des Zerstreuungspunktes auf der E.-E. reduzieren sich, wie besonders M. v. ROHR[2] gezeigt hat, die meisten Probleme einfach auf diese im Objektraum ausgeführt zu denkende Projektion und die Abbildung der Projektionsfigur. Dies gilt auch besonders für die Frage des Einflusses der Pupillenöffnung auf die Erstreckung des Objektraumes, von dem noch eine Zeichnung von einer zugelassenen maximalen Unschärfe erhalten wird:

---

[1] SCHEINER, Oculus 1619. p. 32—48. — [2] M. v. ROHR, Zur Geschichte und Theorie des photographischen Teleobjectivs, Weimar 1897.

d) Die Tiefe der Schärfe.

Ist z der Halbmesser des Undeutlichkeitskreises auf der E.-E., hervorgebracht durch die von R ausgesandten und durch die E.-P. gehenden Strahlen, so ist nach Figur 69, wenn $\varDelta$ den absoluten (stets positiven) Wert von ΩR bedeutet:

$$z = \frac{\varDelta \cdot p}{\xi + \varDelta} \quad , \tag{1}$$

wenn der Objektpunkt R zwischen E.-E. und E.-P. liegt;

$$z = \frac{\varDelta \cdot p}{\xi - \varDelta} \quad , \tag{2}$$

wenn der Objektpunkt außerhalb der Strecke OP, nicht zwischen E.-E. und E.-P. liegt.

Der Zerstreuungskreis auf der M.-E. ergibt sich durch Multiplikation mit der Lateralvergrößerung β.

Die Betrachtung zeigt, daß *die im Bilde entstehende Unschärfe nicht eingestellter Objekte* nur von der Lagenbeziehung zwischen diesen, der E.-E. und der E.-P., von deren Öffnung und von der Vergrößerung abhängt, *von den besonderen Eigenschaften des Systems also unabhängig ist.*

Wir erinnern daran, daß unsere Betrachtungen für beliebige Systeme gelten, sofern diese die E.-E. scharf ohne Verzeichnung und Bildwölbung abbilden.

Zwischen der halben Öffnung u der von O ausgehenden Büschel und z besteht nach der Figur offenbar der Zusammenhang:

$$z = 2\varDelta \frac{\xi}{\xi + \varDelta} \operatorname{tg} u \tag{3}$$

für einen Punkt zwischen E.-E. und E.-P.,

$$z = 2\varDelta \frac{\xi}{\xi - \varDelta} \operatorname{tg} u \tag{4}$$

für einen anderen Punkt.

Der Halbmesser des Zerstreuungskreises auf der M.-E. ist[1]:

$$z' = 2\beta \cdot \varDelta \frac{\xi}{\xi \pm \varDelta} \operatorname{tg} u \quad . \tag{5}$$

Wenn $\varDelta$ gegen ξ nicht zu vernachlässigen ist, so hängt die Größe des Zerstreuungskreises nicht nur von dem Öffnungswinkel, d. h. der scheinbaren Größe der E.-P., gesehen vom Objekt aus und dem Verhältnis $\xi/\varDelta$ ab, sondern auch von ihrer Lage. Je nachdem dann die E.-P. hinter oder vor dem Objekt liegt, ist der Zerstreuungskreis eines seinerseits in gewisser Entfernung $\varDelta$ hinter der Objektebene gelegenen Punktes im Bilde größer oder kleiner als der eines ebenso weit vor dem Objekt liegenden — entsprechend der Zu- oder Abnahme der wirksamen Apertur, die dann bei Annäherung oder Entfernung des Objektpunktes vom System eintritt. Unter sonst gleichen Umständen, z. B. bei zwei Systemen gleicher Konstruktionsart (diese nur in bezug auf die relative Lage der Blenden nötig), welche mit gleichen Öffnungswinkeln ein Objekt in gleicher Vergrößerung

---

[1] Diese Formel weicht von derjenigen, die von Abbe (s. z. B. Beschreibung eines neuen stereosk. Okulars. Carls Rep. **17.** 220. 1880) angegeben und nach ihm von den meisten anderen Schriftstellern über diesen Gegenstand wiederholt worden ist, darin ab, daß hier die trigonometrische Tangente auftritt, wo in jenen der Sinus. Die Differenz erklärt sich aus einer von Bratuschek herrührenden strengeren Rücksichtnahme auf die Voraussetzung des Aplanatismus für die scharf eingestellte Ebene. Macht man diese Voraussetzung nicht, so läßt sich über den Zerstreuungskreis überhaupt nichts mehr feststellen — außer wenn der Winkel u so klein ist, daß sin und tang vertauscht werden können.

abbilden, aber verschiedene Brennweite — d. h. verschiedenes ξ — besitzen, ist jener Einfluß des Blendenortes größer bei dem Systeme kleinerer Dimension (von kürzerem ξ). Bei einem solchen ist also der Unterschied größer zwischen der Geschwindigkeit, mit der die Unschärfe der von der E.-E. aus nach vorn gelegenen Objekte zunimmt und der Geschwindigkeit, mit der die Unschärfe der nach rückwärts gelegenen Objekte wächst (vorn und hinten immer im Vergleich zur Richtung des einfallenden Lichtes zu verstehen).

Während die lineare Größe des Zerstreuungskreises das Maß für die absolute Unschärfe im Bilde ist, kann man als Maß der durch ihn hervorgerufenen Verundeutlichung des Bildes (Unlesbarmachung einer Schrift oder dergl.) sein Verhältnis zu der Vergrößerung ansehen, in welcher die betreffende Objektebene auf die wahre Bildebene projiziert wird. Die Bildgröße ist hierbei natürlich von Mitte zu Mitte entsprechender Zerstreuungskreise zu rechnen. Da diese Mitten auf den Hauptstrahlen liegen, so entspricht zwei Punkten die auf demselben durch P gehenden Hauptstrahl liegen, derselbe Bildpunkt in der Ebene O'. Hieraus folgt, daß die Vergrößerung, mit der die durch R gehende Ebene in O' unscharf abgebildet wird, $[\beta]$, sich zu der von O, β, umgekehrt verhält, wie die Abstände der Punkte R und O von der Pupille, also

$$\frac{[\beta]}{\beta} = \frac{\xi}{\xi \pm \varDelta} \tag{6}$$

und

$$\frac{z'}{[\beta]} = 2\,\varDelta \cdot \operatorname{tg} u \quad . \tag{7}$$

Die durch Fokusdifferenz bewirkte Verundeutlichung des Bildes hängt also weder von der Vergrößerung, noch von der Lage der E.-P., noch endlich von dem Sinne der objektseitigen Fokusdifferenz ab, sondern nur von der absoluten Größe der letzteren und von dem Öffnungswinkel des abbildenden Systems.

Wenn die Fokusdifferenz klein ist gegen die Entfernung der E.-P. vom Objekt, so wird einfacher

$$z' = 2\,\beta \cdot \varDelta \cdot \operatorname{tg} u \quad . \tag{8}$$

Wenn das betreffende System nicht zur Darstellung objektiver Bilder (auf einen Schirm) benützt wird, sondern als Hilfsmittel des Sehens, subjektiv, so ist auch nicht mehr die absolute lineare Größe des Zerstreuungskreises maßgebend für die Unschärfe im Bilde, sondern sein scheinbarer, angularer Wert. Dieser ist $\varepsilon' = z'/\xi'$, wenn ξ' die Entfernung des Bildes von der A.-P. ist. Da β die auf die gleiche Entfernung bezogene lineare Vergrößerung ist, so ist $\beta/\xi' = V = \operatorname{tg} w'/y$ die Vergrößerung des Systems im subjektiven Gebrauch, somit wird

$$\varepsilon' = \frac{z'}{\xi'} = 2\,V \cdot \varDelta \cdot \operatorname{tg} u \quad . \tag{9}$$

Die **Tiefe im Objektraume**, der ein Zerstreuungskreis von der Größe z' auf der M.-E. oder von $z = z'/\beta = -\,r z'$ auf der E.-E. entspricht (r ist der Reduktionsmaßstab) ergibt sich nach v. ROHR[1] aus (1) und (2):

$$t_v = \frac{-\,\xi r z'}{p + r z'} \tag{10}$$

(Tiefe in der Richtung auf die E.-P. zu bei Zulassung der Unschärfe z' auf dem Bilde);

$$t_r = \frac{-\,\xi r z'}{p - r z'} \tag{11}$$

(Tiefe in der Richtung von der E.-P. fort bei Zulassung der Unschärfe z' auf dem Bilde); t_v und t_r sind, wie oben $\varDelta$, durch Definition positiv.

---

[1] M. v. ROHR, l. c., p. 27.

(12)
$$t_v + t_r = \frac{-2\,\xi\, r\, z'\, p}{p^2 - r^2 z'^2}$$

(Gesamttiefe).[1]

Liegt die E.-P., wie gewöhnlich, in der Lichtrichtung hinter dem Objekt, so ist t_v die Tiefe nach vorwärts, t_r die Tiefe nach rückwärts.

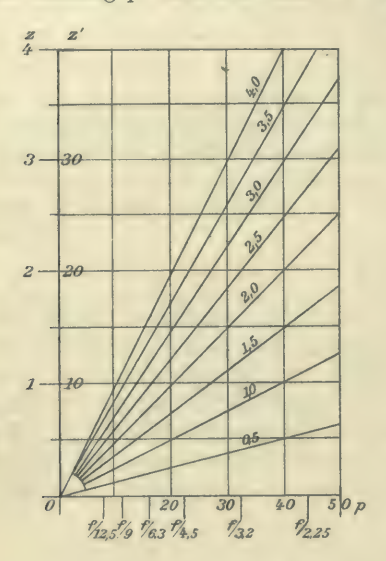
Die fünf Größen t_v, t_r, p, rz', ξ sind durch zwei Gleichungen verbunden, die gestatten, aus dreien davon die anderen zwei zu berechnen. Dies geschieht nach M. v. Rohr[2] am leichtesten durch Benutzung eines Hilfsparameters, indem man setzt:

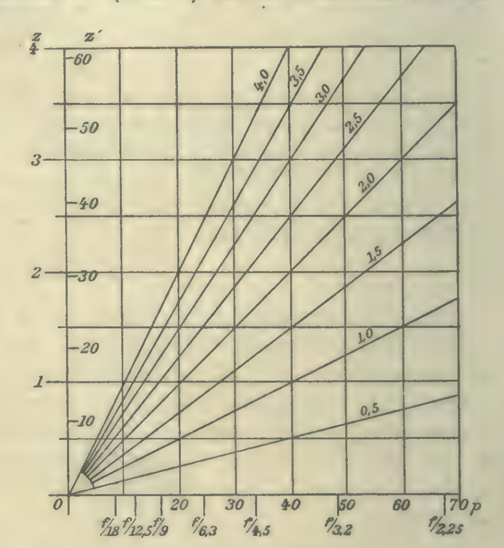
$$\frac{t_v + t_r}{-\xi} = \operatorname{tg} \alpha \quad ;$$

dann ist

$$\frac{rz'}{p} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad .$$

Hieraus leitet derselbe Autor eine einfache graphische Darstellung ab; für die Öffnung p und die erlaubte Unschärfe z' (oder z) als Koordinaten werden





Figur 70.

$f = 100$ mm, $-\xi = 10$ m, $\frac{z}{z'} = r = 99$ | $f = 150$ mm, $-\xi = 10$ m, $\frac{z}{z'} = r = 65{,}6$

Darstellung der Tiefe in Stufen von je 0,5 m bei Einstellung auf ein 10 m entferntes Objekt für zwei Objektive von 10 und 15 cm Brennweite und verschiedene Abblendung. p und z ist in Millimetern, z' in μ gegeben.[3] Die Figuren sind natürlich in dem gemeinsamen Teile identisch, da p und z in beiden in demselben Maßstab angelegt sind.

die Kurven gleicher (Gesamt-)Tiefe gerade Linien (Figur 70). Wählt man speziell p und z als Koordinaten, so erhält man für beliebige Systeme (Brennweiten) stets dieselbe Figur.

Für $p = rz'$ wird die Hintertiefe unendlich (für $p < rz'$ geben die Formeln (11) und (12) nicht mehr die Hinter- und die Gesamttiefe; dann ist nämlich t_r ebenfalls unendlich; aber

[1] Die entsprechenden Formeln für die Tiefe bei Orientierung auf die Hauptebenen entwickelte H. Krüss, Pogg. Ann. **157.** 476. 1875. — [2] M. v. Rohr, The Brit. Journ. of Phot. **48.** 454. 1901. — [3] Nach den Formeln müßte es $-z$ heißen. Dieses Vorzeichen ist natürlich gleichgültig.

die Unschärfe erreicht im Unendlichen noch nicht einmal das zulässige Maß, sondern dies geschieht für Objektpunkte, die auf der anderen Seite der E.-P. liegen und durch (11) geliefert werden).

Für unendliche Hintertiefe wird $t_v = -\frac{\xi}{2}$, was auch geometrisch einleuchtet.

Lagen die Pupillen in den Hauptpunkten, wie bei photographischen Objektiven, so war $-\xi = (r+1)f$ (Gleichung 7, p. 229). Dann ist für $t_r = \infty$:

$$t_v = \frac{r+1}{2} f \quad \text{oder} \quad = \frac{p+z'}{2z'} f \quad .$$

Die Vordertiefe wächst also bei gleicher Öffnung p mit der Brennweite, aber ebenso wächst der gleich große unscharf abgebildete Raum vor der E.-P.

Statt (12) läßt sich auch leicht ein Ausdruck der Gesamttiefe für den Fall angeben, daß man eine andere Unschärfe hinter der E.-E. zuläßt als davor[1].

Bei Systemen, die zur Photographie dienen, ist es bei gegebener Objektentfernung zur gleichzeitigen Erreichung möglichst großer Lichtstärke und Tiefe vorteilhafter, kleine Brennweiten zu benutzen und die Bilder nachher zu vergrößern. Denn für zwei Objektive von gleicher Öffnung werden bei Aufnahme gleich weit entfernter Gegenstände und Einstellung auf dieselbe Ebene die Unschärfen auf der E.-E., z, dieselben sein, und werden im schließlichen Bilde, wenn dasselbe auf gleiche Größe gebracht wird, die gleichen Unschärfen z' ergeben, gleichgültig, ob diese Maßstabsveränderung (Verkleinerung) durch das Objektiv mit langer Brennweite allein geschieht, oder durch ein kurz-brennweitiges Objektiv und einen Vergrößerungsapparat. Aber das letztere Objektiv wird bei der Aufnahme eine größere Lichtstärke besitzen[2]. — Man kann dasselbe Resultat durch Betrachtung zweier gleich lichtstarker Objektive mit verschiedener Öffnung ableiten, deren Tiefe nach (10)—(12) berechnet wird. Das größere Objektiv wird auch, wenn man der Größe seiner Bilder entsprechend eine größere Unschärfe z' zuläßt, eine geringere Tiefe aufweisen[3].

Die beiden Figuren 70 zeigen dasselbe für praktisch häufig vorkommende Verhältnisse (10 m Entfernung zwischen E.-P. und E.-E., 100 und 150 mm Brennweite). Lassen wir eine Unschärfe zu, die bei der Betrachtung des Bildes im richtigen Abstand (p. 253 u. 299) eine halbe Winkelminute beträgt, so werden wir auf der E.-E. etwa die Unschärfe $z = 1{,}5$ mm gestatten können. Während dann das größere Objektiv mit der Öffnung $f/6{,}3$ eine Gesamttiefe von 2,5 m aufweisen wird, besitzt das kleine mit derselben relativen Öffnung eine Tiefe von 3,7 m.

Bei Instrumenten zur Unterstützung des Sehens

ist nach der abgekürzten Formel (9) die Tiefe im Objekt, der ein Zerstreuungskreis von der maximalen Größe ε' im Bilde entspricht

$$(13) \qquad 2\Delta_{\varepsilon'} = \frac{\varepsilon'}{V \cdot \operatorname{tg} u} = \frac{\varepsilon' l}{N \operatorname{tg} u}$$

(l deutliche Sehweite, N Vergrößerung) oder $= \Delta_{\varepsilon'}$ beiderseits von der scharf eingestellten Objektebene.

Die Tiefe hängt hier natürlich von ε', d. h. davon ab, welche Zerstreuungskreise das Auge des Beobachters verträgt, oder wie groß diese sein dürfen, ehe das Auge den Eindruck der Unschärfe erhält. Diese Sehschärfe ist individuell

---

[1] BRUNO MEYER, Deutscher Photographenkalender **19.** 169. Weimar 1899. — [2] Diese Fragen wurden zuerst von dem auf p. 252 zitierten Anonymus T. H., ferner von A. STEINHEIL, Phot. Arch. **9.** 283. 1868, sodann auf Grund einfacher analytischer Entwickelungen zusammenfassend von F. PAUL LIESEGANG diskutiert: Die richtige Ausnutzung des Objektivs. Wie erreicht man in jedem Falle bei scharfer Tiefenzeichnung die größtmögliche Lichtstärke? Düsseldorf 1896. — [3] M. v. ROHR, l. c., p. 32.

verschieden und hängt von mehreren Momenten physikalischer und physiologischer Natur ab (Intensität des Bildes, Farbe, Erregungszustand, Stelle der Netzhaut u. s. w.), auch von der Beschaffenheit des beobachteten Bildes, seiner Struktur, Intensitätsdifferenzen u. s. w. Mittleren Verhältnissen entsprechen Sehschärfen von 1′ bis 5′. Im übrigen aber hängt die Fokustiefe nur ab von seinem Vergrößerungsvermögen (Brennweite) und Öffnungswinkel. Der Konstruktionstypus, die Zusammensetzung des Systems aus Objektiv und Okular und die Verteilung der Funktionen auf diese sind völlig ohne Einfluß auf sie.

Das Reziproke der Fokustiefe ist das Maß für die Einstellungsgenauigkeit (Fokussierungsempfindlichkeit) eines Systems. Denn offenbar ist man desto besser imstande, die richtige Lage eines Systems gegen Objekt und Bild zu finden (d. h. diejenige Lage, bei welcher es ein gegebenes Objekt an bestimmter Stelle abbildet) je größer der Zerstreuungskreis ist, welcher bei einer bestimmten Verschiebung des Objekts gegen das System — oder umgekehrt — entsteht.

[**Die Akkommodationstiefe.** Bei den zu subjektiver Beobachtung benutzten Instrumenten, in denen das Bild nicht auf einem physischen Schirm, sondern in der Luft schwebend beobachtet wird, kommt bei der Betrachtung dieses Bildes, ebenso wie bei der eines körperlichen Objekts, die Akkommodation des Auges der Auffassung der Tiefe noch zu Hilfe. Die Betrachtung der Akkommodationstiefe gehört zwar der Theorie der Strahlenbegrenzung nicht an und hat auch nichts mit der Fokustiefe, wie sie oben untersucht wurde, zu tun. Denn während wir soeben den Vorgang besprochen haben, daß verschiedene Objektflächen zu gleicher Zeit in einem Bilde erscheinen, handelt es sich jetzt darum, nach einander vermöge der Veränderlichkeit der Brennweite des Auges verschiedene Entfernungen des Objekts einzustellen und auf die gewöhnliche Weise abzubilden. Praktisch jedoch spielen beide Vorgänge eine ähnliche Rolle. An den Bereich, welcher vermöge der Akkommodation scharf übersehen werden kann, gliedert sich dann beiderseits derjenige, in welchem trotz der Fokusdifferenz die Zerstreuungskreise noch unter der Grenze der Sichtbarkeit bleiben. Die gesamte Sehtiefe ist also die Summe der Akkommodations- und der Fokustiefe.

In Wirklichkeit wird bei Systemen größerer Apertur, wie wir wiederholt hervorgehoben haben, streng genommen überhaupt nur eine einzige Ebene abgebildet. d. h. mit wachsender Apertur beschränkt sich der Bildraum infolge der außerhalb der aplanatischen Punkte von selbst notwendig eintretenden Aberrationen immer mehr, so daß im Bilde immer weniger Spielraum für die Akkommodation bleibt. Durch diesen Umstand wird die Akkommodationstiefe — welche ohnehin mit wachsender Vergrößerung in immer geringerem Maße zur Tiefenwahrnehmung beiträgt — in noch höherem Grade als es die betreffenden Formeln ausdrücken, verringert[1], während er nach dem früher Gesagten für die Fokustiefe nicht in Betracht kommt.

Wir können nun diejenige Tiefe des Objektraumes berechnen, die durch Akkommodation bei ungeänderter Einstellung sichtbar gemacht würde, wenn den Punkten jenes Objektraumteiles scharfe Bildpunkte entsprächen. Ist diese Tiefe geringer als diejenige, innerhalb der die Zerstreuungskreise durch Aberration das zulässige Maß erreichen, so ist sie in der oben angegebenen Weise als wirksam anzusehen, ist sie aber größer als jene, so ist die Gesamttiefe derjenige Raum, innerhalb dessen die Summe der durch Aberration und Fokusdifferenz herbeigeführten Zerstreuungskreise den festgesetzten Grenzwert erreicht.

[1] Auf diesen Umstand und nicht auf einen solchen physiologischer oder psychischer Natur ist wohl auch die von Nelson statuierte „Paralysierung der Akkommodation" zurückzuführen. S. Journ. Roy. Micr. Soc. (2) p. 331. 1892.

Ist ξ_N' die Entfernung des sogen. „Nahepunktes" vom Auge, d. h. die kleinste Entfernung, auf welches dieses scharf akkommodieren kann, ξ_F' der Abstand des Fernpunktes von demselben, so ist nach DONDERS das rationelle Maß für das Akkommodationsvermögen[1] des Auges die Größe

$$(14) \qquad \frac{1}{A} = \frac{1}{\xi_N'} - \frac{1}{\xi_F'} \quad .$$

Folglich ist der Spielraum der Akkommodation im Bildraume

$$(15) \qquad \xi_F' - \xi_N' = \Delta_A' = \xi_N' \cdot \xi_F' : A \quad .$$

Insoweit die Bilder der parachsialen Strahlen mit denen der stärker geneigten zusammenfallen, entspricht der Entfernung Δ_A' zweier Bilder der Abstand Δ_A ihrer Objekte gemäß

$$(16) \qquad \frac{\Delta_A'}{\Delta_A} = \frac{n'}{n} \beta_N \cdot \beta_F \quad ,$$

nach Gleichung (16), p. 51, wo β_N, β_F die linearen Vergrößerungen sind, welche in den Entfernungen ξ_F', ξ_N' bestehen. Daher ist die objektseitige Akkommodationstiefe

$$(17) \qquad \Delta_A = \frac{n}{n'} \frac{1}{A} \cdot \frac{\xi_N'}{\beta_N} \cdot \frac{\xi_F'}{\beta_F} \quad .$$

Wenn β_N und β_F nicht viel von einander unterschieden sind, so kann man für jedes von ihnen einen Mittelwert β_M setzen, der genau genommen $= \sqrt{\beta_N \cdot \beta_F}$ ist und ebenso für ξ_N' und ξ_F' den Mittelwert ξ_M', der genau genommen $= \sqrt{\xi_N' \cdot \xi_F'}$ ist, so daß

$$(18) \qquad \Delta_A = \frac{n}{n'} \frac{1}{A} \left(\frac{\xi'}{\beta}\right)_M^2 \quad .$$

Bei Instrumenten, deren A.-P. sehr nahe am hinteren Brennpunkt liegt, ist auch sehr nahe $\xi' = x'$, daher $\xi'/\beta = \frac{1}{V} = f'$ und es wird

$$(19) \qquad \Delta_A = \frac{n}{n'} \frac{1}{A} \cdot f'^2 = \frac{n}{n'} \frac{1}{A V^2} \quad .$$

Bei Instrumenten für subjektive Beobachtung ist also die gesamte Sehtiefe, auch das Penetrationsvermögen des Systems genannt, gleich der Summe der Fokustiefe Δ_ε und der Akkommodationstiefe Δ_A. In welchem Maße diese beiden Momente zur Wahrnehmung der Tiefendimensionen beitragen, wird am besten durch eine tabellarische Übersicht erläutert[2], in der für ein System (Mikroskop) von der numerischen Apertur $n \sin u = 0{,}5$ und trocken liegendes Objekt, d. h. für einen Öffnungswinkel von $2u = 60^0$ in Luft die Werte von Δ_ε, Δ_A, die Größe des auf einmal übersehbaren Objektfeldes $2y$ und das Verhältnis dieses zu Δ_ε und Δ_A aufgeführt sind bei verschiedenen Vergrößerungen und unter den Annahmen, daß $\varepsilon = 5'$, $A = 300$, $\xi_M' = 250$ mm ($\xi_N' = 166$; $\xi_F' = 375$) und daß das halbe angulare Sehfeld im Bilde $\operatorname{tg} w' = 0{,}5$ ist.

[1] S. die Lehrbücher der physiologischen Optik, z. B. v. HELMHOLTZ, p. 121. — [2] E. ABBE, Beschreibung eines neuen stereoskopischen Okulars. CARLS Rep. f. Exper. Physik 17. 216. 1880. Hieraus ist auch das folgende Zitat mit geringen Abweichungen vom Wortlaut entnommen.

β	$2\,\Delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} u} \frac{\xi'}{\beta}$	$\Delta_A = \frac{n}{n'} \frac{1}{A} \left(\frac{\xi'}{\beta}\right)^2$	$2\,y = 2\,\frac{\xi'}{\beta} \operatorname{tg} w'$	$\frac{2\,\Delta_\varepsilon}{2\,y}$	$\frac{\Delta_A}{2\,y}$
10	0,0630	2,08	25 mm		$\frac{1}{12}$
30	0,0210	0,231	8,3 „		$\frac{1}{36}$
100	0,0063	0,021	2,5 „		$\frac{1}{120}$
300	0,0021	0,0023	0,83 „	$\frac{1}{397}$	$\frac{1}{360}$
1000	0,00063	0,00021	0,25 „		$\frac{1}{1200}$
3000	0,00021	0,00002	0,083 „		$\frac{1}{3800}$

Bei den Vergrößerungen unter 100 würde allerdings die Pupille des Auges einen Teil der A.-P. abblenden und damit die wirksame Apertur des Systems verringern, seine Fokustiefe im subjektiven Gebrauch also für diesen Fall entsprechend erhöhen. Die betreffenden Zahlen haben daher nur schematischen Wert.

„Die der optischen Abbildung inhärente Übervergrößerung der Tiefendimension bringt also ein mit wachsender Vergrößerung immer ungünstiger werdendes Verhältnis zwischen Tiefe und Breite des der Akkommodation zugänglichen Objektraumes hervor; während dieser bei zehnfacher Vergrößerung ungefähr die Verhältnisse eines ziemlich dicken Buches zeigt, gleicht es schon bei 500facher Vergrößerung nur noch dem einzelnen Blatt aus diesem Buche. — Der andere Bestandteil der Sehtiefe zeigt hingegen ein wesentlich abweichendes Verhalten, weil in bezug auf ihn der Effekt der Übervergrößerung gerade kompensiert wird durch die der Vergrößerung des Mikroskops proportional gehende Verengerung der Strahlenkegel, welche aus dem Okular zum Auge gelangen. Für die Grenzen des vollkommen scharfen Sehens, durch wechselnde Akkommodation, ist es offenbar gleichgültig, ob die Pupille enge oder breite Strahlenbüschel empfängt; das Anwachsen der Zerstreuungskreise beim Überschreiten des Nahpunktes oder Fernpunktes erfolgt aber proportional dem Durchmesser der abbildenden Strahlenbüschel. Infolge dieses Umstandes bewahrt, trotz der Übervergrößerung der Tiefendimension, der kraft Fokustiefe erkennbare Körperraum ein ganz konstantes Verhältnis zwischen Breite und Dicke, solange derselbe Öffnungswinkel in Betracht ist und solange eine bestimmte Grenze der zulässigen Undeutlichkeitskreise festgehalten wird. — Aus dem angeführten Beispiel ist ersichtlich, daß bei den geringen Vergrößerungen die Fokustiefe auf alle Fälle sehr zurücktritt gegenüber der Akkommodationstiefe; während umgekehrt unter sehr hohen Vergrößerungen die Wirksamkeit der Akkommodation mehr und mehr zurückbleibt hinter dem zwar kleinen, aber sich konstant erhaltenden Effekt der Fokustiefe.“]

Die Entwickelung der Theorie der Strahlenbegrenzung.

Für eine Theorie der Strahlenbegrenzung finden sich in den früher genannten Werken von Biot, Mossotti, Ferraris, J. Petzval und in einigen wenigen Spezialabhandlungen, z. B. von Lubimoff spärliche Beiträge. Die Gaussische Theorie mit ihren für Näherungszwecke so bequemen Konstruktionen verführte die Theoretiker vielfach, über den konstruierten, als Hilfslinien nützlichen Strahlen den wirklichen, durch die Begrenzungen vorgeschriebenen Strahlenverlauf zu vergessen. Dieser Entwickelungsgang, der im Gebiete der photographischen Optik von M. v. Rohr nachgewiesen wurde, und auf den wir oben an mehreren Stellen aufmerksam gemacht haben, ist die Ursache, warum längere Zeit hindurch wichtige Ansätze zu einer Theorie der Strahlenbegrenzung nur von Männern auszugehen scheinen, die der theoretischen Zunft fern standen; also von den oben erwähnten englischen Amateuren und Praktikern (R. H. Bow, Th. Sutton, dem Anonymus J. H.), zu denen noch Th. Grubb hinzuzufügen ist; ferner von dem ebenfalls oben genannten J. Porro, deren Leistungen sämtlich in dem Rohrschen Buche aufgedeckt und ausführlich gewürdigt wurden. Aus derselben Ursache fanden

aber diese Leistungen geringe Beachtung und wurden vergessen, indem sie in der in den Lehrbüchern vertretenen Theorie meist keine Aufnahme fanden.

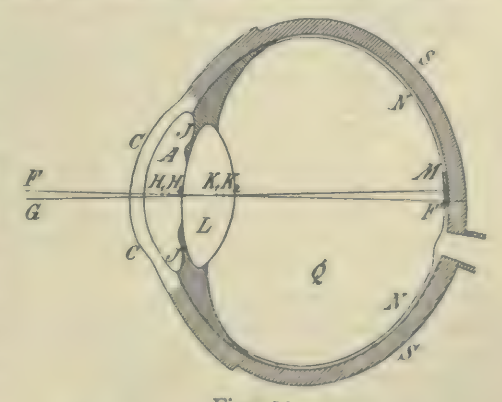
In Deutschland war beim Ausbau der Näherungstheorie besonders durch SEIDEL u. a. die Wichtigkeit von Blendenlage und -größe wohl erkannt worden und implizite in den Formeln enthalten, aber ohne daß dies zu einer Theorie der Strahlenbegrenzung in dem oben festgehaltenen Sinne, nämlich zu den Wirkungen der Blenden hätte führen können, die außer ihrem Einfluß auf die Güte der Strahlenvereinigung vorhanden sind. Hier war HELMHOLTZ der erste, der in einem Spezialfalle, für den optischen Apparat des Auges, die E.-P. und A.-P. konstruierte und ihre Bedeutung für die Perspektive und die Größe der Undeutlichkeitskreise nicht eingestellter Objekte erkannte. Die eigentliche Begründung und systematische Durchführung der Theorie der Strahlenbegrenzung ist auf ABBE zurückzuführen, der sie in seinen Universitätsvorlesungen und in den oben genannten Abhandlungen entwickelte.

VIII. Das Auge.

So wichtig einzelne Fragen der Physiologie des Auges auch für die Theorie der optischen Instrumente sind, so müssen wir doch auf ihre Darstellung verzichten. Auch eine Dioptrik des Auges kann im folgenden nicht geliefert werden, soweit sie sich von der künstlicher, zentrierter Systeme entfernt, insbesondere ist eine Analyse der darauf bezüglichen theoretischen Arbeiten GULLSTRANDS im Rahmen dieses Buches unmöglich. Wir müssen uns mit einer Beschreibung des optischen Apparates im Auge und einer kurzen Charakteristik seiner Wirkungsweise begnügen und verweisen auf HELMHOLTZ' klassisches Handbuch[1] und, wegen der neueren Ergebnisse der Dioptrik des Auges, auf die Darstellung von C. HESS[2].

Das optische System im Auge.

In der Reihenfolge von außen nach innen trifft man zunächst auf die Hornhaut (*Cornea*) *C* (Figur 71; rechtes Auge; Horizontalschnitt). Dieselbe bildet den vordersten, stärker gewölbten und durchsichtigen Teil der Sehnenhaut (*Sclerotica*) *S*, welche den gesamten Augapfel umschließt. Sie ist etwa 1 mm dick (bei verschiedenen Messungen ergaben sich Werte ungefähr zwischen 0,5 und 1,5 mm). In der Mitte besitzt ihre Vorderfläche eine nahezu kugelige Stelle mit einem Krümmungsradius von 7—8,5 mm, die in horizontaler Richtung ca. 4 mm Durchmesser hat, in vertikaler etwas geringeren (die optische Zone der Hornhaut); nach außen wird sie mehr und mehr abgeflacht, ohne daß eine vertikale oder horizontale Symmetrieachse existiert. Die optische Zone ist gegen die Gesichtslinie (s. u.) dezentriert.



Figur 71.
Das rechte Auge im Horizontalschnitt.

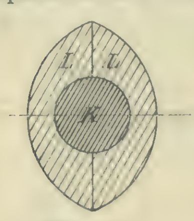
[1] H. v. HELMHOLTZ, Handb. d. phys. Optik. 2. Aufl. Hamburg u. Leipzig 1885—96. — [2] C. HESS, Die Anomalien der Refraktion und Akkommodation des Auges mit einleitender

Die hintere Hornhautfläche besitzt einen nach TSCHERNING um 2 mm kleineren Radius als die vordere.

Die Hornhaut ist die vordere Wand der Augenkammer, A, die mit einer Flüssigkeit (*Humor aqueus*) vom Index $n_D = 1,3365$ gefüllt ist. Die Hinterwand der Kammer wird von der Iris, I, gebildet, die die Aperturblende des Auges ist (Öffnung gewöhnlich zwischen 2 und 5 mm) und in deren mittlerem freien Teile von der sich an diese anlegenden Kristallinse L. Die letztere ist bikonvex, im Ruhezustande an der vorderen Fläche erheblich weniger gekrümmt als an der hinteren, im Akkommodationszustande nahezu gleichschenklig (nähere Angaben s. in der unten folgenden Tabelle). Sie besteht zwiebelartig aus sehr dünnen Schichten, deren Indizes von der Hülle nach innen, dem Kern hin, zunehmen; dieser Textur verdankt sie mehrere wichtige Eigenschaften. Die Linse begrenzt nach vorn zu den zweiten Hohlraum des Auges, der mit dem Glaskörper (*Humor vitreus*) Q, einer gallertartigen Masse von nahezu demselben Index wie das Kammerwasser, ausgefüllt ist. Die hintere Begrenzung dieses Raumes wird von der Netzhaut (*Retina*) N, gebildet, der innersten Auskleidung der Sehnenhaut. Diese ist der lichtempfindliche Schirm des Auges, auf dem dessen optischer Apparat die Bilder der äußeren Gegenstände entwirft. Besonders emfindlich ist der nicht ganz in der Augenachse, sondern etwas nach der Schläfe zu gelegene gelbe Fleck (*Macula lutea*) M mit einer dünnen, etwas vertieften Stelle, der Netzhautgrube (*Fovea centralis*), in der Mitte. Auf dieser Stelle wird das Bild desjenigen Gegenstandes entworfen, den das Auge fixiert, d. h. den man besonders scharf zu sehen sucht.

Da der Brechungsexponent des Kammerwassers wenig abweicht von dem der Hornhaut, so vernachlässigt man gewöhnlich die an der Hinterfläche stattfindende Brechung und betrachtet die Vorderfläche der Hornhaut als die eines Mediums vom Index des Kammerwassers, das bis zur Kristallinse reicht. Die so berechnete Brennweite der Hornhaut (s. die Tabelle unten) ist maßgebend für das Sehen aphakischer Augen, d. h. solcher, die durch eine Operation der Kristallinse beraubt sind, da das Kammerwasser auch nahezu denselben Index hat wie der Glaskörper, der alsdann das ganze Augeninnere ausfüllt.

Die Kristallinse hat infolge ihres geschichteten Baues, wie schon die älteren experimentellen Untersuchungen von YOUNG, LISTING, SENFF, HELMHOLTZ, ZEHENDER erwiesen und die theoretischen Arbeiten namentlich von HERMANN und MATTHIESSEN erklärt haben, eine kürzere Brennweite, als wenn sie bei gleicher äußerer Gestalt durchweg den größten in ihr vorkommenden Brechungsindex, den des Kernes, besäße. Ihre Brennweiten (aber nicht genau auch ihre anderen Kardinalpunkte) sind die einer gleichgeformten homogenen Linse von noch höherem Index als dem des Kernes, dem sogen. Totalindex.



Figur 72. Die Linse des Auges, schematisch.

L. HERMANN[1] gibt hierfür folgende schematische Erklärung: Die Krümmungder aufeinander folgenden Schichten nimmt bis zum Kern natürlich immer zu. Die Schichten bilden daher lauter konvexkonkave Menisken, die in Luft negative (vordere) Brennweite haben würden. Denkt man sich im einfachsten Falle die Linse bestehend aus einem kugeligen Kern K (Figur 72) von hohem Index, der von zwei konkavkonvexen Zerstreuungslinsen L niederen Indicis schalenartig umgeben ist, so kompensieren letztere einen Teil der positiven Brechungswirkung des Kernes. Diese Kompensation ist um so stärker, je höher der Index der Schalen ist und umgekehrt. Folglich ist die Brennweite der ganzen Linse kleiner, wenn die Schalen

Darstellung der Dioptrik des Auges (Kap. XII von GRAEFE-SAEMISCHS Handbuch der gesamten Augenheilkunde, Leipzig 1902).

[1] L. HERMANN, Schiefer Durchgang von Strahlenbündeln. Gratul.-Schrift. Zürich 1874.

geringeren Index haben als der Kern, wie wenn sie gleichen hätten (vgl. auch HELMHOLTZ, p. 93).

Systeme, in denen der Brechungsexponent des Materials sich stetig ändert, bedürfen einer besonderen Betrachtung; sie geben Wirkungen, die wie die hier besprochene beim ersten Anblick etwas Paradoxes haben. Z. B. wirkt ein Zylinder mit planen Endflächen durch diese hindurch als Konvex- oder Konkavlinse, je nachdem der Brechungsexponent im Zylinder von der Achse nach dem Mantel hin konzentrisch abnimmt oder wächst.

L. MATTHIESSEN[1] machte wahrscheinlich, daß die Brechungsindizes n in den Schichten der Kristallinse das Gesetz befolgen:

$$(1) \qquad n = N_1 \left(1 + \zeta \frac{b^2 - y^2}{b^2}\right) \quad ,$$

wo N_1 der Index der äußersten (Kortikal-)schicht ist, b ihre Entfernung vom Kern, y die Kerndistanz der Schicht vom Index n und ζ das „Inkrement" des Brechungsindex, nämlich wenn N_m der Index des Kernzentrums ist, wird N_1 definiert durch die Gleichung

$$(2) \qquad N_m = N_1 (1 + \zeta) \quad .$$

Der Totalindex N ergibt sich aus MATTHIESSENS Theorie zu

$$(3) \qquad N = N_1 \left(1 + 2\zeta + \frac{4}{3} \zeta^2 \frac{b_1 + b_2}{r_1 + r_2}\right) \quad ,$$

wo die Indizes 1 und 2 sich auf Vorder- und Hinterfläche der Linse beziehen. Die Kardinalelemente des Auges werden unter dieser Annahme durch relativ einfache Ausdrücke dargestellt. Nach den sehr zuverlässigen Messungen von MÖNNICH ist beim Rindsauge $N_1 = 1{,}387$, $\zeta = 0{,}057$ zu setzen, beim Menschen nach MATTHIESSEN $N_1 = 1{,}385$, $\zeta = 0{,}0186$, wonach hier $N = 1{,}4367$ würde.

HELMHOLTZ nannte die nach dem vorderen Knotenpunkt des Auges zielenden Geraden die Richtungslinien; ihnen entsprechen im Auge gebrochene parallele Strahlen. Die nach der Stelle des direkten Sehens (Fixierens) gebrochene Richtungslinie heißt auch die Gesichtslinie.

Die Richtungslinien besitzen natürlich nur für die graphische Veranschaulichung oder Konstruktion Bedeutung.

Das schematische Auge.

Aus den Messungen verschiedener Beobachter hat zuerst LISTING, später HELMHOLTZ Mittelwerte für die Dimensionen und Indizes der brechenden Medien im Auge abgeleitet, aus denen sich dann die Kardinalelemente seiner Bestandteile und des Ganzen berechnen ließen. Die folgende Zusammenstellung ist die zuletzt von HELMHOLTZ gegebene. Wir bemerken zu dieser Tabelle, daß die Resultate der einzelnen Beobachter sowohl in ihren Durchschnittswerten von einander ziemlich erheblich abweichen, als auch eine über Erwarten große individuelle Variabilität, namentlich in den Dimensionen verschiedener Augen erwiesen haben, wenn man in Betracht zieht, von wie vielen Faktoren die

[1] L. MATTHIESSEN, v. GRAEFES Archiv f. Ophthalm. **22.** 131. 1876; **31.** 34. 1885; Grundriß der Dioptrik geschichteter Linsensysteme. Leipzig 1877. PFLÜGERS Archiv **19.** 480. 1879; **36.** 79. 1885; SCHLÖMILCHS Ztschr. f. Math. u. Phys. **24.** 138. 1879; **26.** 179. 1881; EXNERS Repert. de Phys. **22.** 333. 1886; **24.** 401. 1888; **25.** 663. 1889; BERLIN-EVERSBUSCHS Ztschr. f. vergl. Augenheilk. **4.** 1. 1887; **5.** 21. 97. 123. 1887; **6.** 103. 1889; Beiträge zur Dioptrik der Kristallinse, 3. Folge. Wiesbaden 1890; BERLIN-EVERSBUSCHS Ztschr. f. vergl. Augenheilkde. **7.** 145. 1892; ibid. 1893. p. 102. Über gleichgerichtete Bestrebungen anderer s. die Literaturangaben in der dritten oben genannten Abhandlung und die Referate v. M. in MICHELS Jahresberichten der Ophthalmol. von Bd. 8. 1879 (für 1877) an.

Gesamtwirkung des Auges abhängt, und daß diese doch trotz jener Variationen im allgemeinen sehr gut ist. Wir setzen zur Illustration dessen neben die Helmholtzschen Durchschnittswerte diejenigen, welche Tscherning[1] an einem Individuum durch sehr sorgfältige Messungen ermittelt hat.

Die Dimensionen und Konstanten des Menschenauges.

	Helmholtz		Tscherning
	Akkom. f. Ferne	Akkom. f. Nähe	
Gemessen:			
1. Brechungsvermögen der Hornhaut . . .	—	—	1,377
2. Brechungsvermögen des Kammerwassers und Glaskörpers	1,3365	1,3365	1,3365
3. Totales Brechungsvermögen der Kristalllinse	1,4371	1,4371	1,42
4. Krümmungsradius der vorderen Hornhautfläche	7,8 mm	7,8 mm	8,0 mm
5. Krümmungsradius der vorderen Linsenfläche	10,0 „	6,0 „	10,2 „
6. Krümmungsradius der hinteren Linsenfläche	6,0 „	5,5 „	6,2 „
7. Ort der vorderen Linsenfläche } gegenüber dem Hornhautscheitel	3,6 „	3.2 „	3,5 „
8. Ort der hinteren Linsenfläche } gegenüber dem Hornhautscheitel	7,2 „	7,2 „	7,6 „
Berechnet:			
9. Vordere Brennweite der Hornhaut . . .	23,3 „	23,3 „	24,4 „
10. Hintere Brennweite der Hornhaut . . .	31,1 „	31,1 „	32,6 „
11. Brennweite der Linse	50,6 „	39,1 „	62,5 „
12. Abstand des vorderen Hauptpunktes der Linse von ihrer Vorderfläche	2,1 „	2,0 „	2,4 „
13. Abstand des hinteren von der Hinterfläche	− 1,3 „	− 1,8 „	− 1,5 „
14. Abstand der beiden Hauptpunkte der Linse von einander	0,2 „	0,2 „	0,2 „
15. Hintere Brennweite des Auges	20,7 „	18,7 „	22,9 „
16. Vordere Brennweite des Auges	15,5 „	14,0 „	17,1 „
17. Ort des ersten Hauptpunktes gegenüber dem Hornhautscheitel	1,75 „	1,9 „	1,5 „
18. Ort des zweiten Hauptpunktes	2,1 „	2,3 „	1,9 „
19. Ort des ersten Knotenpunktes	7,0 „	6,6 „	7,3 „
20. Ort des zweiten Knotenpunktes	7,3 „	7,0 „	7,6 „
21. Ort des vorderen Brennpunktes	− 13,7 „	− 12,1 „	− 15,6 „
22. Ort des hinteren Brennpunktes	22,8 „	21,0 „	24,75 „
23. Fernpunkt des aphakischen Auges . . .	− 63,5 „		− 73,9 „

Unter Benutzung der von Stadfeldt[2] mitgeteilten Zahlen erhält Hess[3] folgende Werte für die Stärke der einzelnen Systeme, aus denen das Auge zusammengesetzt gedacht werden kann:

Hornhaut + Kammerwasser . . .	= 42,48	Dioptrien
Vorderfläche der Linse	= 9,013	„
Hinterfläche der Linse	= 16,45	„
Die ganze Linse	= 25,089	„
Das ganze Auge	= 62,738	„

Das reduzierte Auge.

Da sowohl die Hauptpunkte als die Knotenpunkte des Auges einander sehr nahe liegen, so begnügt man sich für die meisten Fälle der Anwendung nach dem Vorschlag Listings[4] mit der Annahme eines einfacheren Baues des Auges, mit dem sogen. reduzierten Auge. Listing läßt die Entfernung zwischen den

[1] Th. Tscherning, Ztschr. f. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorgane **3**. 485. 1892. — [2] Stadfeld, Den menneskelige Linses optiske constanter. Kopenhagen 1898. — [3] C. Hess, l. c., p. 34. — [4] J. B. Listing, Beitr. z. physiol. Optik. Göttinger Studien 1848.

beiden Brennpunkten ungeändert, vereinigt das Paar der Haupt- und Knotenpunkte in je einem mittleren Punkte und nimmt das ganze Auge als aus einem Medium vom Index des Glaskörpers bestehend an. Diesem Schema entspricht eine brechende Oberfläche, welche die Achse im vereinigten Hauptpunkte schneidet, und deren Zentrum im Knotenpunkte liegt. In runden Zahlen würde der Krümmungsradius dieser Fläche = 5 mm, der Abstand ihres Mittelpunktes von dem zweiten Brennpunkt (Netzhaut) = 15 mm.

Die Akkommodation.

Ein normales Auge ist imstande, sich auf verschieden entfernte Gegenstände einzustellen. Man beobachtet bei der Einstellung auf nähere Gegenstände eine Verengerung der Pupille, ein Vorrücken des vorderen Linsenscheitels, eine Zunahme der Krümmung der vorderen und hinteren Linsenfläche. Über den verwickelten Mechanismus dieser Veränderungen vgl. v. HELMHOLTZ, l. c., p. 130 ff., und HESS, l. c., p. 208.

Das Auge ist also ein kollektives System von etwas variabler Brennweite. Vermöge dieser Variabilität kann es (nach einander!) auf der Netzhaut scharfe (umgekehrte, verkleinerte) Bilder von Gegenständen entwerfen, die sich in verschiedener Entfernung von ihm befinden. Wir beriefen uns auf diese Fähigkeit der Akkommodation schon früher, p. 258, und bezeichneten nach DONDERS[1] den dem Auge nächsten Punkt, für den eine vollständige Akkommodation ausgeführt werden kann, als Nahepunkt, den entferntesten als Fernpunkt der Akkommodation. Augen, deren Fernpunkt im Unendlichen liegt, bezeichnet DONDERS als emmetropische, solche, bei denen er eine andere Lage hat, als ametropische. Und zwar nannte er ein Auge, dessen Fernpunkt vor ihm, aber in endlicher Entfernung liegt, myopisch, ein solches, in welchem er hinter ihm liegt, hypermetropisch; letzteres vereinigt also auch noch konvergierende Büschel auf der Netzhaut. (Der Grund dieser Anomalien beruht meistens in einer verschiedenen Länge der Augenachsen.)

Der Grad der Myopie oder Hypermetropie wird durch die reziproke Brennweite (Stärke) der vor das Auge zu setzenden dünnen Hilfslinse (Brille) bemessen, welche den Fehler korrigiert, diese Stärke in Metern gerechnet (Dioptrien).

Das Akkommodationsvermögen[2].

Ist N der nächste und F der fernste Punkt, auf den das Auge akkommodieren kann — diese beiden Punkte werden in der Regel *Nahepunkt* und *Fernpunkt* genannt —, so sind ihre Abstände vom vorderen Hauptpunkte H des Auges

$$\mathsf{HN} = \mathsf{p} \quad ; \qquad \mathsf{HF} = \mathsf{r} \quad ,$$

und wir erhalten als *Akkommodationsgebiet* (auch wohl *Akkommodationsbereich* oder *-tiefe* genannt)

$$\mathsf{NF} = \mathsf{NH} + \mathsf{HF} = \mathsf{r} - \mathsf{p} \quad .$$

Als *Akkommodationsvermögen* $1/A$ (von Ophthalmologen s. C. HESS p. 237 nach DONDERS meistens *Akkommodationsbreite* genannt) wird definiert

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{\mathsf{p}} - \frac{1}{\mathsf{r}} = \frac{\mathsf{r} - \mathsf{p}}{\mathsf{rp}} \quad .$$

Dann ist A nach p. 85 die Brennweite einer im vorderen Hauptpunkte H des Auges zu denkenden dünnen Linse, die F in N abbildet, und man gibt $1/A$ in Dioptrien an.

[1] F. C. DONDERS, On the anomalies of accommodation and refraction of the eye. London 1864. — [2] Der Abschnitt über das Akkommodationsvermögen ist von M. v. ROHR verfaßt.

Die mit zunehmendem Alter immer merklicher werdende Abnahme des Akkommodationsvermögens bezeichnet Donders als *Presbyopie.* Sie wird im wesentlichen durch das Wegrücken des Nahepunktes vom Auge hervorgebracht. Eine graphische Darstellung der Verschiebung von Nahe- und Fernpunkt mit dem Lebensalter findet sich nach den Dondersschen Zahlen bei C. Hess p. 246. Im zehnten Lebensjahre beträgt das Akkommodationsvermögen im Mittel 13,5 Dioptrien.

Die Strahlenbegrenzung im Auge.

Die Aperturblende des Auges ist die Iris; für das Gesichtsfeld liegt keine Begrenzung vor, da die optischen Medien (Hornhaut, Linse) des Auges auch die senkrecht zur Achse einfallenden Strahlenbüschel noch hindurchlassen, und z. B. auch die Linsenränder keine Abblendung des Sehfeldes herbeiführen. Die Eintrittspupille — hier schlechthin Pupille genannt — ist das von dem System Hornhaut-Kammerwasser nach der Objektseite entworfene Bild der Iris. Nimmt man an, daß die Mitte der Iris mit dem Linsenscheitel zusammenfalle und setzt einen für das Kammerwasser und die Hornhaut gemeinsamen Brechungsexponenten von $n = 1{,}337$ voraus, so ergibt sich als Abstand der Augenpupille von dem Hornhautscheitel beim Sehen in die Ferne 3,05 mm, beim Sehen in die Nähe 2,67 mm. Die Vergrößerung des Irisdurchmessers ist im ersten Falle 1,131-, im zweiten 1,115-fach. Die A.-P. des Auges ist das von der Kristalllinse im Glaskörper entworfene Bild der Iris. Bei der weiter unten zu gebenden Behandlung werden wir die Verschiebungen nicht zu kennen brauchen, die die A.-P. bei der Akkommodation erfährt. Wir geben sie daher hier auch nicht an.

Die E.-P. ist der Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen, hier Visierlinien genannt, d. h. sie ist der Punkt, von welchem aus das ruhende Auge die scheinbare Größe der Gegenstände mißt. Seine Kenntnis ist also notwendig, wo es sich darum handelt, die Stellen im Raume zu finden, deren gleichzeitige Bilder auf der Netzhaut Zerstreuungskreise mit koinzidierenden Mittelpunkten sind. Das Aufsuchen solcher Stellen zum Zwecke der Feststellung der Geradlinigkeit einer Strecke im Raume heißt Visieren, die Hauptstrahlen des Auges sind daher von Helmholtz Visierlinien genannt worden. Die Pupille ist nach den Auseinandersetzungen von p. 250 u. 252 das Zentrum der Perspektive für das vom ruhenden Auge erhaltene Bild (oder für das indirekte Sehen, s. w. u.).

Das Gesichtsfeld des Auges ist größer als das irgend eines anderen optischen Instruments, Infolge des Hervorstehens der Hornhaut und ihrer kollektiven Brechung können noch Strahlen ins Auge gelangen, die senkrecht zu dessen Achse eintreten. Im lebenden Auge wird ein Teil des Gesichtsfeldes durch Nase, Augenbrauen und Wangen verdeckt, so daß nur etwa 150^0 frei bleiben; doch beherrschen beide Augen zusammen in jeder Stellung immer noch ein Feld von 180^0. Da für das Gesichtsfeld, wie bemerkt, eine besondere Blende im Auge nicht vorhanden ist, so ist dasselbe nicht scharf begrenzt, sondern geht allmählich in Dunkelheit über. Denn je schiefer ein Büschel auf das Auge fällt, desto schmäler ist die Projektion der Pupille auf seinen Querschnitt, welche die Basis des abbildenden Büschels bildet, desto lichtschwächer also die betreffende Stelle des Sehfeldes. Außerdem aber besitzt die Netzhaut schon in geringer Entfernung von der Grube eine viel geringere Empfindlichkeit gegen Intensität wie Qualität von Lichtreizen, die noch viel bedeutender ist als die objektive Undeutlichkeit der Netzhautbilder. „Das Auge stellt" daher, wie Helmholtz sagt (l. c. p. 87), „ein optisches Werkzeug von sehr großem Gesichtsfelde dar, aber nur in einer kleinen, sehr eng begrenzten Stelle dieses Gesichtsfeldes sind die Bilder deutlich. Das ganze Bild entspricht einer Zeichnung, in der zwar der wichtigste Teil des Ganzen sorgfältig ausgeführt, die Umgebungen aber nur skizziert, und zwar desto roher skizziert sind, je weiter sie von dem Hauptgegen-

stande abstehen. Durch die Beweglichkeit des Auges wird es aber möglich, nach einander jeden einzelnen Punkt des Gesichtsfeldes genau zu betrachten."

Die Apertur der bildseitigen Büschel im Auge ist bei einem Pupillendurchmesser von 4 mm = 0,15; die der objektseitigen variiert natürlich mit dem Objektabstand.

Die Tiefenschärfe des Auges[1].

Die Gesamttiefe des Auges, von CZERMAK nach C. HESS' Angabe p. 101 *Akkommodationslinie* genannt, läßt sich leicht aus der allgemeinen Formel auf p. 250 angeben, wenn man ein angulares Maß für die noch unbemerkbare Unschärfe festgesetzt hat. Ist dieses durch den Winkel der Sehschärfe ζ geschehen, so wird der auf der E.-E. (das ist hier die Ebene, auf die das Auge akkommodiert) zulässige Durchmesser der Zerstreuungskreise zu

$$z = \xi \zeta \quad ,$$

und wir erhalten aus (10), (11) und (12) auf p. 255/56 die drei zusammengehörigen Formeln:

$$t_v = \frac{\xi \zeta}{(p/\xi) + \zeta} \quad ; \qquad t_r = \frac{\xi \zeta}{(p/\xi) - \zeta} \quad ; \qquad t = \frac{2 p \zeta}{(p/\xi)^2 - \zeta^2} \quad .$$

Die Hintertiefe erstreckt sich in das Unendliche für $p = \xi \zeta$, d. h. dann, wenn das Auge für $\xi = p/\zeta$ akkommodiert. In diesem Falle reicht die Vordertiefe bis in eine Entfernung vom Auge, die bestimmt wird durch

$$\xi - t_v = \xi - \frac{\xi}{2} = \frac{\xi}{2} \quad .$$

Nehmen wir, um eine größere Anschaulichkeit zu erhalten, an, daß der Pupillendurchmesser $p = 4$ mm und die Sehschärfe $\zeta = 1'$ sei, so müssen wir für diesen letzterwähnten Fall auf die Entfernung von 13,75 m akkommodieren, und die Schärfe reicht nach hinten bis ∞ und nach vorn bis in eine Entfernung von 6,88 m vom Auge. Bei einer Akkommodation auf 360 mm und einer Annahme der gleichen Werte für den Pupillendurchmesser und die Sehschärfe ist der Betrag der Gesamttiefe nur etwa 18,8 mm.

Die Augenbewegungen.

Der Augapfel ist in seiner Höhlung so eingebettet, daß er zwar keine Parallelverschiebungen, aber Drehungen nach Art eines Kugelgelenks ausführen kann. Um eine Stelle deutlich zu sehen, fixieren wir sie, d. h. wir wenden den Augapfel so, daß ihr Bild auf die Fovea centralis zu liegen kommt. Man sagt dann, daß wir diese Stelle direkt sehen, während wir ihre Umgebung im indirekten Sehen ebenfalls noch, wenn auch mit abnehmender Deutlichkeit, erkennen können. Da das Sehen mit bewegtem Auge auch blicken heißt, nannte HELMHOLTZ die direkt gesehene Stelle den Blickpunkt; seine Verbindung mit dem Augendrehungspunkte die Blicklinie. Das Feld, das der Blickpunkt durchlaufen kann, heißt das Blickfeld; es beträgt 30—50° nach jeder Seite und etwas weniger nach oben und unten, ist also kleiner als das Gesichtsfeld des ruhenden Auges, das „Sehfeld" nach HELMHOLTZ. Auf die Gesetze der Augendrehungen können wir hier nicht eingehen.

Zur Wahrnehmung der Umgebung trägt meistens das Blicken viel mehr als das indirekte Sehen bei. Beim Blicken baut man sich ein Bild der Umgebung aus einzelnen, nach einander gesehenen Bildstücken auf. Das Zentrum der Pe-

[1] Der Abschnitt über die Tiefenschärfe des Auges ist von M. v. ROHR verfaßt.

spektive des Bildes, das man sich so aus den nach einander direkt gesehenen Objekten zusammensetzt, kurz, das Zentrum der Perspektive im direkten Sehen, steht zur Einrichtung des optischen Apparates in keiner Beziehung; es liegt im Drehpunkte des Auges (Helmholtz, p. 127); in dem so entstehenden Bilde werden sich solche Objekte decken, die auf derselben Blicklinie liegen. (Der Drehpunkt liegt etwa 13—14 mm hinter dem Hornhautscheitel). Es übernehmen also in dem durch Blicken erzeugten Bilde der Drehpunkt und die Blicklinie die Funktionen, die die Pupille und die Visierlinien beim Sehen mit ruhendem Auge besitzen, und es existiert eine „Parallaxe" zwischen der scheinbaren Lage der Objekte bei direktem und indirektem Sehen, die Listing zuerst bemerkte, der aber statt der Pupille den vorderen Knotenpunkt in Betracht zog (vgl. Helmholtz, p. 729).

Da der Blick übrigens keinen Teil des Blickfeldes vollständig und stetig durchläuft, so kann kein Teil der Umgebung vollkommen, Punkt für Punkt, direkt gesehen werden. Das Bild setzt sich vielmehr aus den nach einander gesehenen Stücken mosaikartig zusammen, während in den einzelnen Stücken das indirekte Sehen zur Geltung kommt. Es gleicht also einer aus einzelnen Blättern zusammengesetzten Zeichnung; und diese Blätter sind von verschiedenen, aber einander sehr nahe gelegenen Punkten aufgenommen (den verschiedenen Orten, die die E.-P. bei der Drehung nach einander einnahm) und nachher so neben einander gelegt worden (wobei sie sich vielfach überdecken), daß die wichtigsten Punkte des Ganzen (die eben Blickpunkte gewesen sind) von einem anderen nahe gelegenen Punkte (dem Augendrehungspunkte) als Zentrum der Perspektive aufgenommen erscheinen.

Eine ähnliche Rolle wie die Drehungen des Auges spielen die Drehungen des Kopfes.

Die dioptrischen Fehler des Auges.

Die monochromatischen Aberrationen.

Die „optische Zone der Hornhaut" ist angenähert sphärisch. Diejenige ihrer Normalen, die durch die Pupillenmitte geht, die also etwa die Symmetrieachse für die erste Brechung ist, scheint bei normalen Augen auch auf den folgenden brechenden Flächen annähernd senkrecht zu stehen. Gullstrand nennt diese Linie die optische Achse des Auges. Auch scheint diese optische Achse in vielen Fällen annähernd eine Symmetrieachse für den optischen Apparat des Auges zu sein. Sie trifft aber nicht in die Fovea centralis, sondern bildet mit derjenigen Visierlinie, die im Objektraum vom Bildpunkt ausgeht, im Glaskörper auf die Mitte der Netzhautgrube zielt, einen Winkel, indem die optische Achse meist 4—7° nach außen und 2—3° nach unten von dieser Linie verläuft.

Dieser Winkel ist so klein, daß der durch den schiefen Einfall eines Elementarbüschels entstehende Astigmatismus nicht in Betracht kommt.

Die Ausdehnung der Stelle feiner Empfindlichkeit auf der Netzhaut ist andererseits so gering, daß auch die Bilder seitlich gelegener Objekte soweit sie zum Bewußtsein gelangen können, kaum einen bedeutenden Astigmatismus im Sinne von p. 23 aufweisen werden[1].

---

[1] Wegen des großen Gesichtsfeldes des Auges ist die Abbildung seitlicher Objekte immerhin der Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen. Als allgemeines Resultat derselben kann ausgesprochen werden, daß namentlich der Schichtenbau der Kristallinse einer Verminderung des Astigmatismus schiefer Büschel ganz besonders günstig ist. Dieser Astigmatismus ist zwar im Auge nicht aufgehoben, aber er ist erheblich geringer, als er bei homogener Linse wäre. L. Hermann, Über schiefen Durchgang von Strahlenbüscheln und eine darauf bezügliche Eigenschaft der Kristallinse. Zürich 1874; Pogg. Ann. **153.** 470. 1874 und Pflügers Arch. f. d. ges. Physiol. **18.** 443. 1878. Stammeshaus, Über die Lage der Netzhautschale zur Brennfläche des dioptrischen Systems des menschlichen Auges, Arch. f. Ophthalm. **20.** 147. 1874. Schön, Brechung seitlich einfallender Strahlen in die Linse, Sitzber. Heidelb. ophthalm. Ges. in Klin. Monatsber. f. Augenheilk. 1877, p. 178, Arch. f. Anat. u. Physiol. p. 146. 1877. A. Fick, Zur Periskopie des Auges. Pflügers Arch. f. d. ges. Physiol. **19.** 145. 1879. W. Rasmus und A. Wauer, Mathematische Theorie der Periskopie des menschlichen Auges, Arch. f. d.

Der Astigmatismus in dem früheren (und noch jetzt festgehaltenen) Sinne dieses Wortes spielt also in normalen Augen kaum eine Rolle; andererseits reicht für die „astigmatischen" Augen, in denen meist eine in zwei verschiedenen aufeinander senkrechten Meridianen der Hornhaut verschiedene Krümmung besteht, diese Theorie des astigmatischen Elementarbüschels nicht aus, um die beobachteten Erscheinungen zu erklären. Die Erklärung der Aberrationen normaler sowie anormaler Augen ist vielmehr erst möglich geworden durch die Berücksichtigung höherer Potenzen der Öffnung der Büschel. Dies ist das Werk GULLSTRANDS[1], der dadurch zahlreiche frühere Beobachtungen[2] verständlich gemacht hat, wobei Erscheinungen, die früher als „irregulärer Astigmatismus" angesehen wurden, sich aus der Theorie ergaben und die Methoden der Untersuchung und Korrektion astigmatischer Augen kritisch beleuchtet wurden.

GULLSTRAND hat das allgemeine optische Elementarbüschel mit geringeren Vernachlässigungen untersucht als die dem STURMschen Satze zugrunde liegen (vgl. p. 24, auch die dort zitierten Arbeiten MATTHIESSENS, sowie die von REUSCH und ZECH, p. 191).

Vernachlässigt man erst die nächste Ordnung, so existiert, wie wir (l. c.) erwähnt haben, im allgemeinen Falle keine Brennlinie, es gehen Brennflächenstücke durch die Brennpunkte des Hauptstrahles. In besonderen Fällen kann das Büschel aber Symmetrieebenen besitzen. Ist es zu einer Ebene symmetrisch, wie z. B. ein ursprünglich homozentrisches Büschel, das schief an einer Kugelfläche gebrochen ist, so wird es bei der genannten Vernachlässigung nur eine Brennlinie aufweisen, und diese wird schief zur Büschelachse stehen, entsprechend den auf p. 24 und 94 gemachten Bemerkungen. Bei der Existenz zweier Symmetrieebenen zeigt das Büschel, z. B. ein durch normale Brechung an einer doppelt gekrümmten Fläche entstandenes, die dem STURMschen Satze entsprechende Konstitution trotz der weiteren Berücksichtigung der Öffnung. Jedoch hat diese Berücksichtigung zur Folge, daß ein astigmatisches Büschel, auch wenn es durch geeignete Brechungen homozentrisch gemacht wird, noch von einem achsensymmetrischen verschieden bleibt; ein Büschel wird im allgemeinen nie um eine Ebene symmetrisch gemacht werden, um die es nicht vor der Brechung symmetrisch war.

Durch weitere Berücksichtigung der nächsthöheren Potenz erhält GULLSTRAND die „Aberrationen" eines beliebigen Strahlenbüschels, wir müssen uns hier mit dem Hinweise auf die genannte inhaltsreiche Abhandlung begnügen und erwähnen nur vergleichshalber, daß sich ein normales Auge etwa bei maximal erweiterter Pupille (8 mm Durchmesser) als sphärisch korrigiert im Sinne von p. 153 erwiesen hat und zwar mit demselben Zonenfehler, den wir bei künstlichen Instrumenten vorfinden, daß es sich also bei der gewöhnlichen Pupillenöffnung unterkorrigiert zeigte.

Chromatische Abweichungen. Das Auge ist nicht achromatisch, und zwar in keinem Sinne: weder die Orte noch die Größen der verschiedenfarbigen Bilder sind identisch. In der Tat wies schon DOLLOND[3] darauf hin, daß im Auge eine Kompensation der Farbenabweichungen nicht statthaben könne,

ges. Physiol. **20.** 264. L. MATTHIESSEN, Geometrische Gestalt der theoretischen Retina des periskopischen schematischen Auges. v. GRAEFES Arch. f. Ophth. **25.** 257. 1879. A. GLEICHEN. Die Scheitelkrümmung der Bilder auf der Netzhaut des Auges unter Berücksichtigung der Linsenschichtung. Verh. d. phys. Ges. **4.** 13. 1902.

[1] A. GULLSTRAND. Über Fernlinien bei Astigmatismus. Nord. ophth. Tidsskr. **3.** 1. 1890. Beitrag zur Theorie des Astigmatismus, Skand. Arch. f. Phys. **2.** 269. 1890; Allgemeine Theorie der monochromatischen Aberrationen und ihre nächsten Ergebnisse für die Ophthalmologie. Upsala 1900; Die Konstitution des im Auge gebrochenen Strahlenbündels, Arch. f. Ophth. **53.** II. 185. 1901. — [2] M. TSCHERNING, Die monochrom. Aberrationen des menschl. Auges. Ztschr. f. Psychol. u. Physiol. der Sinnesorgane **6.** 456. 1893. — [3] DOLLOND, Phil. Trans. **79.** 256. 1789.

da alle Brechungen nach der Achse des Systems hin geschähen, wobei jedesmal die Ablenkung der violetten Strahlen stärker sei als die der roten, was für die damals bekannten bezw. untersuchten Medien zutreffend ist. Die Tatsache der Farbenzerstreuung im Auge war schon Newton[1] bekannt.

Fraunhofer[2], Helmholtz[3] und A. Matthiessen[4] maßen die Differenz der Sehweiten für Objekte in verschiedenfarbiger monochromatischer Beleuchtung und berechneten aus diesen Versuchen, daß die Fokusdifferenz des Auges für rotes und violettes Licht noch größer sei als diejenige in Listings reduziertem Auge, wenn man dessen Medium die Dispersion des Wassers zuerteilt. (0,58 bis 0,62 mm gegen 0,43 bei diesem.) M. Wolff[5] fand zwischen den Linien B und H 0,75, zwischen C und G 0,5 mm Fokusdifferenz. Kunst[6] hat die Dispersion der sämtlichen Augenmedien zwischen D und F gemessen und Einthoven[7] hat daraus für das schematische Auge eine Fokusdifferenz von 0,2719 mm erhalten (für das reduzierte Auge beträgt sie 0,193 mm).

Einer Längsabweichung von 0,6 mm entspricht bei einem Pupillendurchmesser von 4 mm ein Zerstreuungskreis von linear ca. 0,04 mm, angular 8,8′. Einen ebenso großen Zerstreuungskreis würde ein auf unendlich akkommodiertes Auge von einem in 1,5 m befindlichen monochromatisch leuchtenden Punkte — infolge von Fokusdifferenz — erhalten. Daß man ersteren gewöhnlich nicht wahrnimmt, während der letztere sehr wohl merklich ist, rührt hauptsächlich daher, daß das Auge für die verschiedenen Wellenlängen sehr ungleich empfindlich ist, und zwar ist es dies desto weniger, je mehr sich die Wellenlänge nach beiden Seiten des Spektrums hin von einem gewissen Maximum (nach den Messungen von A. König $\lambda = 0{,}53\ \mu$) entfernt. Infolge dessen werden die den roten und violetten Wellenlängen entsprechenden größeren Zerstreuungskreise nicht wahrgenommen gegenüber den sehr viel intensiveren, aber kleineren gelben und grünen, die schließlich allein maßgebend werden.

Am auffallendsten werden diese Erscheinungen, auch in weißer Beleuchtung, bei halbverdeckter Pupille[8]. Für die Chromasie der Brennweiten (Differenz der Vergrößerungen für verschiedene Farben) gaben Versuche an v. Bezold[9], O. Tumlirz[10] u. a.

VIII A. Das Sehen.

Von M. v. Rohr.

I. Das Detail der Retina in seiner Bedeutung für das Trennungsvermögen und die Breitenwahrnehmung.

Wesentlich von der Beschaffenheit des Augenhintergrundes hängt die Sehschärfe ab. Sie ist im gelben Flecke (genauer in der Netzhautgrube) am größten und nimmt nach allen Seiten hin ab.

Beschränken wir uns hier auf den gelben Fleck, was wir können, da der

[1] Is. Newton, Optice Lib. I. pars II, prop. VIII. — [2] J. Fraunhofer, Denkschr. Münch. Akad. d. Wiss. für 1814/15, p. 216. — [3] H. Helmholtz, Physiol. Optik § 13. — [4] L. Matthiessen, C. R. **24.** 874. 1847; vgl. L. Matthiessen, Grundriß, p. 234. — [5] M. Wolff, Ber. d. 19. ophth. Vers. i. Heidelb. p. 39. 1887; Wied. Ann. **32.** 548. 1888. — [6] J. J. Kunst, Diss. Freiburg 1895. — [7] Einthoven, Arch. Néerland. **24.** 346. 1897. — [8] Mollweide, Gilb. Ann. **17.** 328. 1804; **30.** 220. 1808. — [9] W. v. Bezold, Graefes Arch. f. Ophth. **14.** (2) 1. — [10] O. Tumlirz, Arch. f. d. ges. Physiol. **42.** 394. 1887.

genau zu erkennende Punkt stets fixiert wird, so hat L. HEINE[1] nachgewiesen, daß er an den Stellen seiner Oberfläche, die die feinste Mosaik zeigen, aus regelmäßig angeordneten Zapfenquerschnitten sechseckiger Form besteht. An benachbarten Stellen finden sich Stäbchenquerschnitte gemengt mit Zapfenenden größeren Durchmessers und polygonaler Übergangsform. Stellen wir uns dieses Netz von regelmäßigen Sechsecken dar, so müssen zwei leuchtende Punkte, um getrennt wahrgenommen zu werden, auf zwei Zapfenquerschnitten abgebildet werden, die mindestens durch ein wesentlich ungereiztes Element getrennt sind.

Soweit es sich also um das *Trennungsvermögen* handelt, läßt sich die Sehschärfe durch den Wert des Winkels ausdrücken, der auf der Objektseite dem Zapfendurchmesser a entspräche (s. Figur 73).

Bei einem Werte von $a = 4\,\mu$ würde sich ζ berechnen lassen aus

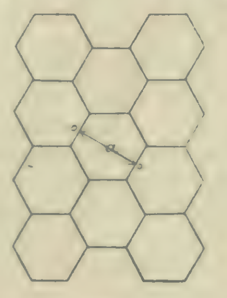
$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{4}{15\,500}$$

zu

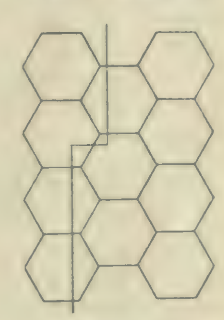
$$\zeta = 53''$$

oder nach H. v. HELMHOLTZ auf eine Winkelminute, was wohl ziemlich allgemein als normaler Wert angenommen ist. Größere Sehschärfe würde erhalten werden, wenn die Größe a unter den Betrag von $4\,\mu$ herunterginge. Auch solche Bestimmungen sind nach H. v. HELMHOLTZ[2] gemacht worden, und wir können auch aus experimentellen Feststellungen des Trennungsvermögens, wie sie z. B. L. HEINE[3] gemacht hat, auf das Vorkommen einer erheblich größeren Sehschärfe bis zu $^8/_5$ der normalen schließen. In diesem Falle würde sich der Winkel ζ ergeben zu

$$\zeta = 37{,}5'' \quad .$$



Figur 73.
Zum Trennungsvermögen des Auges.



Figur 74.
Zur HERINGschen Schärfe der Breitenwahrnehmung.

Ganz verschieden von dieser Schärfe des Trennungsvermögens ist die von E. HERING[4] eingeführte Schärfe der Wahrnehmung seitlicher Lagenverschiedenheit, oder, wie wir sagen wollen, die *Schärfe der Breitenwahrnehmung.*

Zeichnen wir mit E. HERING das HEINEsche Netz mit senkrechter Anordnung der Zapfenreihen, so bedürfen wir zur Wahrnehmung des Umstandes, daß zwei parallele Linien nicht genau auf einander stoßen, durchaus nicht zweier Zapfenreihen, die durch mindestens eine unbetroffene getrennt sind, sondern wir nehmen schon viel geringere Verschiedenheiten wahr. Hiernach können wir nur schwer eine Grenze für diese Breitenwahrnehmung angeben, doch ist das eine sicher, daß wir unter solchen günstigen Bedingungen beim einäugigen Beobachten Genauigkeiten erhalten, die erheblich unter der Grenze des übernormalen Trennungsvermögens von rund 30″ liegen (Figur 74).

So hat nach E. HERING[4] bereits 1892 WÜLFING gezeigt, daß man bei

[1] L. HEINE, GRAEFES Arch. f. Ophth. **51.** 157. 1900. Er bemerkt, daß H. v. HELMHOLTZ (H. ph. O. p. 257) diese Struktur angenommen habe, und daß E. HERING sie schematisch verwende. Er aber habe sie an gut fixierten Affenaugen mit sehr großer und am Menschenauge mit genügender Deutlichkeit photographieren können. Somit ist ihre Existenz erwiesen, die früher nur angenommen wurde — [2] H. v. HELMHOLTZ, H. ph. O. p. 256. — [3] L. HEINE, GRAEFES Arch. f. Ophth. **51.** 160. 1900. — [4] E. HERING, Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Leipz. Ber. math. phys. Kl. 16—24. 1899.

Verschiebungen eines Nonius — wo diese Bedingungen genau zutreffen — Breitenwahrnehmungen machen konnte, die auf Winkelwerte von 12 bis 10″ und noch weniger führten. C. PULFRICH[1] hat ebenfalls für Ablesungen von Teilungen mit einem Nonius Einstellungsgenauigkeiten von 10″ ermittelt.

II. Das einäugige Sehen.

1. Das indirekte Sehen.

Stellen wir uns vor, das Auge werde — etwa weil der Beobachter seine Aufmerksamkeit darauf richtet — vollkommen ruhig gehalten, so können wir es auffassen als einen Projektionsapparat, bei dem die Medien vor und hinter dem Objektiv verschiedene Brechung besitzen. Die Empfindung, die in diesem Falle des *indirekten Sehens* von der Außenwelt entsteht, ist von der Beschaffenheit der Netzhaut abhängig. Diese ist in ihren Randteilen gar nicht imstande, Einzelheiten des Bildes aufzunehmen, sondern diese Fähigkeit ist in ihr, wie wir wissen, auf eine kleine Stelle (den gelben Fleck, namentlich die Netzhautgrube) beschränkt. In der Richtung, die rückwärts verfolgt nach dem Durchtritte durch das Auge auf die Netzhautgrube führt, liegt der fixierte Punkt. Je weiter der angulare Abstand von Gegenständen von dieser Richtung ist, um so undeutlicher erscheinen sie uns. Dabei sind die Visierlinien, die nach der Mitte der Augenpupille zielenden Hauptstrahlen, nach einem im Raume festen Punkte gerichtet. Da wir nach der Natur der Dinge von Deutlichkeit ausgedehnter Gegenstände beim indirekten Sehen nicht sprechen können, so interessiert uns nur noch die Winkeltreue ihrer Bilder. H. v. HELMHOLTZ[2] hat nun festgestellt, daß das Auge als optisches Instrument tonnenförmig verzeichnet: Ein im indirekten Sehen betrachtetes Netz muß kissenförmig sein, um im Auge quadratisch zu erscheinen.

Daß wir diese Anomalie an unseren eigenen Augen überhaupt feststellen können, ist nur darum möglich, weil wir eben in der Regel nicht indirekt sehen, sondern beim natürlichen Gebrauche stets die große Beweglichkeit des Auges in seiner Höhle ausnutzen.

2. Das direkte Sehen.

Der natürliche Vorgang beim Sehen, von dem sich die meisten Menschen überhaupt nicht frei machen können, ist nun der, daß bei der Betrachtung eines unter einem größeren Winkel erscheinenden Objekts dessen verschiedene Punkte nach einander fixiert werden.

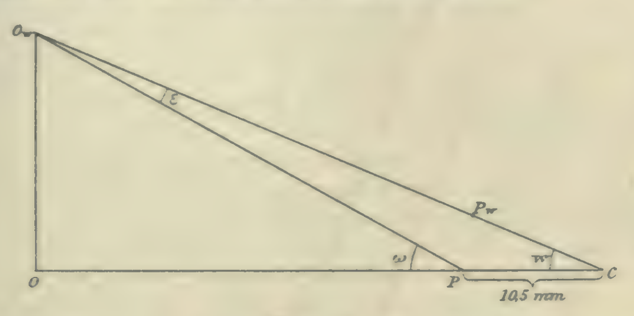
Nach der eben gegebenen Definition trifft der von einem fixierten Punkte ausgehende Hauptstrahl auf die Netzhautgrube, und wir nehmen weiter mit H. v. HELMHOLTZ[3] an, daß diese Visierlinie zusammenfalle mit der Blicklinie, d. h. der Verbindungslinie des fixierten Punktes mit dem Drehungspunkte des Auges, dessen Entfernung von der Pupillenmitte zu 10,5 mm angesetzt wird. Beim *direkten Sehen* geht also die auf die empfindlichste Stelle treffende Visierlinie stets durch den Drehungspunkt des Auges, und wir messen die scheinbare Größe von Gegenständen größerer Ausdehnung durch den Winkel der notwendigen Drehung des Auges[4]. Hieraus ergibt es sich, daß eine Parallaxe ε der Gegenstände endlicher Entfernung beim direkten gegen das indirekte Sehen eintreten muß. Nach

---

[1] C. PULFRICH, Phys. Ztschr. **1.** 100. 1899—1900. S.-A. p. 10. — [2] H. v. HELMHOLTZ, Handb. phys. Opt. p. 693 ff., hier ist stets nach der zweiten Auflage zitiert worden. — [3] Derselbe, H. ph. O. p. 679. — [4] Auf diesen Umstand, *daß beim direkten Sehen der Drehungspunkt des Auges das perspektivische Zentrum* sei, bin ich erst durch einen Brief von Herrn Prof. A. GULLSTRAND in Upsala aufmerksam gemacht worden, obwohl, wie auf p. 268 hervorgehoben wurde, auch im H. ph. O. p. 127 dies erwähnt ist.

der von H. v. HELMHOLTZ[1] in ihrer Bedeutung etwas modifizierten LISTINGschen Bezeichnung nennen wir sie die *Parallaxe zwischen der scheinbaren Lage der Objekte bei direktem und indirektem Sehen* (s. Figur 75). Wir finden dort den Nachweis, daß diese Parallaxe wegen der großen Undeutlichkeit des indirekten Sehens nicht bemerkt wird. Nur wenn besondere Verhältnisse vorliegen, die unsere Aufmerksamkeit auf diese zwischen dem direkten und dem indirekten Sehen bestehende Verschiedenheit richten, bemerken wir als Folge der Parallaxe ein Schwanken der Objekte.

Zusammenfassend können wir also sagen: Beim direkten Sehen können wir immer an die Stelle des bewegten natürlichen Auges ein hypothetisches ruhendes gesetzt denken, dessen Pupille mit dem Drehungspunkte jenes zusammenfällt, dessen Netzhaut überall mit der maximalen Unterscheidungsfähigkeit der unsrigen begabt ist, und dessen orthoskopisches Projektionssystem die Abbildung auch weit seitlich gelegener Objekte mit ausreichender Schärfe leistet.



Figur 75.

C Drehungspunkt des Auges. P, P_w Pupillenorte beim direkten Sehen. ω scheinbare Größe beim indirekten Sehen. w scheinbare Größe beim direkten Sehen. ε Parallaxe.

Die Parallaxe zwischen der scheinbaren Lage der Objekte beim direkten und beim indirekten Sehen.

Unsere Überlegungen werden sich im folgenden auf das hypothetische ruhende Auge stützen; es folgt dann mit Notwendigkeit, daß in der Praxis der Drehungspunkt unseres Auges an die Stelle der Pupille des hypothetischen gebracht werden muß.

Die Tiefenwahrnehmung. Eine Tiefenwahrnehmung beim einäugigen Sehen ist nur durch die Akkomodationsanstrengung möglich, doch ist unser Gefühl dafür nicht sehr ausgebildet. H. v. HELMHOLTZ[2] nimmt nach WUNDTschen Versuchen an, daß diese Empfindung zur absoluten Bestimmung von Entfernungen nicht verwandt werden könne, dagegen ließen sich Tiefendifferenzen mit einer gewissen geringen Genauigkeit schätzen, die für nähere Gegenstände wegen der aktiven Anstrengung des Muskelapparates höher war als für entferntere. Einen a cm entfernten Faden ($40 < a < 250$) konnte man um b cm nähern und etwas weiter entfernen, bis die Verschiebung zum Bewußtsein kam (b lag zwischen den Grenzen von $a/9$ für kleinere und $a/25$ für mittlere Entfernungen). Da für einigermaßen weit entfernte Objekte die Akkommodationsanstrengung sicher unmerkbar wird, so wollen wir diese Möglichkeit, uns beim einäugigen Sehen in der Richtung der Visierlinien zu orientieren, nicht weiter behandeln.

Da die Netzhaut des hypothetischen Auges auch ein flächenhaftes Gebilde ist, so erscheinen uns die wahrgenommenen Objekte flächenhaft angeordnet, indessen ist die Form und Entfernung der Fläche, auf der wir die Anordnung vorgenommen denken können, zunächst noch ganz willkürlich. In Übereinstimmung mit dem bei der Strahlenbegrenzung Gesagten wählen wir zu dieser Fläche die

[1] H. v. HELMHOLTZ, H. ph. O. p. 729. — [2] Derselbe, H. ph. O. p. 778.

senkrecht zur Richtung einer mittleren Visierlinie im fixierten Punkte errichtete Ebene, die E.-E. Durch die Entfernung des Auges von den Objekten und den Durchmesser der Pupille ist, wie wir wissen, alles gegeben, um das auf der E.-E. entstehende *objektseitige Abbild* zu konstruieren, das uns, wenn wir an dieser Ebene als Lokalisationsfläche festhalten, allein vom ganzen Objektraume zur Wahrnehmung kommt. Ohne Schaden für unsere Auffassung können wir an die Stelle des Objekts eine gleichgroße Kopie dieses objektseitigen Abbildes setzen; denn an dem auf der Netzhaut entstehenden Bilde wird dadurch überhaupt nichts geändert. Wenn wir nun auch an einer solchen Abbildskopie keine Tiefenerstreckungen wahrnehmen können, so können wir doch auf sie infolge unserer Erfahrung schließen.

Die Tiefendeutung. Hierzu bieten sich uns verschiedene Hilfsmittel. Gegenstände bekannter Größe erscheinen kleiner, je weiter sie entfernt sind. Gegenstände unbekannter Größe, die im Abbilde sich auf andere projizieren, werden aufgefaßt als vor diesen liegend. Gegenstände, die auf irgend eine Fläche Schatten werfen, müssen der Lichtquelle näher sein als die Fläche. Die Schattenverhältnisse im allgemeinen unterstützen die Deutung des Abbildes auf Tiefenunterschiede auf das Wirksamste. Weit entfernte Gegenstände werden infolge der Luftperspektive getrübt und in ihrer Farbe verändert.

Eine solche gleich große Kopie des objektseitigen Abbildes können wir uns einmal mit Hilfe der *camera lucida* gezeichnet denken; dann muß von dem Beschauer der Abstand eingehalten werden, der für den Zeichner galt. Wir können sie aber auch mit Hilfe einer photographischen Aufnahme erhalten, doch müssen wir uns dann daran erinnern, daß die Mitte der E.-P. des Aufnahmeapparats für die verschiedenen Hauptstrahlneigungen wegen der Geringfügigkeit der Longitudinalaberration des Blendenortes keine wesentlichen Bewegungen machte, daß wir also für die Betrachtung den Drehungspunkt unseres Auges an den Ort jener E.-P. bringen müssen.

Es ist aber gar nicht nötig, an der Forderung gleicher Größe des Abbildes und seiner Kopie festzuhalten, wir können vielmehr das Abbild auch durch eine ähnliche Reproduktion in n-facher Reduktion vertreten lassen. Dann muß aber gleichzeitig die Entfernung zwischen der Verkleinerung des objektseitigen Abbildes und der E.-P. des hypothetischen Auges auf den $n$ten Teil der Entfernung $\mathfrak{A}$[1] gebracht werden, die das Auge von der E.-E. selbst trennte. Dann und nur dann sind die Neigungswinkel w der von den verschiedenen Punkten ausgehenden Hauptstrahlen den Winkeln gleich, unter denen die entsprechenden Punkte beim direkten Sehen erschienen. Also ist die durch die ähnliche Kopie auf der Retina entstehende Zeichnung mit der identisch, die sich bei der Betrachtung der Objekte selbst ergab. Der einzige Unterschied, der hier zu bemerken ist, ist der veränderter Akkommodation, und dieser Empfindung hatten wir eben erst so gut wie gar kein Gewicht für die Beurteilung der absoluten Entfernung beigemessen. Wir bemerken hier noch, daß stillschweigend vorausgesetzt ist, der Betrag $\mathfrak{A}/n$ liege innerhalb des Akkommodationsbereiches.

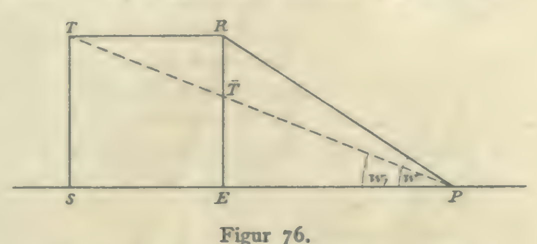
Der Einfluß der Wahl des Abstandes von der Abbildskopie. Wählt man aber einen unrichtigen Abstand, so erhält man auf der Retina ein Bild verschieden von dem, das das objektseitige Abbild hervorruft; dann wird aber, wie jetzt gezeigt werden soll, die Deutung der Tiefenunterschiede falsch. Am bequemsten sind diese Verhältnisse zu übersehen, wenn wir uns die Kopie des Abbildes als eine physische Zeichnung denken, wie sie etwa beim Gebrauche einer *camera lucida* oder auf photographischem Wege mit einem verzeichnungsfreien Objektiv erhalten wird.

---

[1] Diese Entfernung wurde auf p. 218 mit ξ bezeichnet.

Um einen einfachen Fall zu haben, stellen wir uns vor, es handele sich um das Kantensystem eines Würfels, bei dem die Hauptsehrichtung senkrecht auf der Mitte der einen Unterkante steht, und zwar sei auf die zunächst gelegene Grenzebene akkommodiert. Dann ist bei gegebenem Abstande $\mathfrak{A} = PE$ zwischen der durch ER angedeuteten E.-E. und der Pupille P der Projektionsvorgang in dem zur Unterkante senkrechten Meridionalschnitte wie in der nebenstehenden Figur: Das in der E.-E. entstehende Abbild $E\bar{T}R$ oder eine ihm ähnliche, physische Kopie kann nun für das einäugige Sehen den ganzen Würfel $ERTS$ vollständig vertreten, wenn die Winkel w, w_1 ungeändert bleiben (Figur 76).

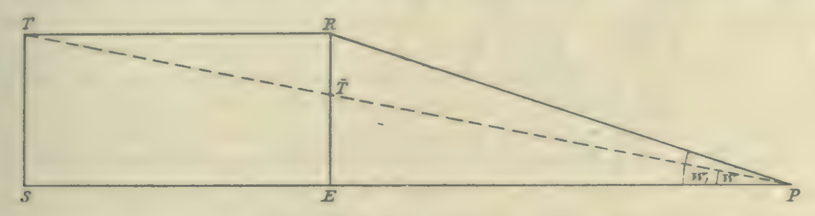
Wir haben nun die Folgen einer unrichtigen Wahl des Abstandes PE von der gleichen Abbildskopie $E\bar{T}R$ zu untersuchen.



Figur 76.
Zur Konstruktion des objektseitigen Abbildes.

Der Abstand sei zu groß, also die Neigungswinkel der Visierlinien zu klein.

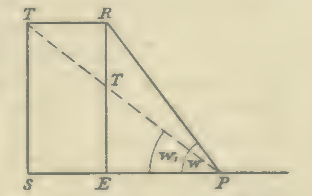
Nehmen wir an, es sei uns bekannt, daß das vorliegende Objekt eine regelmäßige Figur, im besonderen, daß es eine durchweg gleiche Höhe habe, so konstruieren wir unter diesen Voraussetzungen, die meistens gar nicht zum Bewußtsein kommen,



Figur 77.
Zur Fälschung der Raumvorstellung bei einem zu großen Abstande von der Abbildskopie.
(In der Zeichnung sind w und w_1 mit einander vertauscht zu denken.)

die Figur $ERTS$ als ein in die Länge gezogenes Rechteck, und zwar ist $SE : EP = R\bar{T} : \bar{T}E$. Ferner können wir dieselbe Konstruktion für andere Meridianschnitte wiederholen, die mit der Unterkante statt eines rechten einen beliebigen Winkel bilden (Figur 77). Fassen wir alles zusammen und berücksichtigen den aus Figur 76 abgeleiteten Wert des Verhältnisses $R\bar{T} : \bar{T}E$, so kommen wir zu dem Satze:

Bei zu großem Abstande der Abbildskopie, d. h. bei zu kleinen Neigungswinkeln w, erscheinen Objekte von bekannten Höhen- oder Breitenverhältnissen in einer Tiefenausdehnung, die in geradem Verhältnisse zur Steigerung des Abstandes gesteigert ist.



Figur 78.
Zur Fälschung der Raumvorstellung bei einem zu kleinen Abstande von der Abbildskopie.

Der Abstand sei zu klein, also die Neigungswinkel der Visierlinien zu groß.

Machen wir nun dieselbe Voraussetzung wie oben, daß wir nämlich die durchweg gleiche Höhe des Objekts kennen, so erhalten wir in $ERTS$ ein zusammengedrücktes Rechteck (Figur 78) und können sagen:

Bei zu kleinem Abstande der Abbildskopie, d. h. bei zu großen Neigungswinkeln, erscheinen Objekte von bekannten Höhenverhältnissen in einer Tiefen-

minderung, die in geradem Verhältnisse steht zur Verringerung des Abstandes.

Zur Ableitung dieser Fälschungen der Tiefenvorstellung hatten wir angenommen, wir seien über die Höhenverhältnisse unterrichtet. Es ist nun aber auch möglich, daß wir die Tiefenerstreckung besser kennen als die Höhenverhältnisse der auf der Abbildskopie dargestellten Gegenstände. In diesem Falle erweckt die Betrachtung der Abbildskopie aus einem zu weiten Abstande in uns die Vorstellung einer Vergrößerung des Vorder-, einer Verkleinerung des Hintergrundes. Bei einem zu nahen Abstande erhalten wir den umgekehrten Eindruck.

In dem hier vorausgesetzten Falle der photographischen Wiedergabe des Abbildes sind diese Resultate schon seit langem bekannt. Wir bemerken hier vorausgreifend, daß Landschaftsaufnahmen allgemein aus einem Abstande zu betrachten sind, der der Äquivalentbrennweite des Aufnahmeobjektivs gleich ist. Das normalsichtige Auge Erwachsener ist nun aber in der Regel nicht imstande, dauernd auf eine wesentlich kleinere Entfernung zu akkommodieren als auf 25 cm, während die Brennweite der zu Landschaftsaufnahmen verwandten Objektive in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle ganz erheblich kürzer ist. Es muß also die Betrachtung gewöhnlicher Landschaftsaufnahmen Normalsichtige zur Auffassung gesteigerter Tiefenausdehnung verleiten, und diese Beobachtung ist tatsächlich sehr häufig gemacht worden. In vollständiger Verkennung der Lage schrieb man aber den unnatürlichen Eindruck auf die Rechnung des Objektivs und sprach bei Aufnahmen mit großen Neigungswinkeln w, bei denen sich die unrichtige Wahl des Standpunktes besonders schlimm rächt, von einer *Weitwinkelperspektive*, der man eine besonders schlimme Übertreibung der Tiefenverhältnisse nachsagte.

Bei Aufnahmen mit Objektiven besonders großer Brennweite, wie sie namentlich bei der Telephotographie vorkommen, sollte der Normalsichtige nun eigentlich den richtigen Abstand einhalten können, doch läßt man sich von dem in der Regel ziemlich kleinen Format der Aufnahmen meistens verführen, das Bild etwa in die deutliche Sehweite zu bringen. Mit gleicher Sachkenntnis wie vorher spricht man dann von *flachen* Bildern der Teleobjektive.

Nun macht es offenbar für die Perspektive keinen Unterschied, ob wir dem Auge eine auf photographischem Wege erhaltene Zeichnung oder ein in der Luft entworfenes virtuelles Bild darbieten. Wir können also die soeben für die Zeichnung abgeleiteten Resultate ohne weiteres auf die Bilder anwenden, die uns die zu subjektivem Gebrauche bestimmten Instrumente vorführen.

Da namentlich die stärkeren Mikroskope in ihrer Tiefenwirkung infolge ihrer hohen Apertur sehr beschränkt sind, so handelt es sich in erster Linie um das Fernrohr, und für dieses Instrument ist es charakteristisch, daß es uns das auf der E.-E. entstehende Abbild unter größeren Neigungswinkeln vorführt, als die sind, unter denen es vom Orte der E.-P. des Instruments erscheint. Mithin muß nach dem Wesen der (im allgemeinen vergrößernden) Fernrohre ihre Anwendung auf bekannte Objekte den Eindruck erwecken, daß deren Tiefenausdehnung vermindert sei. Daß diese Erscheinung der Mehrzahl der Beobachter nicht zum Bewußtsein kommt, liegt in der Hauptsache wohl an der kleinen objektseitigen Neigung der Hauptstrahlen, die bei einigermaßen stark vergrößernden Fernrohren eben nur vorkommt. Man wird sofort darauf aufmerksam, wenn man ein holländisches Fernrohr wenn auch nur schwacher Vergrößerung einmal in gewöhnlicher Weise und dann umgekehrt vor ein Auge bringt. Im ersten Falle erscheint die Tiefenausdehnung gemindert, im zweiten gesteigert.

III. Das zweiäugige Sehen.

1. Die Ersetzung der Winkelbestimmung durch die Messung stereoskopischer Differenzen.

Sind zwei Punkte P und Q im Raume gegeben, so können wir durch sie eine bestimmte Ebene (in den für uns wichtigen Fällen die horizontale Ebene) legen, auf die wir alle Punkte des Raumes durch Lote projizieren. Diese Ebene sei in der Zeichenebene dargestellt, und es ist klar, daß wir die Entfernung ϱ des Fußpunktes S von der Basis PQ finden können, wenn wir die Winkel SPQ und PQS messen, unter denen ϱ von den Endpunkten der Basis erscheint (Figur 79).

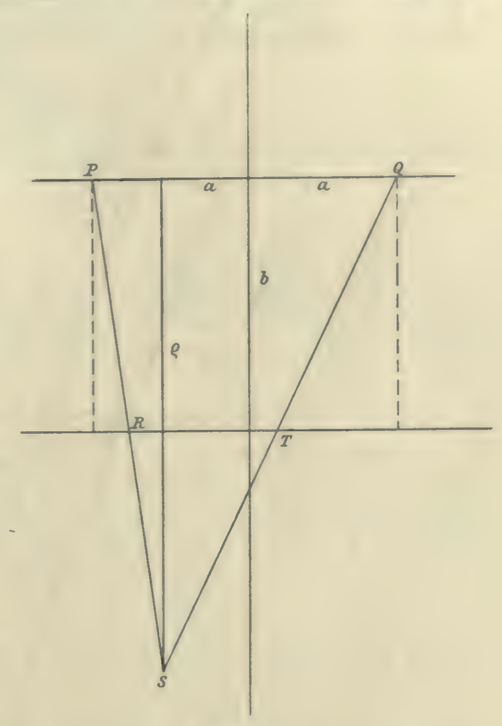
H. v. Helmholtz[1] hat nun die Größe

$$e = 2a - RT$$

als *stereoskopische Differenz* in der Entfernung b eingeführt und auch gezeigt, daß der senkrechte Abstand ϱ des Fußpunktes S von der Richtung der Basis $2a$ zu e in der folgenden Beziehung stehe

$$\varrho = \frac{2ab}{e} \ .$$

Er hat damit die Messung der Entfernung auf die Bestimmung der stereoskopischen Differenz e zurückgeführt.



Figur 79.
Zur Ersetzung der Winkelbestimmung durch die Messung stereoskopischer Differenzen. (Die Figur ist nach Figur 235 auf p. 812 des H. d. ph. O. entworfen.)

Setzen wir nun eine gewisse Grenze fest für die Genauigkeit, mit der der Unterschied $e_{I} - e_{II}$ der stereoskopischen Differenzen zweier Entfernungen ϱ_{II}, ϱ_{I} festgestellt werden kann, so ist an derselben Stelle gezeigt worden, daß die gerade noch wahrnehmbaren Tiefenunterschiede $\varrho_{II} - \varrho_{I}$ quadratisch mit der Entfernung wachsen:

$$\varrho_{II} - \varrho_{I} = \frac{\mathfrak{r}^2}{f}$$

wo

$$\mathfrak{r}^2 = \varrho_{II} \cdot \varrho_{I}$$

und

$$f = \frac{2ab}{e_{I} - e_{II}}$$

ist. Wie man aus der Beziehung

$$\frac{1}{\varrho_{I}} - \frac{1}{\varrho_{II}} = \frac{1}{f}$$

[1] H. v. Helmholtz, H. ph. O. p. 814 f.

sieht, ist f die Entfernung des Gegenstandes, der sich gerade noch von der Unendlichkeit $\varrho_{II} = \infty$ abhebt.

Derselbe Autor hat auch auf die Analogie hingewiesen, die zwischen diesem Gesetze und dem die Objekt- und die Bildentfernung bei einer Konkavlinse verknüpfenden besteht. Es ist vielleicht noch von Interesse, eine einfache Beziehung anzugeben, mittels der man bei gegebenem Unterscheidungsvermögen $e_I - e_{II}$ für jede endliche Entfernung ϱ nach vorn und nach hinten die Grenzen anzugeben vermag, nach deren Überschreitung die Tiefenwahrnehmung beginnt.

Nach Anstellung einer einfachen geometrischen Betrachtung ergibt sich die Unterscheidungsgrenze nach vorn (auf das Auge zu) durch

$$\varrho - \varrho_v = \frac{\varrho^2}{f + \varrho}$$

und die nach hinten (von dem Auge fort) durch

$$\varrho_h - \varrho = \frac{\varrho^2}{f - \varrho} \quad .$$

Für jede Entfernung kann man also nach Maßgabe der Formeln einen beobachteten Punkt weiter nach hinten als nach vorn verschieben, bevor durch das Messen von zwei Punkten aus eine Wahrnehmung der Verschiebung eintritt. Eine gewisse Analogie mit den Formeln für die Tiefenschärfe p. 255 ist vorhanden.

2. Die Anwendung auf das zweiäugige Sehen.

Die Unsicherheit der absoluten Entfernungsbestimmung. Die ganze eben angestellte Überlegung läßt sich nun auf den Vorgang beim zweiäugigen Sehen anwenden. Die Basis ist die Entfernung der Drehungspunkte unserer Augen, die je nach den Individuen etwa 58 bis 72 mm beträgt[1], und der Winkel an der Spitze des Dreiecks wird durch die Konvergenzanstrengung gemessen.

Das Gefühl der Konvergenz, das uns der Gebrauch beider Augen liefert, scheint aber für die Bestimmung der absoluten Entfernung nur ein Resultat geringer Genauigkeit zu liefern. H. v. HELMHOLTZ[2] teilt WUNDTsche Messungen mit, nach denen Entfernungen von a cm ($40 < a < 180$) stets zu klein (und zwar statt a nur $0{,}44\,a$ bis $0{,}67\,a$) geschätzt wurden. H. v. HELMHOLTZ selbst schätzte kleine Entfernungen (unter Armeslänge) stets zu groß. In guter Übereinstimmung mit den WUNDTschen Zahlen stehen neuere Beobachtungen, die L. HEINE[3] mitteilt, wonach ebenfalls die Entfernungen in der Regel nur auf die Hälfte ihres wahren Betrages eingeschätzt wurden. In einem Falle hatte die Beleuchtung einen deutlich gesetzmäßigen Einfluß auf das Schätzungsresultat.

Die Sicherheit der Bestimmung von Entfernungsdifferenzen. Anders steht es mit der Sicherheit, mit der Entfernungsunterschiede wahrgenommen werden. Modifizieren wir den oben für f zitierten Ausdruck, indem wir die Schärfe der Breitenwahrnehmung (p. 271) einführen

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{e_I - e_{II}}{b} \quad ,$$

so ergibt sich diese Konstante zu

$$f = 2\,a \operatorname{ctg} \eta \quad .$$

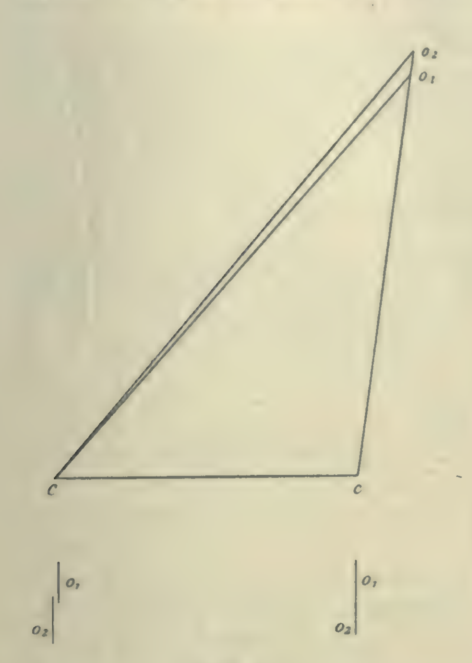
Daß die Breitenwahrnehmung unserer Augen eine Rolle spielen wird, läßt sich aus dem Falle schließen, in dem zwei senkrechte Marken so hinter einander an-

---

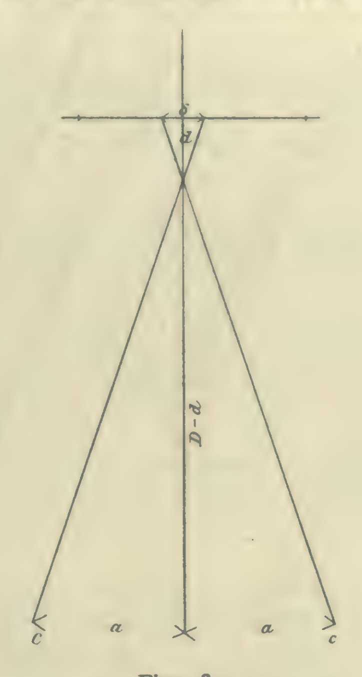
[1] CARL ZEISS, Gebrauchsanweisung für den stereoskopischen Entfernungsmesser 8 fach. Jena, März 1900. — [2] H. v. HELMHOLTZ, H. d. ph. O. p. 796. — [3] L. HEINE, GRAEFES Arch. f. Ophth. **51**. 568. 1900.

geordnet sind, daß sie für ein Auge eine gerade Linie bilden. Es läßt sich folgern, daß dann die Tiefenwahrnehmung die gleiche Schärfe annehmen kann, wie die Breitenwahrnehmung des einäugigen Sehens unter günstigen Umständen (Figur 80). Es mag aber hervorgehoben werden, daß die Wahrnehmung von Unterschieden in den stereoskopischen Differenzen, die durch eine zwischen entsprechenden Netzhautelementen beider Augen anzunehmende Verbindung ermöglicht wird, sich auch dann nicht wesentlich ändern soll, wenn jene günstigen Umstände für die Breitenwahrnehmung beim Einzelauge nicht mehr bestehen[1].

Aus der letzten Form von η ersieht man, daß η auch als der Konvergenzwinkel der Augen aufgefaßt werden kann, den die Visierlinien einnehmen, wenn



Figur 80.
$o_1 o_2$ zwei senkrechte Marken in verschiedenen Entfernungen (oben im Grundrisse dargestellt) erscheinen dem Auge c als eine gerade Linie, weisen aber für das andere, C, eine Breitenverschiedenheit auf.
Zur Bestimmung von Entfernungsdifferenzen.



Figur 81.
Zum HELMHOLTZschen Versuche zur Feststellung der Schärfe der Breitenwahrnehmung.

sie auf ein Objekt gerichtet sind, das sich gerade noch von der Unendlichkeit abhebt. Wir haben oben darauf hingewiesen, daß das Konvergenzgefühl zur Bestimmung dieser Größe in keiner Weise ausreicht.

Für den η beizulegenden Wert finden sich in der Literatur sehr verschiedene Angaben.

Das zur Bestimmung angewandte Verfahren hat H. v. HELMHOLTZ[2] beschrieben: Er suchte unter Ausschließung aller Elemente, die zur Deutung der Tiefe beitragen konnten, eine vertikale, bewegliche Marke in die durch zwei feste Vertikalen definierte Ebene zu bringen. Aus seinen Versuchen ergab sich für ihn eine Einstellungsgenauigkeit von $^1/_4$ mm auf die Entfernung von 340 mm.

[1] C. PULFRICH, Phys. Ztschr. 1. p. 100. 1899—1900. — [2] H. v. HELMHOLTZ, H. ph. O. p. 790.

Berechnet man daraus den Winkelwert η, den die Verschiebung $\delta = \frac{2ad}{D-d}$ der Projektion der Nadel in die feste Ebene von den beiden Augen aus mit der Entfernung D definiert, so ist, wenn man, wie in Figur 81, mit d die Abweichung der Einstellung bezeichnet,

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{\delta}{D} = \frac{d \cdot 2a}{(D-d)D} \quad ,$$

und dafür ergibt sich bei H. v. Helmholtz mit dem obigen Werte von $d = {}^1/_4$ mm

$$\eta = 30{,}38'' \quad .$$

Er selbst hat diesen Wert nicht gewählt, sondern hat der Berechnung den doppelt so großen Verschiebungswert von $^1/_2$ mm zugrunde gelegt, wo die Verschiebung „mit vollkommener Sicherheit zu erkennen" war. Er erhielt dann den doppelt so großen Wert von

$$\eta = 60^1/_2{}'' \quad ,$$

der genähert mit dem Werte der Wundtschen Bestimmungen und gut mit dem Normalwerte von ξ übereinstimmt.

In der Literatur kommen aber noch wesentlich größere Einstellungssicherheiten vor als die, die einem η-Werte von einer halben Winkelminute entsprechen. So gibt C. Pulfrich[1] dafür Werte bis zu 10 Sekunden an. L. Heine[2] fand mit einem dem Helmholtzschen ähnlichen Verfahren für normale Augen bei $D = 5$ m, $d = 25$ mm, woraus sich

$$\eta = 13{,}4''$$

ergibt; er selbst konnte bei dieser Entfernung noch Verschiebungen von 10 mm erkennen, womit

$$\eta < 6''$$

folgt.

Mögen sich auch nun Werte, wie die zuletzt angeführten, selten finden, so wird es doch nach dem Vorstehenden angängig sein, einen Wert für normale Beobachter von 30″ anzunehmen, der dann in guter Übereinstimmung mit dem Helmholtzschen Resultat stehen würde. So geht auch C. Pulfrich[3] vor, und es ergibt sich dann für die Entfernung f des sich noch eben von dem unendlich fernen Hintergrunde abhebenden Objekts

$$f = 2a \operatorname{ctg} \eta$$

zwischen 399 m und 495 m je nach den oben angegebenen Grenzen für den Augenabstand. H. v. Helmholtz[4] erhielt seinem größeren Werte von η entsprechend den etwa halb so großen Wert von $f = 240$ m.

Die Raumvorstellung in ihrer Abhängigkeit von Tiefenempfindung und Deutung. Die beiden eben besprochenen Eigenschaften des zweiäugigen Sehens sind nun von großer Bedeutung für die Raumvorstellung, die wir uns auf Grund unserer Gesichtswahrnehmungen von der Außenwelt machen. Wir heben noch einmal hervor, daß unsere auf dem zweiäugigen Sehen allein beruhenden absoluten Entfernungsbestimmungen sehr ungenau, die relativen dagegen sehr genau sind.

Die Genauigkeit der relativen Tiefenbestimmungen ist nun aber nicht unabhängig von der Feststellung der absoluten Entfernung.

---

[1] C. Pulfrich, Phys. Ztschr. Nr. 9. 1899. — [2] L. Heine, Graefes Arch. f. Ophth. **51.** 162. 1900. — [3] C. Pulfrich, Phys. Ztschr. **1.** p. 101. 1899—1900. — [4] H. v. Helmholtz, H. ph. O. p. 791.

Es sei die absolute Entfernung (eines mittleren Punktes) eines Gegenstandes wieder (siehe Figur 81) mit D bezeichnet, so läßt sich die Tiefe d dieses Objekts ausdrücken durch

$$d = \frac{\delta}{2a + \delta} D \quad ,$$

wenn δ die Verschiebung bezeichnet, die die Projektion des näher gelegenen Punktes erfährt, wenn man ihn erst von dem einen und dann von dem anderen Auge aus in die D-Ebene projiziert. Ist nun, wie in der Regel, δ klein gegen $2a$, so ist

$$d \text{ appr.} = \frac{\delta}{2a} D \quad .$$

Schließt man alle auf Deutung beruhenden Anhaltspunkte für die absolute Entfernungsbestimmung aus, so können die δ entsprechenden Breitenbestimmungen zu einer falschen Deutung der relativen Entfernung d führen, wenn nämlich die absolute Entfernung D unrichtig geschätzt wird. Bei unterschätzten Entfernungen D erscheinen die Abstände d proportional zu klein.

L. Heine[1] hat nach dieser Richtung hin interessante Versuche angestellt, aus denen sich ergab, daß d sofort größer empfunden wurde, sobald bei besserer Beleuchtung des Versuchsobjekts die Entfernung D größer geschätzt wurde.

Im allgemeinen sind aber die beim einäugigen Sehen behandelten Anhaltspunkte für die Deutung der Entfernung auch beim zweiäugigen Sehen vorhanden und unterstützen unser Konvergenzgefühl in sehr wirksamer Weise. Einzelne dieser Zeichen, wie z. B. die Schatten, können sogar das Zustandekommen einer bestimmten Auffassung eines Körpers verhindern, für die die geometrischen Bedingungen sämtlich vorhanden sind.

Ist nun die Entfernung des betrachteten Objekts richtig ermittelt, so kann die Bestimmung seiner Tiefenerstreckung durch relative Bestimmungen nach Maßgabe der oben entwickelten Formeln erfolgen.

3. Die Instrumente zur Unterstützung des zweiäugigen Sehens.

Die Lage der Abbilder beim Sehen mit bloßen Augen. Beim zweiäugigen Sehen werden beide Augen auf den fixierten Punkt O gerichtet, dessen Bild dann in beide Netzhautgruben fällt. Für die Augen kommen also zwei E.-E. EE und ee in Betracht, die beide den fixierten Punkt enthalten, und auf die von den Augendrehungspunkten C, c aus die Abbilder entworfen sind. Jedes Auge sieht also ein objektseitiges Abbild, ganz wie wir es beim einäugigen Sehen behandelt hatten, und die Ebenen beider Abbilder schneiden sich unter dem Konvergenzwinkel v der Hauptvisierlinien (Figur 82).

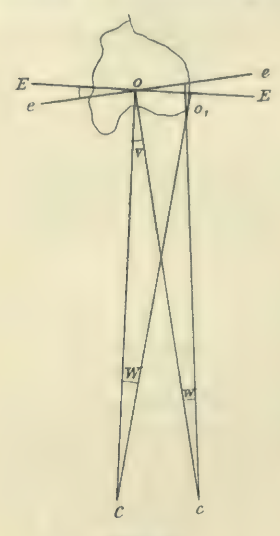
Umgekehrt geben zwei solche Abbilder, wenn je eines allein dem entsprechenden Auge dargeboten wird, auch alles, was beiden Augen erscheint, und wir erhalten den Eindruck von dem Gegenstande selbst, wenn wir sie jedem einzelnen Auge unter den richtigen Neigungswinkeln w und beiden zusammen mit der richtigen Konvergenz v vorführen. Sind die Abbilder nur genügend scharf, so kann auch ein beliebig anderer Punkt O_1 des durch sie ersetzten Objekts fixiert werden, da die richtigen Blickrichtungen zu ihm für jedes Auge durch den Drehungspunkt und den entsprechenden Punkt im zugehörigen Abbilde eindeutig festgelegt sind.

In ganz ähnlicher Weise also, wie wir beim einäugigen Sehen zunächst in der gleichgroßen Abbildskopie eine Möglichkeit hatten, den Gegenstand vollständig

[1] L. Heine, Graefes Arch. f. Ophth. 51. 568. 1900.

zu ersetzen, werden wir imstande sein, auch beim zweiäugigen Sehen einen vollkommenen Ersatz für das Objekt zu liefern.

Verbindet man jedes Projektionszentrum mit je einem entsprechenden Bildorte, so definieren diese beiden Geraden einen Punkt im Raume, der in unserem Falle mit dem Objektpunkte selbst zusammenfällt. Wir wollen ganz allgemein, wo solche Punkte durch den Schnitt der von den Projektionszentren zu homologen Stellen der Abbilder gezogenen Geraden definiert werden, von einem *Raumbilde* sprechen, dem die Gesamtheit der dargestellten Objektpunkte als *Raumobjekt* gegenübersteht. Bringen wir die Augen an den Ort der Projektionszentren, so nehmen wir ein *Raumsubstitut* wahr, das von dem Raumbilde hervorgerufen wird. Auf das Raumbild wenden wir eben ganz wie beim gewöhnlichen Sehen unsere ungenaue Bestimmung der absoluten und genaue Bestimmung der relativen Entfernungen an, und wir sind dabei ebenso Täuschungen unterworfen, wie beim Sehen mit bloßen Augen. Die Eigenschaften des Raumbildes lassen sich aus den geometrischen Bedingungen seiner Entstehung präzis entwickeln, und wir können von dem Raumbilde aussagen, daß es — je nach den Umständen — auf unsere Augen wirke in derselben oder in verschiedener Weise, verglichen mit den wirklichen Gegenständen des Raumobjekts. Ob es uns genau so wie die Wirklichkeit erscheint, ist eine andere Frage, die wir im folgenden im Gegensatze zu der ausführlichen Behandlung der verschiedenen Raumbilder nur gelegentlich streifen können.



Figur 82.
$v = \sphericalangle\, COc = \sphericalangle\, EOe$.
Konvergenzwinkel der Augenachsen bei der Betrachtung des Hauptfixationspunktes.
C, c Augendrehungspunkte.
Die Lage der Abbilder beim zweiäugigen Sehen.

Wir bemerken noch, daß dieselben Möglichkeiten, unser Sehen zu unterstützen, denkbar sind, wie wir sie schon beim einäugigen Sehen behandelt haben, indem wir nämlich entweder physische Reproduktionen der Abbilder oder die virtuellen Luftbilder selbst den Augen vorführen. Nicht immer lassen sich beide Fälle verwirklichen; doch werden wir in der Regel mit dem Falle physischer Abbildskopien beginnen, weil die bei ihm eintretenden Verhältnisse sich leichter übersehen lassen.

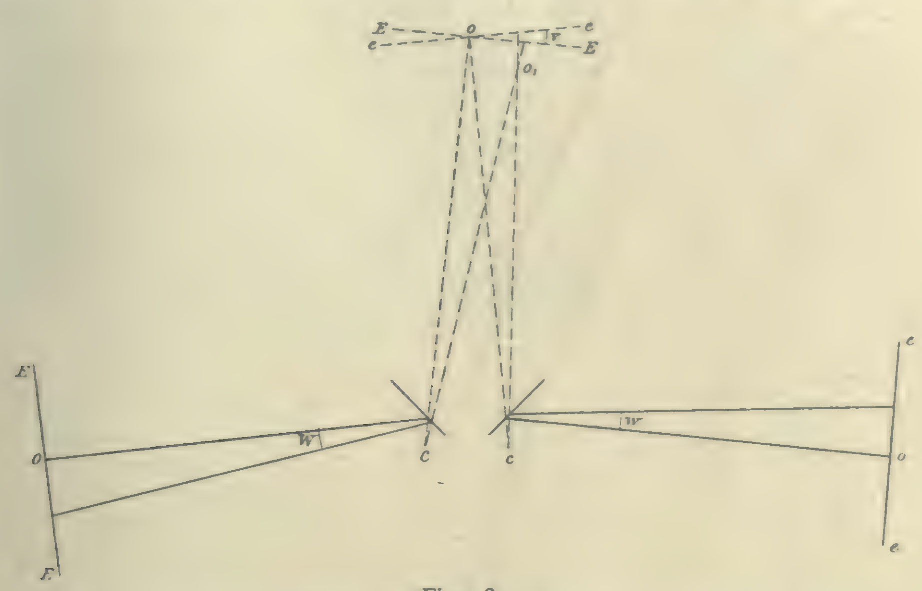
Je nach der Ähnlichkeit oder Unähnlichkeit des durch die Instrumente vermittelten Raumbildes werden wir sprechen von *orthomorphen* oder *heteromorphen* Raumbildern der Instrumente und kurz auch wohl von orthomorphen oder heteromorphen Instrumenten. Wir behandeln nun zunächst die orthomorphen Raumbilder.

Der einfachste, wenn auch nicht der am häufigsten vorkommende Fall ist der, daß es sich nicht nur um Ähnlichkeit, sondern sogar um Kongruenz des Raumbildes mit dem Raumobjekt handelt.

Die *tautomorphen* Raumbilder und die Stereoskope. Nehmen wir den Fall eines endlich entfernten Objekts, so gestattet uns die Photographie, die Bedingungen genau herbeizuführen, die wir in den einleitenden Bemerkungen skizziert hatten. Werden zwei photographische Objektive so angeordnet, daß die Zentren ihrer E.-P. dieselbe Entfernung $2a$ von einander haben, wie die Drehungspunkte der Augen, richten wir ein jedes auf denselben Hauptfixierungspunkt und stellen für diesen scharf ein, so können wir bei passender Wahl der Brennweite der Aufnahmeobjektive zwei physische Kopien der Abbilder in natürlicher Größe erhalten. Zur Betrachtung ist es nur nötig, daß die Kopien sich unter demselben Winkel v kreuzen wie die Abbilder selbst. Dies erreicht man mit Hilfe eines

Spiegelapparats, wie ihn C. WHEATSTONE als *Spiegelstereoskop* vorgeschlagen hat. Zwei unter 90⁰ zusammenstoßende Spiegel lassen jedem Auge nur Strahlen von der zugehörigen Abbildskopie zukommen, und die Spiegelbilder beider durchdringen sich in dem Hauptfixierungspunkte unter dem vorgeschriebenen Konvergenzwinkel v. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß man für spiegelverkehrte Abbildskopien sorgen muß, wenn man diese Form des Stereoskops wählt (Figur 83).

Das Wheatstonesche Spiegelstereoskop. In der Regel wird wohl diese Form des Stereoskops für Landschaftsaufnahmen angewandt, die mit parallelen Objektivachsen aufgenommen worden sind. Alsdann sind die spiegelverkehrten photo-



Figur 83.
Das tautomorphe Raumbild bei Benutzung eines WHEATSTONEschen Spiegelstereoskops.

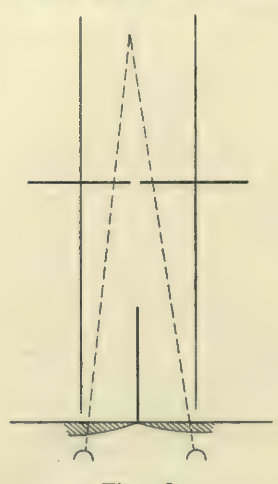
graphischen Bilder einander parallel und gegen die Spiegelflächen unter 45⁰ geneigt zu stellen. Wählt man die richtige Entfernung der Augen von den Spiegeln, so hat man die richtigen Hauptstrahlneigungswinkel für jedes Auge und auch die richtige Konvergenz, aber es kann störend wirken, daß die Akkommodation auf die ziemlich nahen Bilder einzurichten ist. Konstruiert man ein System, das eine ebene Zeichnung verzeichnungsfrei im Unendlichen abbildet, so muß man dieses zwischen die Zeichnung und das Auge einschalten, und zwar ist die Brennweite so zu wählen, daß sie gleich ist der des Aufnahmeobjektivs. In gewissen Fällen kann das Aufnahmeobjektiv selbst zu dieser Zwischenschaltung verwendet werden.

In dem einfachen WHEATSTONEschen Spiegelstereoskop haben wir eine sehr vollkommene Einrichtung, um die Abbilder zu den Augen in die richtige Lage zu bringen, denn die Abbildung an ebenen Spiegeln ist von absoluter Vollkommenheit und kann keine Größenänderung der Neigungswinkel w, W und der Konvergenz v herbeiführen. Ferner ist man in der Größe der Neigungswinkel w, oder dem angularen Gesichtsfelde erst dann durch Grenzen beschränkt, die in dem Apparat selber liegen, wenn es sich um ungewöhnlich große Winkel w handelt. Ein von H. v. HELMHOLTZ[1] hervorgehobener Nachteil liegt in der Schwierigkeit, eine gleichmäßige Beleuchtung beider Bilder herbeizuführen.

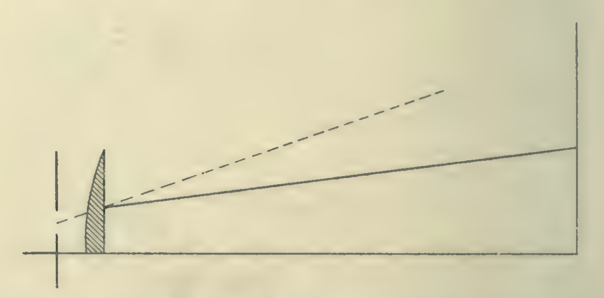
[1] H. v. HELMHOLTZ, H. ph. O. p. 785.

Das Brewstersche Prismenstereoskop. Eine andere Einrichtung, die dazu benutzt wird, stereoskopische Aufnahmen den Augen so vorzuführen, daß der Gegenstand selbst betrachtet zu werden scheint, wurde 1843 von Sir D. Brewster angegeben. Wir nehmen an, daß die beiden Halbbilder in einer Ebene ausgebreitet sind. Zwei Stücke einer dicken Konvexlinse, die wie ein Prisma mit einer angekitteten dünnen Sammellinse wirken, stehen den beiden Zeichnungen gegenüber und ändern die Richtungen der von homologen Punkten ausgehenden Hauptstrahlen so, daß sie sich in dem Raume hinter den Linsen zu schneiden scheinen (Figur 84).

An und für sich läßt sich ein Urteil über die Ähnlichkeit des so vermittelten Raumbildes nicht fällen, da sich wohl Fälle denken lassen, in denen sie strenge vorhanden ist; in der Regel aber wird sie zu wünschen übrig lassen, weil die Abbildung durch die Linsenstücke sicher nicht gut ist. Zeichnen wir den Strahlengang für eine solche Linse deutlicher, so erkennen wir, daß sie mit außerachsial gestellter Blende benutzt wird, eine Benutzungsart, die an Schärfe und Winkeltreue der resultierenden Bilder viel zu wünschen übrig läßt (Figur 85). Weitere Nachteile dieser Anordnung liegen in der Beschränkung der Bildformate, da der Abstand entsprechender Punkte, wie man leicht einsieht, nicht mehr als 70 mm betragen darf. Als günstiger Umstand ist dagegen die Leichtigkeit hervorzuheben, mit der sich eine gleichmäßige Beleuchtung beider Halbbilder herbeiführen läßt.



Figur 84.
Schema zum Brewsterschen Prismenstereoskop.



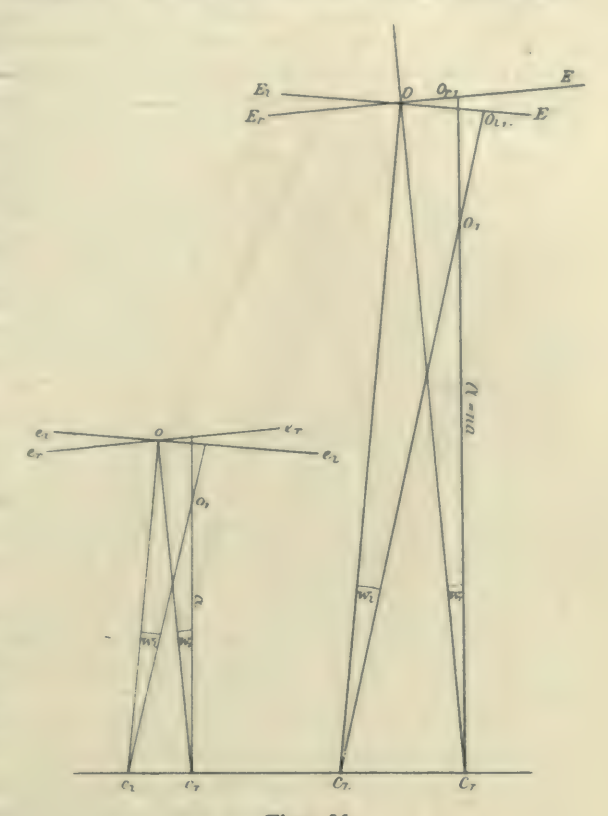
Figur 85.
Schematischer Strahlengang in einer Linse des Brewsterschen Stereoskops.

Das Helmholtzsche Linsenstereoskop. Wesentlich günstigere optische Bedingungen bietet das Helmholtzsche Stereoskop[1], bei dem die beiden in einer Ebene befindlichen Halbbilder durch Okulare betrachtet werden, in deren Brennebenen diese Bilder stehen. Bei der Okularkonstruktion sind bei mäßigen Hauptstrahlwinkeln gröbere Abweichungen von der Orthoskopie nicht vorhanden, und somit erfüllt dieses Instrument dann die Bedingungen für die Tautomorphie des Raumbildes, wenn es sich um die Betrachtung von Landschaftsaufnahmen handelt, die mit Objektiven von der Brennweite der Okulare und in der Entfernung der Drehungszentren gemacht sind. Die Okulare stellen zwei Brennweiten zur Verfügung, und Einstellungen für Augenweite und richtige Höhe sind vorgesehen.

Die homöomorphen Raumbilder. Horatio S. Greenough hat wohl zuerst auf folgende Überlegung aufmerksam gemacht: Setzen wir einen Beobachter voraus, der ein in bestimmter Entfernung befindliches Objekt mit beiden Augen betrachtet, so ändert sich an den Winkeln, unter denen er die Objekte wahr-

[1] H. v. Helmholtz, H. ph. O. p. 829.

nimmt, nichts, wenn man Beobachter, Entfernung und Objekt in jeder Richtung gleichmäßig vergrößert. Mithin hat offenbar der Lilliputaner[1], der in einer Entfernung von 25 mm eine Erbse betrachtet, von ihrer Größe, Form und Entfernung denselben Eindruck, wie ein normaler Mensch, der eine Orange aus einer Entfernung von 30 cm beschaut. H. S. GREENOUGH benutzt diese Überlegung zur Konstruktion eines schwach vergrößernden Mikroskops mit richtiger Plastik. Es werden die Augen des Lilliputaners durch zwei Objektive an den Orten c_l, c_r ($c_l c_r = \frac{65}{12}$ mm = 5,42 mm) ersetzt, deren Achsen die Konvergenz v der Hauptblickrichtungen des supponierten kleinen Wesens erhalten, und die beide auf den von ihm fixiert gedachten Punkt o eingestellt sind. Nehmen wir zunächst einmal an, die Objektive vergrößerten genau zwölfmal, und die vergrößerten Abbilder $E_l E$ und $E_r E$ würden im richtigen Winkel v zu einander aufgestellt, so bestimmen die in der richtigen Entfernung $\mathfrak{A} = 12\,\mathfrak{a}$ festgesetzten Projektionszentren C_l und C_r mit homologen Bildpunkten O_{l1}, O_{r1} eine Schar von Richtungslinien, die zu einem Raumbilde führen. Dieses Raumbild ist nach seiner Entstehung dem Raumobjekt streng ähnlich und zeigt alle Längen in zwölffacher Vergrößerung (Figur 86).



Figur 86.
Zur Herleitung der homöomorphen Raumbilder nach H. S. GREENOUGH.

In die Orte C_l und C_r können wir die Drehpunkte unserer Augen bringen, da sie nach der Konstruktion 65 mm von einander entfernt sind. Wir verwirklichen den hier besprochenen Fall, indem wir die spiegelverkehrten Abbilder in einen WHEATSTONEschen Spiegelapparat bringen, ganz wie es oben besprochen wurde. Dann bewirkt das Raumbild in uns die Vorstellung von einem Raumsubstitut, das genau dem Eindrucke entsprechen kann, den der zwölffach vergrößerte Gegenstand in der größeren Entfernung auf uns machen würde.

Es macht keinen wesentlichen Unterschied gegen das hier Besprochene, wenn nicht physische Kopien der Abbilder, sondern ihre virtuellen Luftbilder dem Auge dargeboten werden, wie es tatsächlich in dem *orthomorphen Mikroskop* von H. S. GREENOUGH geschieht. Nach dem Vorhergegangenen ist es klar, daß, abgesehen von der Konvergenz der Blickrichtungen auch die Neigungswinkel w_l, w_r der Hauptstrahlen für jedes einzelne Auge sich beim Durchtritte durch das

[1] Nach der SWIFTschen Satire „GULLIVER's travels" ist der Einwohner von Lilliputa ein nach jeder Dimension auf 1 : 12 verkleinerter, der von Brobdingnak ein nach jeder Dimension auf 12 : 1 vergrößerter Mensch.

Instrument nicht ändern dürfen. Da beim GREENOUGHschen orthomorphen Mikroskop die erste Bedingung durch die Anlage des Tubus erfüllt ist, so drückte S. CZAPSKI[1] die zweite dadurch aus, daß er vorschrieb, die Pupille des betrachtenden Auges müsse in den Knotenpunkt des Mikroskops gebracht werden. Gegen diese Formulierung läßt sich vom Standpunkte der Richtigkeit des Eindruckes kein Widerspruch erheben, dagegen leidet bei den üblichen Objektivtypen bei einem derartigen Strahlengange die Schärfe der Bilder. Läßt man im Interesse der Winkeltreue für endliche Winkel w die Abbildung durch photographische Objektive von symmetrischem Typus leisten, so dürfen die Okulare nur die Bilder umkehren, sie aber nicht mehr vergrößern, damit an dem absoluten Betrage der Neigungswinkel w nichts geändert werde. Fassen wir alles zusammen, so erhalten wir das Resultat:

Wir erhalten als Raumbild ein in allen Dimensionen gleichmäßig vergrößertes dreidimensionales Gebilde, wenn die lineare Vergrößerung des orthomorphen Mikroskops gleich ist dem Quotienten aus dem Abstande der Augendrehungspunkte dividiert durch den Abstand der E.-P. der Objektive, und wenn sowohl die Konvergenz v der Achsen als die Hauptstrahlneigungswinkel w für jedes Einzelsystem vor und nach dem Durchtritte durch das Instrument je die gleichen Werte haben.

In ganz analoger Weise ließe sich auch ein *orthomorphes Makroskop* konstruieren, um von großen Gegenständen in endlicher Entfernung einen richtigen Eindruck zu erhalten. Dieser würde — um bei dem Bilde zu bleiben — dem entsprechen, den ein Riese aus Brobdingnak von demselben Gegenstande erhielte, wenn er ihn aus der Entfernung der Objektive mit konvergenten Blickrichtungen betrachtete. Wir gehen aber auf diesen Apparat nicht näher ein, da er zu wenig praktisches Interesse zu bieten scheint.

Ein spezieller Fall der oben angeführten GREENOUGHschen Regel hat aber besonderes Interesse, und er tritt dann ein, wenn beide Achsen vor und nach dem Durchtritte durch das Instrument parallel gerichtet sind und nachher nur anderen Abstand haben als vorher.

Der im Achsenschnittpunkte gelegene Hauptfixationspunkt rückt in diesem Falle in das Unendliche, und durch das Instrument wird also eine im Unendlichen befindliche E.-E. wieder im Unendlichen abgebildet, wie das beim Gebrauche eines Doppelfernrohres durch einen Normalsichtigen tatsächlich der Fall ist. Beachten wir aber auch noch die Bedingung, daß die Hauptstrahlenneigung w in den Teilinstrumenten nach dem Durchgange durch das Instrument ungeändert bleiben muß, so folgt unmittelbar, daß es sich nur um Fernrohre mit der Vergrößerung $\Gamma = 1$ handeln kann. Unter diesen Voraussetzungen lautet der GREENOUGHsche Satz:

Bei der Betrachtung eines räumlichen Gebildes durch zwei Fernrohre von der Vergrößerung 1 mit parallelen Achsen wirkt auf unsere Augen als Raumbild ein in allen seinen Dimensionen $\varkappa$-fach verkleinertes (vergrößertes) räumliches Gebilde, wenn die E.-P. der Fernrohre das $\varkappa$-fache (den $\varkappa$ ten Teil) des Abstandes der Augendrehungspunkte haben.

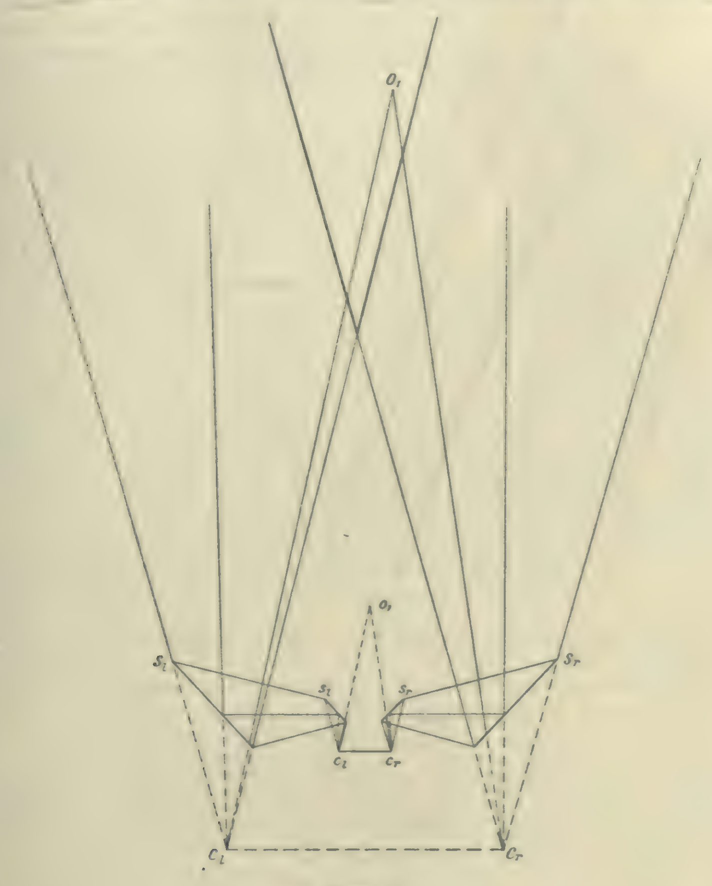
Ein regelmäßig verkleinertes oder vergrößertes Raumbild läßt sich aber auch durch eine Einrichtung erreichen, die viel älter ist als die GREENOUGHschen Ideen; es ist das *das Helmholtzsche Spiegeltelestereoskop*[2] (Figur 87).

Zwei Paare paralleler Spiegel $S_l s_l$, $S_r s_r$ sind in der Regel so aufgestellt, daß die inneren Spiegel s_l, s_r einen Winkel von 90° mit einander bilden. Den beiden Augendrehungspunkten c_l, c_r entsprechen gespiegelte Zentren in C_l und C_r. Jedem Strahle $C_l O_1$, $C_r O_1$ durch eines dieser Zentren mit irgend welcher

[1] S. CZAPSKI und W. GEBHARDT, Ztschr. f. wiss. Mikr. **14.** 296. 1897. — [2] Die von W. HARDIE getroffene Einrichtung kenne ich nur aus der Bemerkung im H. d. ph. O. p. 836.

Neigung gegen die Basis $C_l C_r$ entspricht ein homologer Strahl $c_l o_1$, $c_r o_1$ durch die Drehungspunkte der Augen c_l, c_r mit der gleichen Neigung gegen die Augenbasis. Mithin erhalten wir in aller Strenge durch eine Parallelenkonstruktion ein den Augen dargebotenes, homöomorphes Raumbild, dessen Dimensionen in demselben Verhältnisse zu denen des Raumobjekts stehen, wie die Augenbasis zur Spiegelbasis.

Die unseren Augen als Tiefe erkennbare Entfernung reicht, wie wir aus dem Früheren wissen, etwa bis auf 500 m, und diese Entfernung gilt ebenso für das



Figur 87.
Das Helmholtzsche Spiegelstereoskop.

neue, $\varkappa$-fach verkleinerte Raumbild; wir haben also eine $\varkappa$-fach gesteigerte Tiefenwahrnehmung, wenn wir — wozu wir geneigt sind — alle am Raumbilde gemachten Tiefenfeststellungen unmittelbar auf das Raumobjekt übertragen. Wir drücken diesen Umstand, daß bei der Benutzung des Telestereoskops (mit einer Spiegelbasis $C_l C_r = \varkappa c_l c_r$) unser Tiefenunterscheidungsvermögen am Raumobjekt auf das $\varkappa$-fache gesteigert ist, durch die Bezeichnungsweise aus, das Telestereoskop habe eine $\varkappa$-fache *spezifische Plastik.*

Wie man leicht einsieht, macht es für die Konstruktion des Raumbildes keinen Unterschied, wenn man zur Betrachtung eines näheren Gegenstandes die inneren Spiegel s_l, s_r unter einem kleineren Winkel als einem rechten zusammenstoßen läßt; die Bedingung für die Orthomorphie des Raumbildes ist immer die

Parallelstellung der Elemente eines Spiegelpaares. Es ändert sich hierbei nur der dem Instrument zugängliche Raum. In der Figur 87, in der die inneren Spiegel s_l, s_r senkrecht auf einander stehen, ist dieser Raum auf ein Dreieck beschränkt, dessen Basis im Unendlichen liegt, und das den Punkt O_1 enthält; es ist durch stärkere Umrandung hervorgehoben. Nur die darin liegenden Punkte sind gleichzeitig beiden Spiegelzentren C_l, C_r sichtbar. Wenn man die Spiegel s_l, s_r einen spitzen Winkel mit einander bilden läßt, so rückt der nächste, beiden Spiegelzentren sichtbare Punkt näher heran, und der zugängliche Raum kann gegebenenfalls ganz im Endlichen liegen.

Es macht dem Vorhergehenden gegenüber keinen wesentlichen Unterschied, wenn man die Augen vor die äußeren Spiegel stellt, ihre Drehungspunkte also mit C_l und C_r zusammenfallen läßt. Man erhält ganz analog dann ein regelmäßig vergrößertes Raumbild.

Es sei hier bemerkt, daß, wie H. v. Helmholtz[1] hervorhebt, A. Rollet eine Einrichtung angegeben hat, die uns denselben Dienst leistet, wie ein Telestereoskop mit sehr geringer Änderung des Abstandes. Man kittet zwei planparallele Glasplatten größerer Dicke (nicht notwendig) senkrecht gegen einander. Je nachdem man nun durch die konkave Seite des Winkels nach der konvexen sieht oder umgekehrt, wird der Augenabstand gesteigert oder verringert. Die in den Bildern der Augendrehungspunkte eintretende sphärische Aberration kann bei mäßigen Gesichtsfeldwinkeln vernachlässigt werden.

Eine wichtige Anwendung des dem Telestereoskop zugrunde liegenden Prinzips läßt sich mit Hilfe der Photographie machen.

Nehmen wir ein Objekt mit zwei Objektiven gleicher Brennweite unter paralleler Richtung ihrer in einer Horizontalebene liegenden Achsen auf, wobei die E.-P. beider Instrumente die Entfernung D haben mögen, so können wir im allgemeinen unter Benutzung des Wheatstoneschen Apparats die eine Aufnahme dem einen, die andere dem anderen Auge unter den richtigen Neigungswinkeln w darbieten. Wir erhalten dann (bis auf die veränderte Akkommodation und nach Zwischenschaltung orthoskopischer Linsen ausreichender Brennweite auch vollständig) den gleichen Eindruck, den ein in allen Teilen $\left(\varkappa = \frac{D}{2a}\right)$ $\varkappa$-fach verkleinertes Objekt im $\varkappa$-ten Teile der Entfernung auf uns machen würde. Wir haben also denselben Fall vor uns wie beim Helmholtzschen Telestereoskop selbst, mit dem Unterschiede, daß wir in der Wahl der Entfernung D keinerlei Rücksicht auf die Dimensionen des Apparats zu nehmen haben.

Es sei hier bemerkt, daß die meisten richtig konstruierten Stereoskope diesen Fall verwirklichen, weil bei den Aufnahmeapparaten in der Regel der Abstand D größer ist als der Betrag $2a$ beim Menschen.

Macht man mit E. Deville[2] die inneren Spiegel des Wheatstoneschen Apparats halbdurchsichtig, so kann man in dem vor den Spiegeln gelegenen Teile des Raumes, in dem das Raumbild erscheint, Pointierungs- und Meßvorrichtungen anbringen. Wie aus der unten angegebenen Quelle ersehen werden kann, hat sich C. Pulfrich eingehend mit der Ausbildung dieser Idee beschäftigt; der Stereo-Planigraph ist das Ergebnis dieser Studien.

Bevor wir diesen Gegenstand verlassen, wollen wir auf das durch das Telestereoskop in uns hervorgerufene Raumsubstitut etwas näher eingehen, da es für eine später zu besprechende Klasse von Doppelfernrohren von Bedeutung ist.

H. v. Helmholtz[3] hat sich dahin ausgesprochen, daß ihm beim Gebrauche

[1] H. v. Helmholtz, H. ph. O. p. 837. — [2] Siehe C. Pulfrich, Über eine neue Art der Herstellung topographischer Karten und über einen hierfür bestimmten Stereo-Planigraphen. Ztschr. f. Instrumentenk. **23.** 133—148. Maiheft 1903. — [3] H. v. Helmholtz, H. ph. O. p. 794.

des Telestereoskops das Raumbild auch wirklich zur Wahrnehmung komme, daß er also den Eindruck eines $\varkappa$-fach verkleinerten Modells habe. Diese Aussage ist von späteren Schriftstellern nicht immer bestätigt worden, so hat P. GRÜTZNER[1] (und mit ihm andere) einen davon ganz verschiedenen Eindruck: die Tiefenausdehnung näherer Gegenstände, die er nicht sehr viel kleiner als mit bloßen Augen sah, erscheint ihm stark erhöht. Die Erklärung, die er dafür gibt, ist der analog, die auf p. 281 bei der HEINEschen Täuschung angeführt wurde. Man schätzt die absolute Entfernung nach den Momenten der Tiefendeutung, die dieselben sind, wie beim Sehen mit bloßen Augen, etwa ebenso wie dort, d. h. für das Raumbild entschieden zu hoch, und es entspricht dann dieser überschätzten Entfernung naher Gegenstände eine zu große Tiefe. Über meinen Eindruck bei der Betrachtung naher Gegenstände würde ich mich etwa ebenso äußern; bei der Betrachtung einer Landschaft sehe ich sie ziemlich unverändert hinsichtlich der Größe, namentlich dann, wenn ich zwischenein ein Auge schließe, dagegen scheint mir mein Tiefenunterscheidungsvermögen außerordentlich erhöht. Bei einem mit Hilfe von Photographien hergestellten Telestereoskop habe ich viel eher den Eindruck eines kleinen Modells, wohl deswegen, weil ich durch die ungewohnte Färbung der Diapositive immer wieder daran erinnert werde, daß ich nicht der Wirklichkeit selbst, sondern einem Substitut gegenüberstehe.

Gehen wir nun zu den *heteromorphen* Raumbildern über, so sind eben in der weitaus überwiegenden Mehrzahl der in der Praxis vorkommenden Fälle die im vorangehenden aufgeführten Bedingungen für die Homöomorphie nicht eingehalten. Wohl am häufigsten findet sich die Abweichung von der GREENOUGHschen Regel, daß zwar die Konvergenz der Achsen, aber nicht die Größe der Neigungswinkel nach dem Durchgange durch das Instrument erhalten bleibt. Auf den allgemeinen Fall endlicher Konvergenz der Achsen werden wir später noch kurz zu sprechen kommen, während wir jetzt die spezielle Annahme machen, daß die Achsen vor und nach dem Durchgange durch das Instrument einander parallel sind. Diese Bedingung führt uns auf

Die porrhallaktischen Instrumente. *Die gewöhnlichen Doppelfernrohre.* Für das gewöhnliche vergrößernde Doppelfernrohr ist es charakteristisch, daß die Hauptstrahlneigung w' hinter dem $\varkappa$-fach vergrößernden Instrument definiert wird durch

$$\operatorname{tg} w' = \varkappa \operatorname{tg} w \quad ,$$

wenn w die Hauptstrahlneigung auf der Objektseite war.

Stellen wir uns in P_l und P_r die E.-P. des Instruments vor mit den parallel gerichteten Achsen $P_l M_l$, $P_r M_r$ und konstruieren wir in M_l, M_r zwei zusammenfallende achsensenkrechte Ebenen, die hier durch ihre Spur in der Papierebene gekennzeichnet werden, so können wir den Fußpunkt O des von einem beliebigen Objektpunkte auf die Papierebene gefällten Lotes in bekannter Weise durch die Punkte O_l, O_r definieren, in denen die Senkrechte $M_l M_r$ von den Verbindungslinien $P_l O$, $P_r O$ geschnitten wird (Figur 88).

Wir konstruieren von P_l und P_r aus Punkt für Punkt die Abbildskopien auf den in M_l und M_r errichteten achsensenkrechten Ebenen und zeichnen sie in dem danebenstehenden Diagramm noch einmal, so daß also gilt

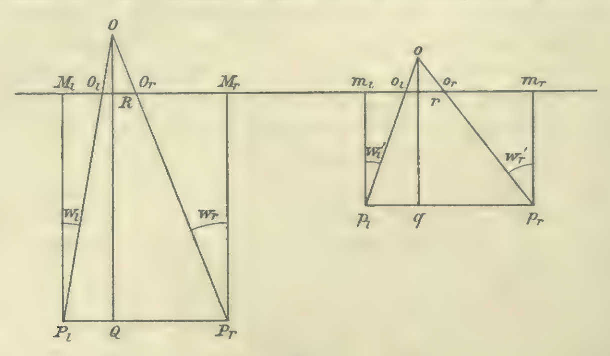
$$M_l M_r = m_l m_r \quad ; \qquad M_l O_l = m_l o_l \quad ; \qquad M_r O_r = m_r o_r \quad \text{u. s. w.}$$

Alsdann brauchen wir auf den in m_l und m_r errichteten Loten nur die Strecken

$$m_l p_l = \frac{M_l P_l}{\varkappa} \quad ; \qquad m_r p_r = \frac{M_r P_r}{\varkappa}$$

[1] P. GRÜTZNER, Arch. f. d. ges. Physiol. **90.** 560. 1902.

abzutragen, um für jedes Fernrohr die Projektionszentren p_l, p_r auf der Bildseite zu erhalten, denn für alle durch sie und entsprechende Punkte der Abbildskopien gehenden Strahlen ist nach unserer Konstruktion die Tangentenbedingung von selbst erfüllt. In dem dadurch definierten Raumbilde entsprechen die auf die Papierebene gefällten Lote Geraden, die im Raumobjekt senkrecht auf der Papierebene standen. Die Senkrechten des Raumobjekts wurden durch Senk-



Figur 88.
Zum Beweise der porrhalaktischen Wirkung gewöhnlicher Doppelfernrohre.

rechte in den beiden Abbildern repräsentiert, denen in den kongruenten Abbildskopien wiederum Senkrechte entsprechen. Die durch sie und die beiden neuen Projektionszentren gelegten Ebenen müssen sich also in Geraden schneiden, die zur Papierebene senkrecht stehen. Die Entfernung $h' = oq$ eines solchen zugehörigen Fußpunktes o von der Basis $p_l p_r$ läßt sich einfach durch $h = OQ$ ausdrücken. Es ist nämlich

$$h(\operatorname{tg} w_l + \operatorname{tg} w_r) = P_l P_r$$

und analog

$$h'(\operatorname{tg} w_l' + \operatorname{tg} w_r') = p_l p_r = P_l P_r \quad ;$$

mithin erhalten wir unter Benutzung der Tangentenbedingung

$$h' = \frac{h}{\varkappa} \quad .$$

Von selbst folgt auch

$$\frac{OR}{\varkappa} = or \quad .$$

Es sei nun $\mathfrak{H}$ eine in O auf der Zeichenebene errichtete Senkrechte, so ergeben sich in O_l und O_r auf den E.-E. des Instruments repräsentierende Geraden von der Länge

$$H = \frac{\mathfrak{H} \cdot RQ}{h} \quad .$$

Diese treten unverändert auch in o_l und o_r auf, so daß ihnen im Raumbilde in o die Senkrechte entspricht

$$\mathfrak{H}' = \frac{H \cdot h'}{rq} \quad ,$$

und man erhält durch Einsetzen des Wertes von H sofort:

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \quad .$$

Es ergibt sich also ein Raumbild, in dem alle Punkte wegen des nur den $\varkappa$-ten Teil des früheren betragenden Abstandes zwischen Auge und zugehörigem

Abbilde unter Winkeln erscheinen, deren Tangenten den $\varkappa$-fachen Betrag der am Raumobjekt haben, und wo die Tiefenerstreckung im Verhältnisse zur Breiten- und Höhenausdehnung auf den $\varkappa$-ten Teil zusammengeschrumpft ist. Wir erinnern uns, daß ein entsprechender Eindruck schon auf das einzelne Auge gemacht wurde.

Diesem Raumbilde gegenüber besitzt unser Tiefenunterscheidungsvermögen den normalen Wert, und es ist auf das $\varkappa$-fache gesteigert, wenn wir die am Raumbilde gemachten Tiefenfeststellungen unmittelbar auf das Raumobjekt übertragen. Was die Tiefenausdehnung allein angeht, so haben wir also hier denselben Gewinn wie bei einem HELMHOLTZschen Telestereoskop $\varkappa$-facher Plastik, doch ist im Gegensatze zu jenem das hier vorliegende Raumbild dem Raumobjekt nicht mehr ähnlich, sondern in einer, allerdings leicht übersichtlichen Weise geändert.

Diese Verhältnisse finden sich bei allen vergrößernden Doppelfernrohren; handelt es sich, was selten der Fall ist, um verkleinernde Fernrohre, so sind die Tiefenerstreckungen im Raumbilde proportional übertrieben.

Was das Raumsubstitut angeht, so ist die Steigerung der Tiefenwahrnehmung wohl jedem auffällig. Man redet daher im allgemeinen von der gesteigerten Plastik eines vergrößerten Doppelfernrohres und versteht darunter die dadurch vermittelte, proportional der Vergrößerungsziffer wachsende Fähigkeit, entfernte Gegenstände vom unendlich fernen Hintergrunde zu trennen. Achtet man aber auf die einzelnen Objekte endlicher Tiefenausdehnung innerhalb des plastisch empfundenen Gebietes und vergleicht sie mit dem Eindrucke, den sie auf die bloßen Augen machen, so erscheinen sie durch das Fernrohr kulissenartig in der Sehrichtung zusammengedrückt, d. h. sozusagen mit verminderter Plastik. Diese Erscheinungsform ist eine unmittelbare Folge eben des Umstandes, der die Bezeichnung „Steigerung der Plastik" veranlaßt hatte.

Die Doppelfernrohre mit verändertem Objektivabstande. Stellen wir ein gewöhnliches Doppelfernrohr von $\varkappa_1$-facher Vergrößerung hinter ein HELMHOLTZsches Telestereoskop von $\varkappa$-facher spezifischer Plastik, so erhalten wir ein Doppelfernrohr mit verändertem Objektivabstande. Wir kommen wohl am einfachsten zur Diskussion seiner Leistung, wenn wir versuchen, sie aus den Leistungen seiner Teilsysteme zu folgern.

Das Telestereoskop mit $\varkappa$-facher spezifischer Plastik lieferte ein in allen Dimensionen $\varkappa$-fach verkleinertes Raumbild, das seinerseits das Objekt für das gewöhnliche $\varkappa_1$-fache Doppelfernrohr abgibt. Dieses rückt den Standpunkt des Beobachters bis auf den $\varkappa_1$-ten Teil an das verkleinerte Modell heran und läßt außerdem die Tiefendimensionen der einzelnen Gegenstände auf den $\varkappa_1$-ten Teil zusammenschrumpfen. Das endgültige Raumbild ist also dem Raumobjekt gegenüber von folgender Beschaffenheit: In einem $\varkappa$-fach gleichmäßig verkleinerten Modell, das aus einem Abstande von $\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{A}}{\varkappa}$ betrachtet wird, werden alle in die Achsenrichtung des Doppelfernrohrs fallenden oder Tiefen-Erstreckungen $\varkappa_1$-fach verkleinert, und der Abstand des Beobachters wird auf

$$\bar{\mathfrak{a}} = \frac{\mathfrak{a}}{\varkappa_1} = \frac{\mathfrak{A}}{\varkappa\varkappa_1}$$

gebracht. Wir haben dann ersichtlich ein Tiefenunterscheidungsvermögen, das auf das $\varkappa\varkappa_1$-fache der ursprünglichen 500 m gesteigert ist, wenn wir unsere Wahrnehmungen direkt auf das Raumobjekt übertragen, und die Veränderung der Tiefenerstreckung ist $\varkappa_1$-fach, d. h. genau dieselbe wie beim gewöhnlichen Doppelfernrohre. Für die eintretende Steigerung des Tiefenunterscheidungsvermögens auf das $\varkappa\varkappa_1$-fache gebraucht man auch den Ausdruck *totale Plastik*[1].

[1] Eine Diskussion der verschiedenen Fälle findet sich in dem schon erwähnten Artikel C. PULFRICHs Ztschr. f. Instrumentenk. **23.** 142. 1903.

Irgend ein Einfluß auf die Homöomorphie des Raumbildes wird durch die besondere Wahl $\varkappa_1 = \varkappa$ nicht erreicht. Wir können also die von späteren Autoren besonders oft wiederholte Helmholtzsche Regel[1] für das Telestereoskop mit Vergrößerung nicht für richtig halten: „Da die Vergrößerung auch eine sechzehnmalige ist" (ebensogroß wie die spezifische Plastik des einfachen Telestereoskops), „so ist die Wirkung des Instruments die, als sähe man das Object mit un„bewaffneten Augen aus einer sechzehnmal kleineren Entfernung, als man es „wirklich sieht."

Eine Besonderheit aber kann das Raumsubstitut der Doppelfernrohre mit verändertem Objektivabstande gegenüber dem der gewöhnlichen besitzen, die nämlich, daß die Objekte bei erweitertem Objektivabstande näher und kleiner, bei vermindertem größer und ferner erscheinen. Der Grund dafür ist derselbe wie beim Telestereoskop. Vergleicht man die Leistungen zweier Doppelfernrohre gleicher Vergrößerung, deren eines einen größeren Objektivabstand hat, mit einander, so ist die angulare Größe der Bilder in beiden Fällen wesentlich die gleiche. Näheren Objektpunkten entspricht aber bei dem Fernrohre mit größerem Objektivabstande eine stärkere Konvergenz als bei dem anderen. Kommt diese zur Wahrnehmung, so wird der Gegenstand näher aufgefaßt und muß wegen der gleichen Winkelgröße kleiner erscheinen. Es ist wohl fast überflüssig, zu betonen, daß diese scheinbare Verkleinerung, da sie die Gesichtswinkel der einzelnen Augen ungeändert läßt, auf die Erkennbarkeit von Einzelheiten ohne Einfluß ist.

Hinsichtlich der eben beschriebenen scheinbaren Verkleinerung besteht hier ein ähnlicher Widerstreit der Meinungen wie beim Telestereoskop selbst. Ich selber vermag die Verkleinerung nicht wahrzunehmen.

Fernrohre mit verändertem Objektivabstande sind mit Hilfe von Prismenumkehrsystemen von der Firma Carl Zeiss nach Angaben von E. Abbe gebaut worden; es wird im Abschnitte über das Fernrohr im einzelnen von ihnen zu handeln sein. Sie werden in der Regel mit vergrößertem Abstande (spezifische Plastik $1\,^3/_4$- bis 7-fach) gebaut, doch hat man für Theaterzwecke auch wohl eine Verringerung des Objektivabstandes vorgeschlagen.

Besondere Erwähnung verdient hier der Entfernungsmesser nach H. de Grousilliers[2], dem ein Doppelfernrohr mit vergrößertem Objektivabstande zugrunde liegt. In der Brennebene eines jeden Okulars ist das stereoskopische Halbbild einer Markenreihe so angebracht, daß diese beim zweiäugigen Sehen an den Stellen des Raumbildes erscheint, die regelmäßig abgestuften Entfernungen (500, 1000, 1500 m u. s. w.) entsprechen. Diese Markenreihe wird gleichzeitig mit dem Raumbilde körperlich wahrgenommen, und die ungenaue Schätzung von absoluten Entfernungen im Raumbilde ist nun zurückgeführt auf die genaue Messung relativer Tiefenunterschiede von Punkten des Raumbildes gegen die nächstgelegenen Marken der Skala. Der stereoskopische Entfernungsmesser ist später in der optischen Werkstätte von Carl Zeiss in Jena von E. Abbe und C. Pulfrich vervollkommnet worden.

Ferner ist hier hinzuweisen auf den Stereo-Komparator von C. Pulfrich[3], der namentlich für astronomische Zwecke — zur Durchmusterung und Ausmessung von Sternphotographien — in Aufnahme gekommen ist. Bei dem Stereo-Komparator ist das Messungsprinzip des stereoskopischen Entfernungsmessers auf physische Abbildskopien angewandt worden. Die Photographien

[1] H. v. Helmholtz, H. ph. O. p. 832. — [2] C. Pulfrich, Phys. Ztschr. **1.** 98. 1899 bis 1900. — [3] C. Pulfrich, Über neuere Anwendungen der Stereoskopie und über einen hierfür bestimmten Stereo-Komparator. Ztschr. f. Instrumentenk. **22.** 65—81; 133—141; 178 bis 192; 229—246.

sind mit Objektiven aufgenommen, deren Achsen zu einander parallel sind und senkrecht auf der gemeinsamen Standlinie stehen.

Unter die Klasse der porrhallaktischen Instrumente gehört auch die große Menge der Stereoskope, wenn die Bilder entweder aus falschen Abständen oder mit solchen Linsen betrachtet werden, deren Brennweiten mit denen der Aufnahmeobjektive nicht identisch sind.

Was nun zum Schlusse andere *heteromorphe* Einrichtungen angeht, so sind die sonstigen stereoskopischen Instrumente heteromorph in noch höherem Grade, und die durch sie erzeugten Raumbilder haben eine nur schwierig auszudrückende Beziehung zum Raumobjekt.

Hierher gehören die binokularen Mikroskope mit Änderung der Hauptstrahlneigung auch dann, wenn die Konvergenz der Achsen ungeändert bleibt. Ferner kommen alle Fälle in Betracht, bei denen in Stereoskopen die Konvergenz der Achsen einen anderen Betrag hat als bei der Aufnahme; auch die Verwendung nicht verzeichnungsfreier Linsen zur Betrachtung orthoskopischer Aufnahmen führt auf heteromorphe Raumbilder.

Von diesen Heteromorphieen sind genauer namentlich die von H. v. Helmholtz[1] behandelten *Reliefbilder* studiert worden. Mit diesem Ausdrucke bezeichnet er das Raumbild, das dann entsteht, wenn man zwei mit parallelen Achsen aufgenommene Stereoskopbilder einander nähert oder von einander entfernt. Die Art der gesetzmäßigen Verbindung, wie sie in diesem Falle zwischen dem Raumobjekt und dem nun als Reliefbild bezeichneten Raumbilde besteht, ist schon frühzeitig von Künstlern empirisch gefunden worden. Von allgemeinerem Interesse ist es, daß das Reliefbild von der Mitte der Basis betrachtet sich Punkt für Punkt mit dem Raumobjekt deckt.

Ein weiterer, einfach übersichtlicher Zusammenhang zwischen dem Raumobjekt und dem heteromorphen Raumbilde findet sich bei der im folgenden beschriebenen *pseudomorphen* Konstruktion. Definieren wir das pseudomorphe Raumbild so, daß die Abbildskopien in unveränderter Lage bleiben, aber je mit dem anderen Auge betrachtet werden, so lassen sich die Eigenschaften des pseudomorphen Raumbildes in dem Falle besonders einfach entwickeln, wenn die Achsen der Aufnahmeobjektive parallel waren und auf der gemeinsamen Bildebene senkrecht standen.

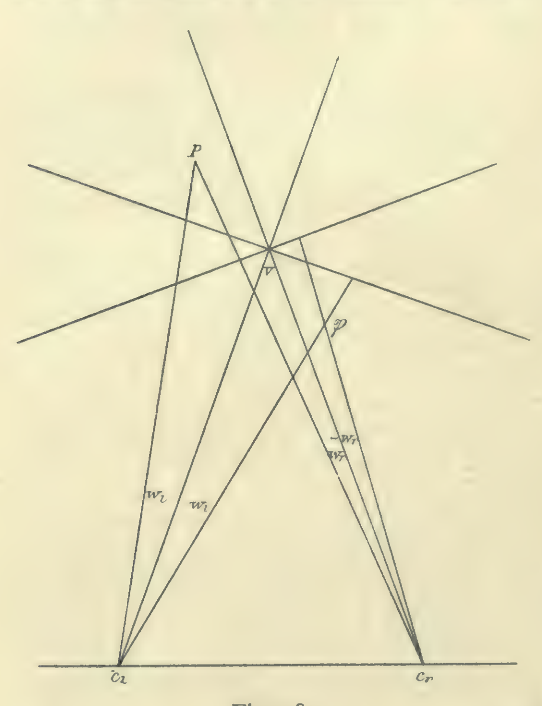
Die Behandlung dieses Falles kann sich eng an die Helmholtzsche Ableitung[2] der stereoskopischen Projektion anlehnen, und man kommt dann zu folgendem Resultat. Nennt man mit ihm die Entfernung der Augen von jener gemeinsamen Bildebene b und die senkrechten Abstände der Objektpunkte von ihr γ, so wird die Lage jedes Bildpunktes im pseudomorphen Raumbilde in folgender Weise bestimmt. Er liegt auf der Verbindungslinie des Objektpunktes mit der Mitte der Augenbasis und in einem solchen Abstande $\bar{\gamma}$ von der Bildebene, daß $\left\{\begin{matrix} b-\gamma, \gamma, \bar{\gamma} \\ b-\bar{\gamma}, \bar{\gamma}, \gamma \end{matrix}\right\}$ die drei Teile der harmonisch geteilten Strecke $\left\{\begin{matrix} b+\bar{\gamma} \\ b+\gamma \end{matrix}\right\}$ sind, je nachdem der Objektpunkt mit den Augen auf derselben Seite der Bildebene liegt oder nicht. Das pseudomorphe Raumbild deckt sich also einäugig vom Mittelpunkte der Augenbasis betrachtet Punkt für Punkt mit dem Raumobjekt, ist ihm aber im allgemeinen nicht ähnlich.

Die Reihenfolge der Objektpunkte in der Tiefenrichtung wird also bei der pseudomorphen Abbildung verändert und zwar deshalb, weil die Strecke RT (s. Figur 79) mit veränderter Bedeutung in die Rechnung eintritt und den Wert von e verändert. Diese Umkehrung der Tiefenfolge hat den Anlaß zur Namengebung gegeben.

[1] H. v. Helmholtz, H. ph. O. p. 816—820. — [2] Derselbe, H. ph. O. p. 812.

Eine andere Art der Betrachtung, bei der solch ein pseudomorpher Effekt hervorgebracht wird, findet sich bei der Benutzung des WHEATSTONEschen Pseudoskops. Durch die Einschaltung von Prismen in den Strahlengang bleibt bei diesem Instrument nur die Richtung nach dem fixierten Punkt erhalten, die Punkte der Nachbarschaft erscheinen spiegelverkehrt.

Zur näheren Betrachtung der Wirkungsweise einer solchen Zwischenschaltung von Spiegeln gehen wir von einem beliebigen Punkte des Raumbildes aus, wie es ohne die Spiegel erscheinen würde, und nehmen dabei den allgemeinen Fall an, daß beide Achsenrichtungen einen endlichen Konvergenzwinkel v einschließen (Figur 89). Die beiden durch die Lage von P bestimmten Neigungswinkel w_l und w_r werden nun auf der anderen Seite ihrer Achse abgetragen, und ihr Schnittpunkt definiert den Punkt $\mathfrak{P}$, der dem pseudomorphen Raumbilde angehört. Eine Übersicht über die Umlagerung der Punkte im pseudomorphen Raumbilde erhalten wir auf folgende Weise: Zählen wir die Winkel nach der Weise der analytischen Geometrie gegen die Richtung des Uhrzeigers als positiv, so sind für w_l, w_r die vier Kombinationen von je zwei Zeichen möglich, $++$, $+-$, $-+$, $--$, und sie verteilen sich, wie in Figur 90 angegeben, auf die Räume 1, 2, 3, 4. Die Scheidungslinien entsprechen den Kombinationen $0+$, $0-$, $+0$, -0, und man sieht ohne weiteres, daß im pseudomorphen Raumbilde die Scheidungslinien erhalten bleiben, und daß sich die Punktfolge in ihnen in bezug auf den Kreuzungspunkt O umkehrt: O nähere Punkte der Scheidungslinien bleiben auch im pseudomorphen Raumbilde O näher. Die zwischen den Scheidungslinien gelegenen Gebiete lagern sich im ganzen um, denn es ist ein ursprünglich in 1, d. h. $w_l > 0$, $w_r > 0$ gelegener Punkt nunmehr dadurch definiert, daß



Figur 89.
Zur Entstehung des pseudomorphen Raumbildes im Pseudoskop von C. WHEATSTONE.

$$\omega_l < 0 \quad , \qquad \omega_r < 0 \quad ,$$

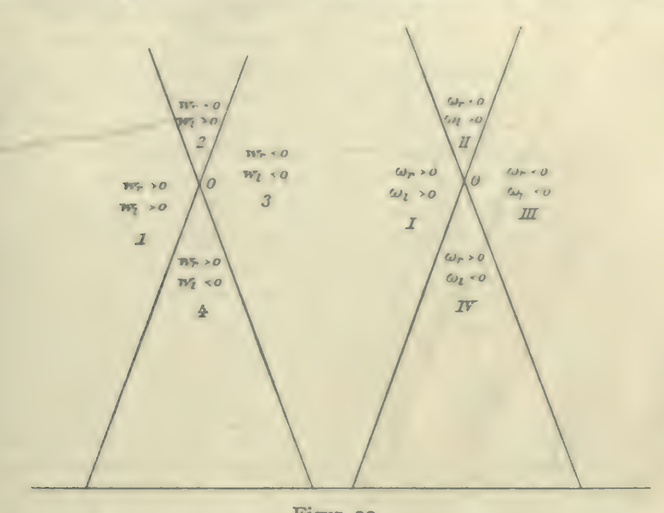
da nach der Konstruktion gilt

$$\omega_l = -w_l \quad ; \qquad \omega_r = -w_r \quad .$$

mithin entsprechen nun den Gebieten	1	2	3	4
die Raumteile	III	IV	I	II.

Dieses Schema wird in Verbindung mit der Erörterung über die Umlagerung auf den Scheidungslinien genügen, um eine Vorstellung der Art der Umlagerung bei der pseudomorphen Abbildung zu schaffen.

Der hier beschriebene pseudomorphe Effekt wird sich auch dann einstellen, wenn den Projektionszentren des Raumbildes umgekehrte an Stelle der spiegelverkehrten Bilder dargeboten werden; in bezug auf die für die Pseudomorphie



Figur 90.
Zur Umlagerung der Raumgebiete bei pseudomorpher Abbildung.

entscheidende Vertauschung von rechts und links verhalten sie sich ebenso wie die spiegelverkehrten Bilder, während die Umkehrung der Höhen für die Tiefenwahrnehmung nichts ausmacht. In der Praxis stellt sich dieser Fall ein, wenn bei binokularen Mikroskopen nicht für eine Aufrichtung der Einzelbilder gesorgt wird.

IX. Das photographische Objektiv.

Von M. v. Rohr.

I. Theoretisches über das photographische Objektiv.

1. Das photographische Objektiv als einfache Sammellinse.

Es kann zwar auch jedes der zur subjektiven Beobachtung dienenden Instrumente durch eine geringe Lagenänderung seiner Teile in ein Projektionssystem umgestaltet werden — und das geschieht in der Tat bei den stärksten Vergrößerungen der Mikrophotographie, sowie bei primitiven Apparaten in der Telephotographie — aber es bleibt eine gesonderte Betrachtung für die Instrumente wenigstens erforderlich, die nicht umgekehrt nach einer solchen geringen Lagenänderung zu subjektivem Gebrauche verwandt werden können. Es sind das die photographischen Objektive, wie sie für Landschaftsaufnahmen und Reproduktionen, für die Zwecke der Architektur- und Porträtphotographie benutzt werden. Mit umgekehrtem Strahlengange können sie zur Vergrößerung von Glasbildern (Diapositiven) und auch zur Projektion körperlicher Objekte von geringer Tiefenausdehnung benutzt werden. Es sei gleich hier bemerkt, daß zu den Projektionssystemen die Objektive der Mikroskope und Fernrohre gehören, wenn sie reelle

Bilder zustande kommen lassen. Man muß sie auch in der Tat für sich betrachten, wenn etwa in ihrer Bildebene Messungen vorgenommen werden sollen.

Diese Projektionssysteme, die photographischen Objektive, gehören in den allgemeinen Grundzügen ihrer Konstruktion zu den einfachsten und ebenso auch in den wesentlichen Momenten ihrer Wirkungsweise zu den am leichtesten zu übersehenden optischen Instrumenten. Der allgemeine Typus aller bis in die neueste Zeit benützten photographischen Systeme ist der der einfachen Sammellinse. Die einzige Ausnahme davon macht nur das Teleobjektiv, das weiter unten auch nach dieser Richtung hin genauer behandelt werden soll. Vorderhand halten wir uns an den Grundtypus der einfachen Sammellinse. Allmählich wurde nun zum Zwecke besserer Hebung der verschiedenen Aberrationen die Form komplizierter gewählt, und die Verfolgung der verschiedenen Verbesserungsvorschläge bildet die Geschichte des photographischen Objektivs, auf die wir später einzugehen haben. In den Einzelheiten der Konstruktion stellen sie infolge der Verschiedenheit der an sie gestellten Ansprüche und des verschiedenen Gewichts, das auf diese Ansprüche je nach den Erfordernissen des Gebrauchs gelegt wird, die variabelste und in speziell dioptrischer Hinsicht die interessanteste Instrumentengattung vor. Es kommt hinzu, daß die große Verbreitung dieser nicht allzu schwierig herzustellenden Instrumente schon in sehr früher Zeit die Konstrukteure zur Nachsuchung von Patenten zwang, und diesem Umstande ist es zu danken, daß wir über die Einzelheiten der verschiedenen photographischen Systeme unvergleichlich besser unterrichtet sind, als etwa über Mikroskopkonstruktionen.

Die nach dem Typus der einfachen Sammellinse konstruierten photographischen Systeme sind der Natur der Sache nach kollektiv und bilden wie früher (p. 61) bewiesen wurde, die linke Hälfte des Objektraumes verkehrt in die rechte des Bildraumes ab. Handelt es sich nun um photographische Aufnahmen, die bei der Betrachtung richtig gehalten, oder um Diapositive, die zur Projektion umgekehrt eingesetzt werden können, so ist diese Umkehrung ohne Nachteil. Sie macht sich indessen störend bemerkbar, sobald es sich um Projektion körperlicher Objekte handelt, die, wie Wasserkammern u. ä. nicht umgekehrt werden können. Da die Konstruktion (negativer) bildaufrichtender Projektionssysteme mit erheblichen Kosten verbunden sein würde, so hilft man sich durch Einschaltung von geeignet gewählten Prismen.

Die dioptrische Wirkung photographischer Systeme wird im wesentlichen durch die lineare Vergrößerung β charakterisiert, mit der sie das scharf eingestellte Objekt wiedergeben. Nun kommt in der photographischen Praxis allein der Fall vor, und die ganze Korrektion der photographischen Systeme ist nur für ihn durchgeführt, daß von einem vor dem Objektiv liegenden Objekt ein umgekehrtes Bild hinter dem Objektiv entworfen wird.

Es ist daher üblich geworden, bei der Aufstellung der optischen Regeln für den Gebrauch des photographischen Objektivs Strecken vom Objektiv aus — sowohl in den Objektraum als in den Bildraum hinein — positiv zu rechnen, wie man auch hier die vordere und die hintere Brennweite stets gleich und von gleichem Zeichen annimmt.

Demzufolge wird die lineare Lateralvergrößerung eines zunächst in endlicher Brennpunktsentfernung $\mathfrak{x}$ angenommenen Objekts y gegeben durch

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{\mathfrak{x}} = \frac{\mathfrak{x}'}{f} \quad .$$

In der photographischen Praxis, wo in der Regel β ein echter Bruch ist, wird meistens $\frac{1}{\beta} = n$ gesetzt, wo man n als Reduktionszahl bezeichnen kann.

Alsdann erhalten wir bei gegebenem n, als Abstände $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$ von den betreffenden Brennpunkten

$$\mathfrak{x} = nf \quad ; \qquad \mathfrak{x}' = \frac{f}{n} \quad ,$$

woraus sich ohne weiteres die Fundamentalformel ergibt:

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}' = f^2 \quad .$$

Will man die Abstände von den entsprechenden Hauptpunkten messen, so muß in beiden Fällen noch die Brennweite f hinzutreten, und es ergibt sich

$$a = \mathfrak{x} + f = (n+1)f \quad ; \qquad b = \mathfrak{x}' + f = \frac{n+1}{n} f \quad .$$

Auch hieraus erhalten wir die zweite Elementarformel:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{f} \quad .$$

die sich nur durch das Vorzeichen von a von der entsprechenden, auf p. 85 aufgeführten unterscheidet.

Der Abstand von Objekt und Bild ist, abgesehen von dem die Hauptpunkte trennenden Interstitium

$$a + b = \frac{(n+1)^2}{n} f \quad .$$

Wird, wie bei der Landschaftsphotographie, $n = \infty$, so versagen die Formeln, weil man das unendlich große y nicht mit dem endlichen y' vergleichen kann. Hier tritt für y sein angularer Wert ein

$$\operatorname{tg} w = \frac{y}{a} \quad ,$$

und wir erhalten nun den Ausdruck

$$\frac{y'}{\operatorname{tg} w} = \frac{y'}{y} \cdot a = \left[(\mathfrak{x} + f) \frac{f}{\mathfrak{x}} \right]_{\mathfrak{x} = \infty} = f \quad .$$

Rückt das Objekt in das Unendliche, und erscheint es unter einer angularen Größe w, so ist die Bildgröße der Äquivalentbrennweite direkt proportional und gegeben durch

$$y' = f \operatorname{tg} w \quad .$$

2. Die Strahlenbegrenzung[1].

Die Aufsuchung der Aperturblende bei photographischen Objektiven ist darum nicht schwierig, weil sie in der Regel variabel eingerichtet und dadurch kenntlich gemacht ist.

Diese mechanische Einrichtung, bei der wir einen Augenblick verweilen wollen, bestand früher in der Regel in einem mit einer Öffnung versehenen Metallstreifen, der durch einen seitlich im Objektivrohre angebrachten Schlitz eingeschoben wurde. Man bezeichnet dieses System als das der *Schieberblenden* nach J. WATERHOUSE, der es 1858 veröffentlichte. Man hat es heute fast nur bei den zur Reproduktion verwandten Objektiven beibehalten, weil man bei ihm

[1] Wiederholungen aus dem Kapitel VII ließen sich in diesem Abschnitte um so weniger ausschließen, als er bereits im Juli 1902 fertig vorlag. Es scheint mir aber andererseits auch einen Vorteil zu bieten, daß man die beim photographischen Objektiv besonders übersichtliche Strahlenbegrenzung hier beisammen findet.

nicht an eine kreisförmige Schieberöffnung gebunden ist, sondern auch quadratische und komplizierter gestaltete Öffnungen benutzen kann, die bei autotypischen Reproduktionsverfahren häufig erwünscht sind. Eine optisch interessante Form der Schieberblenden sind die von E. Deville veröffentlichten multiple stops, die dann später von C. Grebe studiert und als Koinzidenzblenden empfohlen sind.

Seit dem Ende der achtziger Jahre hat man diese Schieberblenden in steigendem Maße zugunsten der schon von N. Niepce benutzten *Irisblende* verlassen, bei der eine große Zahl sichelförmiger Lamellen ein rundes Loch offen lassen, das infolge gezwungener Führung immer zentrisch bleibt und bis auf eine ganz kleine Öffnung geschlossen werden kann.

Als Gesichtsfeldblende wirkt die Linsenfassung wenigstens in der Regel und sie bewirkt bei genügender Neigung der Hauptstrahlen auch eine sekundäre Aperturbegrenzung. Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem es sich um eine oder um zwei abblendend wirkende Fassungen handelt. Im ersten Falle, wie er bei Landschaftslinsen mit Vorderblende verwirklicht ist, erscheint für genügende Hauptstrahlneigungen an Stelle des lichten Kreises der E.-P. infolge einseitiger Abblendung durch die Objektivfassung ein lichtes Kreiszweieck, bis bei zu großer Hauptstrahlneigung überhaupt kein Strahl mehr das Objektiv passiert (s. Figur 57 und 58 auf p. 215).

Im anderen Falle, wie er bei Doppelobjektiven vorkommt, wirken bei gewissen Hauptstrahlneigungen beide, die vordere und die hintere Fassung aperturbeschränkend, und demensprechend wird der lichte Kreis der E.-P. hier von beiden Seiten durch die Fassung eingeschränkt, und der Winkel, für den völlige Abblendung herrscht, ist hier erheblich kleiner als im ersten Falle (s. Figur 59 auf p. 216).

Die sekundäre Aperturbegrenzung durch die Fassungsränder bezeichnet man in der photographischen Praxis in der Regel als *Vignettieren*. Man kann den Gesichtsfeldwinkel, für den ein Vignettieren noch nicht eintritt, dadurch steigern, daß man eine kleinere Blendenöffnung anwendet, d. h. das Objektiv abblendet.

Ähnlich beschränkend für Apertur und Gesichtsfeld wie die Fassung des Objektivs selbst kann auch ein Umkehrprisma wirken, das bei gewissen Reproduktionsverfahren vor das Objektiv geschaltet wird, wenn es sich darum handelt, ein spiegelverkehrtes Bild zu erhalten.

Das photographische Objektiv bei der Aufnahme körperlicher Objekte. Für die weitaus häufigste Verwendung dieses Instruments ist es ganz charakteristisch, daß die Objekte sich nicht in einer Ebene befinden, während doch im Bildraume nur eine Ebene, die der lichtempfindlichen Schicht, zur Verfügung steht, auf der, wie man sich ausdrückt, „die Bilder entworfen“ werden. Um nun allgemeine Aussagen in diesem Falle machen zu können, erweist es sich als zweckmäßig, die dieser Ebene, der Mattscheibenebene = M.-E., im Objektraume entsprechende Objektebene einzuführen. Wir wollen sie als Einstellungsebene = E-E. einführen und nehmen zunächst an, daß sie ihrer ganzen Ausdehnung nach der M.-E. konjugiert sei, oder daß, mit anderen Worten, das System ein anastigmatisch geebnetes Bildfeld habe.

Betrachten wir nun einmal den Fall, daß die Aperturblende eine unendlich kleine Öffnung besitze, so sind nur die Hauptstrahlen imstande, das System zu passieren. Die einzelnen Punkte des körperlichen Objekts bestimmen demnach mit der E.-P. als Spitze einen Hauptstrahlenkegel, der auf der um $\mathfrak{A}$ entfernten E.-E. eine Projektionsfigur ausschneidet, bei der die E.-P. das perspektivische Zentrum ist. Diese Projektionsfigur ist das *Abbild des körperlichen Objekts für diese Lage der E.-P.*, und ein an die Stelle der E.-P. gebrachtes Auge erhält von dem körperlichen Objekt genau den gleichen Eindruck, wie von dem Abbilde auf der E.-E. Diese Übereinstimmung besteht aber auch allein für diese gegenseitige Entfernung $\mathfrak{A}$ zwischen E.-E. und E.-P. Jede Abstandsänderung auf der

Achse, ganz abgesehen von einer seitlichen Verschiebung der E.-P. hat zur Folge, daß der Eindruck, den das Auge von dem körperlichen Objekt erhält, von dem abweicht, der durch das Abbild im veränderten Abstande hervorgerufen wird. Der Grund davon liegt darin, daß durch die vorausgesetzte Verschiebung die Gesichtswinkel w sich ändern, nach denen unser Auge die scheinbare Größe der Objekte allein beurteilt.

Das auf der E.-E. entstehende objektseitige Abbild erscheint nun auf der M.-E. in n-fach verkleinertem Maßstabe und zwar, wie wir annehmen wollen, ohne Verzeichnung. Alsdann ist es klar, daß wir bei der Betrachtung des n-fach verkleinerten Abbildes auch einen n-fach verkleinerten Abstand $\mathfrak{A}$ für unser Auge wählen müssen, damit wie in Figur 91 die Gesichtswinkel w ungeändert bleiben:

$$A = \frac{\mathfrak{A}}{n} \quad .$$

Figur 91.
Das Abbild auf der Einstellungsebene im Pupillenabstande $\mathfrak{A}$ und die dazu in perspektivische Lage gebrachte Photographie im Abstande $\mathfrak{A} : n$.

Der Abstand $\mathfrak{A}$ zwischen E.-E. und E.-P. wird durch den vorderen Brennpunkt des Systems in zwei Teile geteilt, von denen die Strecke zwischen Brennpunkt und E.-P. entsprechend der p. 296 mit $\mathfrak{X}$ bezeichnet werden soll

$$\mathfrak{A} = nf + \mathfrak{X} \quad .$$

Führen wir nun das Konvergenzverhältnis Γ für die Blendenorte ein, das bei einem nicht verzeichnenden photographischen Objektiv und aberrationsfreien Pupillen für jeden Neigungswinkel w konstant sein muß, so ergibt sich bei Berücksichtigung der Vorzeichenänderung nach p. 45

$$\mathfrak{A} = nf + \Gamma f \quad ,$$

$$A = \left(1 + \frac{\Gamma}{n}\right) f \quad .$$

In diesem Ausdruck haben wir die allgemeine Beziehung, die bestehen muß zwischen dem Augenabstande, der Brennweite des Aufnahmeobjektivs, dem Tangentenverhältnis für die Pupillen und dem Reduktionsmaßstabe, in dem die E.-E. abgebildet wird.

Lassen wir hier naheliegende Spezialisierungen eintreten, so ergibt sich folgendes für:

Landschaftsaufnahmen mit beliebigen Objektiven.

$n = \infty$; $A_{n=\infty} = f$. Die Aufnahme ist aus dem Abstande der Äquivalentbrennweite zu betrachten.

Aufnahmen mit holo- oder hemisymmetrischen Objektiven.

$\Gamma = 1$; $A_{\Gamma=1} = \frac{n+1}{n} f = \mathfrak{A}'$. Die Aufnahme ist vom Orte der A.-P. aus zu betrachten; es ist dies eine meistens mit zu großer Verallgemeinerung ausgesprochene Regel. Sie gilt eben strenge nur, wenn das Tangentenverhältnis $= 1$ ist, und angenähert, wenn $\Gamma_{\text{appr.}} = 1$; hierher gehört die weitaus größte Zahl der photographischen Objektive.

Porträtaufnahmen mit Teleobjektiven.

Hier ist Γ eine positive ganze Zahl und von gleicher Größenordnung mit n, die Abweichung von den obigen Fällen also am größten.

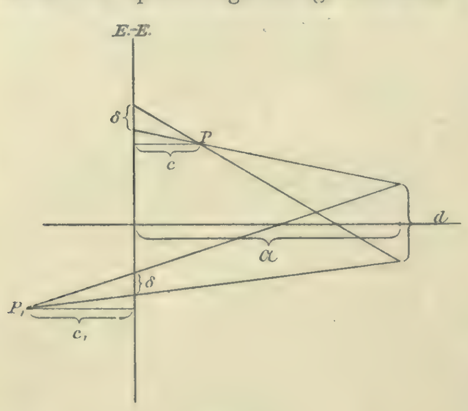
Es sei noch besonders darauf aufmerksam gemacht, daß diese Überlegungen die Notwendigkeit begründen, photographische Aufnahmen körperlicher, d. h. in

die Tiefe ausgedehnter Objekte aus dem richtigen Abstande und mit einem Auge zu betrachten.

Geschieht das nicht, so ist bei bekannten Objekten der Eindruck des Abbildes auf unser Auge von dem verschieden, den diese Objekte bei direkter Betrachtung hervorzurufen pflegen, und wir sprechen dann von einem unnatürlichen Eindruck, den die Aufnahmen machen.

Im einzelnen kann die Aufnahme aus zu großer Entfernung betrachtet werden, also unter einem zu kleinen Gesichtswinkel und dann erscheint die Tiefenausdehnung bekannter Objekte übertrieben. Oder sie wird aus zu geringer Entfernung, also unter einem zu großen Gesichtswinkel betrachtet, und dann erscheinen die Tiefenerstreckungen zu klein. (Näheres s. p. 275 und 276).

Die Aperturblende endlicher Öffnung und die Tiefenschärfe photographischer Objektive. In der Praxis kann der oben behandelte Fall wirklich eng abgeblendeter Objektive nicht vorkommen, es handelt sich vielmehr stets um endlich geöffnete Büschel. Alsdann bestimmt jeder Punkt des körperlichen Objekts mit der E.-P. nicht mehr einen Strahl, sondern einen Kegel, dessen Basis der lichte Teil der E.-P. ist. Der Einfachheit wegen wollen wir annehmen, daß es sich hier immer um vollständige Kreiskegel handelt, eine sekundäre Aperturbegrenzung also noch nicht eingetreten ist. Zu der Gesamtheit der Objektpunkte gehört alsdann eine zweifache Mannigfaltigkeit von Kreiskegeln, die ihre gemeinsame Basis in der E.-P. haben, während die Spitzen in den Objektpunkten liegen. Dieses Gebilde wird nun von der E.-E. geschnitten, und es entsteht auf ihr nunmehr ein Abbild, das aus Punkten und Zerstreuungskreisen zusammengesetzt ist, je nachdem die Objektpunkte innerhalb oder außerhalb der E.-E. liegen. Wie sich aus der Vorstellung unmittelbar ergibt, sind die Mittelpunkte der Zerstreuungskreise die Durchstoßungspunkte der Hauptstrahlen. Da wir nun unwillkürlich den Bildort eines durch einen Zerstreuungskreis repräsentierten Punktes in seinem Mittelpunkte lokalisieren, so folgt ohne weiteres, daß die Überlegungen über die Perspektive, wie sie aus der Betrachtung des eng abgeblendeten Objektivs hervorgingen, auch für das endlich geöffnete richtig bleiben.



Figur 92.
Zur Ableitung der Formeln über die Tiefenschärfe.

Für ein an den Ort der E.-P. gebrachtes Auge scheint das aus Punkten und Zerstreuungskreisen zusammengesetzte Abbild dann unscharfe Elemente zu enthalten, wenn der Durchmesser der Zerstreuungskreise vom Auge wahrgenommen werden kann, d. h. dann, wenn er unter einem Gesichtswinkel von einigen Minuten erscheint, wie er der Sehschärfe des Auges entspricht. Wir wollen diesen Winkel oder die ihm gleiche Tangente mit ζ bezeichnen, dann ist ohne weiteres verständlich, daß die Unschärfe des Abbildes so lange nicht bemerkt wird, als

$$\delta \leqq \zeta \mathfrak{A}$$

gilt.

Betrachten wir nun, um die Beziehungen auf der Objektseite zu finden, die Zerstreuungskreise auf der E.-E. für einen vor und einen hinter ihr gelegenen Punkt, so ergibt sich aus der Figur 92 für P

$$\delta = d \frac{c}{\mathfrak{A} - c}$$

und für P_1

$$\delta = d \frac{c_1}{\mathfrak{A} + c_1} \quad .$$

Bezeichnen wir nun mit der in der photographischen Literatur üblichen Umkehrung des Richtungssinnes (die Orientierung geschieht vom Objektiv aus) die Abstände $c = t_v$ als *Vordertiefe* und $c_1 = t_r$ als *rückwärtige Tiefe*, so erhalten wir dann einen vorgeschriebenen Durchmesser δ des Zerstreuungskreises in der E.-E., wenn

$$t_v = c = \frac{\mathfrak{A}\,\delta}{d + \delta} \quad ; \qquad t_r = c_1 = \frac{\mathfrak{A}\,\delta}{d - \delta}$$

gilt.

Nun ist nach unseren Überlegungen offenbar $\delta = n\,\varepsilon$ zu setzen, wenn wir mit ε, wie das in photographischen Schriften üblich ist, den Durchmesser des auf der M.-E. erscheinenden Zerstreuungskreises bezeichnen, und nach Einführung dieser Bezeichnung erhalten wir für die Gesamttiefe t die Begrenzung

$$t = t_v + t_r = \frac{2\,\mathfrak{A}\,n\,\varepsilon\,d}{d^2 - n^2\,\varepsilon^2} \quad .$$

Diese Formeln stimmen natürlich, abgesehen von der hier nach den photographischen Schriften gewählten Bezeichnung genau mit den auf p. 255/56 aufgeführten überein.

Man sieht aus dieser Form unmittelbar, daß die Tiefe allein abhängig ist von Bestimmungsstücken auf der Objektseite $\mathfrak{A}$, δ, d, und daß das Objektiv für die Tiefe nur insoweit eine Rolle spielt, als es die E.-P. (d) und ihren Abstand $\mathfrak{A}$ von der E.-E. bestimmt. Irgend ein Einfluß auf die Tiefe wird von dem Öffnungsverhältnis d/f des abbildenden Objektivs nicht ausgeübt. Da diese Größe, die *relative Öffnung*, für die Zeitdauer der Exposition bestimmend ist, so kann sie, wenn die Wahl der Brennweite frei ist, in weiten Grenzen beliebig festgesetzt werden, weil die Forderung bestimmter Tiefe nur einen Einfluß auf den Zähler d ausübt. Allgemein kann man den Satz aussprechen: Bei gegebenem Abstande und gegebener Unschärfe hängt die Tiefe nur vom Durchmesser der E.-P., nicht von der relativen Öffnung ab. Daher läßt sich bei genügender Verkleinerung der Brennweite ein beliebig wenig unter der Maximalapertur des vorliegenden Objektivtypus gelegenes Öffnungsverhältnis noch erreichen. Durch eine solche Verkleinerung der Brennweite nimmt die Reduktionszahl n zu auf n_1, so daß jetzt die bildseitige Unschärfe durch $\frac{n\,\varepsilon}{n_1} < \varepsilon$ gegeben ist. Eine nachträgliche Vergrößerung auf den Maßstab $\frac{n_1}{n}$ macht dann die Aufnahme einer solchen kongruent, die mit einem Objektiv längerer Brennweite aufgenommen ist, während der Vorteil der kürzeren Expositionsdauer erhalten bleibt. Man vergleiche die auf p. 256 gegebenen graphischen Darstellungen der Tiefenverhältnisse.

Alle diese Überlegungen galten unter der Voraussetzung, daß die Zerstreuungskreise der Sehschärfe des betrachtenden Auges entsprechend bestimmt waren. Wird ein Objekt von einer danach zulässigen Tiefenausdehnung aufgenommen, so erscheint die vom richtigen Augenorte aus betrachtete Aufnahme überall gleichmäßig scharf.

Nun liegen die Verhältnisse in der Regel so, daß die abzubildenden Objekte eine größere Tiefenausdehnung haben. Alsdann überschreitet der Durchmesser der entstehenden Zerstreuungskreise den Schwellenwert des Auges, und nunmehr erscheinen die vor und hinter der oben betrachteten Schärfenschicht gelegenen

Oberflächenteile des körperlichen Objekts unscharf und zwar in um so höherem Grade, je weiter sie von den Grenzebenen jener Schicht entfernt sind.

Dieser Umstand wirkt namentlich bei Porträtaufnahmen größeren Formats ungünstig, da diese aus einem verhältnismäßig geringen Abstande $\mathfrak{A}$ gemacht zu werden pflegen, so daß die Schärfenschicht eine nur geringe Erstreckung t hat. Eine solche mit einem guten Objektiv gemachte Aufnahme wirkt unharmonisch, weil alle von der Schärfenschicht gleich weit abstehenden Punkte eine gleichmäßige Unschärfe zeigen, ohne Unterschied, ob sie für die Darstellung wichtig sind oder nicht. In der Schärfenschicht aber ist wiederum Wichtiges und Unwichtiges mit gleicher Genauigkeit wiedergegeben. Diese Ausstellungen, die durch die Abbildung eines körperlichen Objekts mittels weit geöffneter Büschel auf einer bevorzugten Ebene zu erklären sind, waren besonders in der Zeit der 60er Jahre Gegenstand mannigfacher Abänderungsvorschläge, die fast sämtlich darauf hinausliefen, die Schärfe der mittleren Schicht aufzuheben, um so ein mehr harmonisches Resultat zu erhalten. Es seien die Vorschläge, durch seitliche Bewegung des Objektivs, sowie durch Luftschlieren, wie sie zwischen Objekt und Objektiv angebrachte Kerzenflammen hervorrufen, dieses Ziel zu erreichen, nur eben erwähnt. Von optischem Interesse sind die Versuche, zu dem gewünschten Ende zu kommen durch Einführung sphärischer Aberration in das abbildende System, womit sich zunächst wohl französische Optiker, dann J. Petzval selbst und schließlich, wohl am erfolgreichsten in dieser Hinsicht, J. H. Dallmeyer beschäftigt haben. Eine davon verschiedene Methode, die dem Objektiv während der Aufnahme sukzessive Einstellungen auf alle hinter einander liegende Ebenen des Objekts erteilte, arbeitete S. Zincke, gen. Sommer, für A. F. J. Claudet aus.

Die Schärfenfläche astigmatisch korrigierter Objektive mit konkavem Felde. Die im Anfang unserer Überlegung gemachte Annahme eines sphärisch korrigierten Objektivs mit ebenem Gesichtsfelde ist erst in neuerer Zeit erfüllt worden. Wir müssen um so mehr auf die älteren Objektive eingehen, denen diese Eigenschaft mangelte, weil ein bestimmter Typus unter ihnen noch heute ganz ungemein weit verbreitet ist. Diese älteren Objektive zeigten ausnahmslos, wenn sie auf Astigmatismus korrigiert waren, eine Krümmung des Feldes, das seine hohle Seite dem Objektiv zukehrte. Auf diese Schärfenfläche müssen nun alle Objektpunkte durch Kegel projiziert werden, die ihre gemeinsame Basis in der E.-P. haben. Dieses gekrümmte Abbild wird auf der Mattscheibe so wiedergegeben, daß es mit der Augenpupille in richtiger Entfernung genau dieselben Gesichtswinkel w ergibt, als die Objekte selbst mit der Mitte der E.-P. Was die Perspektive angeht, so wird also durch die Schärfenfläche nichts geändert.

Unsere Überlegungen des vorigen Absatzes über die Tiefenschärfe gelten aber nur für die Nähe der Achse, da dort die Schärfenfläche mit der sie im Scheitel berührenden achsensenkrechten Ebene zusammenfällt. Über die Ausdehnung der Schärfe in die Tiefe für endliche Gesichtswinkel w lassen sich unter diesen Umständen keine allgemein gültigen Aussagen mehr machen.

Es sei hier aber darauf hingewiesen, daß eine derartige Gestaltung der Schärfenfläche nicht unter allen Umständen ein Nachteil zu sein braucht. Bei Objekten mit konkaver Oberfläche, wie sie bei Innenaufnahmen von Kirchen, Höfen u. ä. auftreten, lassen sich unter sonst gleichen Umständen mit den eben besprochenen Objektiven Aufnahmen bei viel größerer relativer Öffnung machen, als es mit Systemen möglich wäre, die ein ebenes Bildfeld besitzen.

3. Die Ansprüche an die quantitativen Eigenschaften der Objektive.

Die Lichtstärke. Die relative Lichtstärke für Achsenpunkte, die zu bemessen wäre — da als Medium ausschließlich die Luft in Frage kommt — nach

dem Quadrat des Sinus des halben Öffnungswinkels wird beim photographischen Objektiv nach p. 243 u. 247 bestimmt durch das Quadrat des Verhältnisses der Eintrittspupille zur Brennweite $\left(\frac{1}{\varkappa}\right)^2 = \left(\frac{d}{f}\right)^2$ und zwar wird der Nenner $\varkappa$ als charakteristische Zahl für die *relative Lichtstärke* angegeben.

Wenn wir von ganz vereinzelten, vorgeblichen und wirklichen, Ausnahmen absehen, so ist das größte Öffnungsverhältnis, das in der photographischen Praxis bei schnellsten Expositionen verwandt wird 1 : 2, und auch diese Zahl läßt sich wohl nur bei kleinen Objektiven für kinematographische Aufnahmen erreichen. Die lichtstarken Porträtobjektive folgen mit Öffnungsverhältnissen von 1 : 3 bis 1 : 5, je nach der Größe, denen sich dann namentlich in neuester Zeit die lichtstarken Universalobjektive von 1 : 4,5 an anschließen, die bis zu einem Öffnungsverhältnis von etwa 1 : 9 heruntergehen. Etwa übereinstimmende Zahlen (1 : 9 bis 1 : 18) finden sich bei Reproduktions- und bei Weitwinkelobjektiven, und zum Schluß wären noch die Einzellinsen für Landschaftsaufnahmen zu erwähnen, die etwa 1 : 11 bis 1 : 14 aufweisen. Selbstverständlich macht diese Klassifikation keinen Anspruch auf absolute Gültigkeit.

Zu trennen von der relativen ist die *absolute Lichtstärke*. Legt man nach dem dritten Abbeschen Satze zur Ermittelung der Lichtwirkung auf den Bildpunkt der A.-P. des Instruments eine gewisse spezifische Intensität bei, so ist diese aus der des zugehörigen Objektpunktes abzuleiten, indem man die Verluste durch Reflexion und Absorption in Rechnung zieht. Bei Systemen gleicher Korrektion und gleicher relativer Öffnung wird also das die größte Lichtstärke haben, das die geringsten Verluste durch Reflexion und Absorption aufweist.

Die *Absorptionsverluste* variieren bei Objektiven desselben Typus mit dem Ausführungsmaßstabe. Bestimmte Angaben lassen sich für sie nicht machen, weil für die Mehrzahl der optisch benutzten Gläser die Absorptionskonstanten nicht bekannt sind[1].

Die *Reflexionsverluste* lassen sich einfach berechnen, indem man nur parachsiale Strahlen in Betracht zieht, wo die Formeln besonders einfach werden. Es läßt sich zeigen, daß die so erhaltenen Werte auch für große endliche Neigungen gültig bleiben. Kittflächen brauchen bei dieser Berechnung nicht berücksichtigt zu werden. Die Verluste betragen bei einer Einzellinse vom Brechungsexponenten 1,5 etwa 8 %, bei einem aus Material von demselben Brechungsexponenten bestehenden Doublet etwa 15 %, bei einem derartigen Triplet etwa 22 % und bei einem aus vier einzelstehenden Linsen gebildeten Objektiv etwa 28 %. Diese Zahlen erhöhen sich noch etwas, wenn Gläser von höherem Brechungsexponenten in den Konstruktionen auftreten.

Dieser Lichtverlust ist aber nicht der einzige auf die Reflexion zurückzuführende Nachteil. Ein Teil des so in die Richtung des Objekts zurückgeworfenen Lichtes erleidet eine zweite Reflexion und erhält dann wieder die Richtung auf die Platte zu. Hier schwächt das zweimal reflektierte Licht die durch das Hauptsystem erhaltenen Kontraste in jedem Falle, auch wenn es die Platte möglichst gleichmäßig überlagert. Man gelangt zu der klarsten Auffassung, wenn man die komplizierten katadioptrischen Systeme betrachtet, die eine gerade Anzahl von Reflexionen enthalten. Beschränken wir uns auf die Mindestzahl von zwei Reflexionen, so gibt es bei einem photographischen Objektiv mit 2ν reflektierenden Flächen $\frac{2\nu(2\nu-1)}{1\cdot 2}$ solcher von den katadioptrischen Systemen entworfenen Nebenbilder.

---

[1] In der Zwischenzeit ist eine Arbeit erschienen, die in erfreulicher Weise diesem Mangel abhilft. H. A. Krüss, Die Durchlässigkeit einer Anzahl Jenaer optischer Gläser für ultraviolette Strahlen. Ztschr. f. Instrumentenk. **23.** 197—207; 229—239. 1903.

Liegen diese ungünstig, d. h. wird das zu ihnen gehörige Licht an einem eng begrenzten Teile der Platte konzentriert, so wird die von dem dioptrischen Hauptsystem entworfene Aufnahme durch *Lichtflecke* gestört. Die Aufgabe des Optikers kann also nur darin liegen, diese unvermeidlichen Nebenbilder soweit von der Platte entfernt entstehen zu lassen, daß ihre Zerstreuungsscheiben die Platte möglichst gleichmäßig bedecken. Da das bei geringerer Zahl der reflektierenden Flächen, wobei sich die Anzahl der Nebenbilder sehr stark vermindert, natürlich leichter gelingt, so haben derartige Objektive einen gewissen Vorzug vor solchen mit einer größeren Anzahl reflektierender Flächen.

Das Gesichtsfeld. Betrachten wir zunächst das photographische Objektiv mit *enger* Blende, so ist sein Gesichtsfeld eindeutig durch den Winkel definiert, den das durch die vorangehenden Systemteile von der Gesichtsfeldblende entworfene Bild, die Eintrittsluke, als Basis mit der Mitte der E.-P. als Spitze des geraden Kegels bestimmt.

Innerhalb dieses Winkels interessiert uns noch die Lichtverteilung und diese ist bei nicht verzeichnenden Objektiven für die Hauptstrahlneigung w durch die Formel gegeben

$$I_w = \varkappa I_0 \cos^4 w \quad ,$$

dabei bezeichnet I_0 die durch das System für ein senkrechtes Achsenelement gleicher Entfernung vermittelte Beleuchtungsstärke, $\varkappa$ den nach den Reflexions- und Absorptionsverlusten übrig bleibenden Bruchteil der spezifischen Intensität, der, wie wir oben hervorhoben, als konstant für die verschiedenen Neigungen angenommen werden kann.

Aus der Form dieses Gesetzes folgt auch bei kleinen Objektivöffnungen eine Abnahme der Beleuchtungsstärke nach dem Bildrande, die tatsächlich bei größeren Winkeln w recht beträchtlich ist. Um sie zu heben, schlug E. Abbe vor, die E.-P. in das Unendliche zu verlegen, so daß alle Winkel w verschwinden. Der Verwirklichung dieser Idee stellt sich der Umstand entgegen, daß das Gesichtsfeld des Objektivs dann sehr klein ausfallen müßte, wollte man die Linsendimensionen nicht sehr erheblich steigern.

Andere Ausgleichsmethoden führen die Verstärkung der Wirkung der stärker geneigten Strahlen dadurch ein, daß sie sie längere Zeit wirken lassen, als die Mittelstrahlen. Solche Vorschläge sind von Th. Grubb und auch von F. Stolze gemacht worden. Demgegenüber stehen die Vorschläge, die die Gleichmäßigkeit der Wirkung damit erreichen, daß sie die Mittelstrahlen stärker schwächen, als die seitlichen, und dies geschieht entweder durch partielle Abblendung mittels einer oder mehrerer außerhalb der Diaphragmenebene stehender Blendscheiben (Th. Sutton, R. H. Bow, de la Noë) oder durch Anwendung zur Achse zentrischer Sammellinsen aus absorbierendem Material. Diese werden nämlich mit den längsten Strecken von den nahezu achsenparallel auffallenden Strahlen durchsetzt, während für die mehr geneigten Strahlen auf kürzeren Glaswegen auch nur eine geringere Absorption eintritt. Zu solchen Absorptionslinsen will R. H. Bow die Sammellinsen des Objektivs selbst verwandt wissen, während sie A. Miethe in einem besonderen Kompensator anordnet.

Verwendet man das Objektiv mit *endlicher* Öffnung der Aperturblende, so gilt der oben angeführte Satz über die Lichtverteilung bei enger Blende mit großer Annäherung nur für das Gebiet, in dem die Gesichtsfeldblende nicht aperturbeschränkend wirkt. Dies wird caet. par. um so kleiner, je weiter die Aperturblende geöffnet ist. Die Aufgabe, mit bestimmten Linsendurchmessern ein möglichst großes abblendungsfreies Gesichtsfeld zu erreichen, läßt sich dadurch lösen, daß man den Abstand zwischen dem von den vorausgehenden Systemteilen entworfenen Bilde der Gesichtsfeldblende und der E.-P. möglichst klein wählt. Im allgemeinen kommt das darauf hinaus, daß man die die Aperturblende einschließenden Linsenkombinationen möglichst nahe an diese heranrückt.

4. Die Ansprüche an die qualitativen Eigenschaften der Objektive.

Die Schärfe in und nahe der Achse bei großer Öffnung. Die Ansprüche, die in dieser Hinsicht an die photographischen Objektive gestellt werden, sind je nach der Verwendung ganz außerordentlich verschieden. Wir haben schon oben gesehen, daß bei der Porträtphotographie als solcher unter Umständen auf präzise Schärfe im Interesse einer mehr harmonischen Wirkung Verzicht geleistet werden kann, da es sich dort immer um körperliche, in die Tiefe ausgedehnte Objekte handelt.

Auch bei den gewöhnlichen Landschafts- und Gruppenaufnahmen wird eine ähnliche Überlegung statthaben, derzufolge es nicht auf die äußerste Schärfe ankommt. Zudem werden diese Objektive meistens in kleinen und mittleren Brennweiten ausgeführt, und die mit ihnen hergestellten Bilder werden mit bloßem Auge betrachtet. Es ist daher unter diesen Umständen dem Optiker erlaubt gewesen, einmal, wie das J. PETZVAL und J. H. DALLMEYER taten, unter Umständen auf sphärische Korrektion zu verzichten, oder, was fast für alle je vorgeschlagenen Objektivtypen gilt, einen größeren Zonenbetrag zuzulassen.

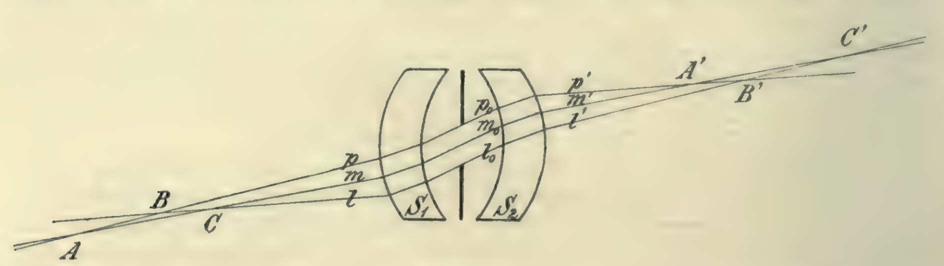
Die Sachlage ändert sich aber sofort, sobald diese Voraussetzungen nicht mehr gültig bleiben und Objektive mit längeren Brennweiten oder Systeme zu stärkeren Vergrößerungen ebener Objekte in Frage kommen. Bei Objektiven mit längerer Brennweite überschreitet der durch den Zonenbetrag veranlaßte Fehler in der Schärfe den Schwellenwert leicht, und die Folge davon ist, daß der Optiker denselben Typus in längeren Brennweiten mit geringerem Öffnungsverhältnis ausführen muß. Diese Beobachtung kann man fast an allen Reihen der bis jetzt bekannten Objektive machen, wenn sie innerhalb eines Konstruktionstypus von ganz kurzen zu ziemlich langen Brennweiten fortschreiten. Ganz besonders gehören die Reproduktionsobjektive hierher, die an sich schon in längeren Brennweiten ausgeführt werden und bei denen die Objekte, soweit es sich um Strichreproduktionen handelt, die Schärfe der Abbildung sehr sicher beurteilen lassen. Sehr erhebliche Anforderungen werden auch durch die multiple stops an die Objektive gestellt, und nur Objektive mit geringen Zonen lassen sich mit diesen Blenden vorteilhaft verwenden.

Will man etwa Vergrößerungen im Maßstabe von 20:1 bis 100:1 mit photographischen Objektiven kleiner Brennweite herstellen, so hat man bei ihnen auch die Anforderungen zu erfüllen, die man an schwache Mikroskopobjektive stellt. Auch hier hat man eine Verringerung der Zonenfehler anzustreben und dabei noch an einer großen Apertur festzuhalten, damit die erzielten Vergrößerungen nicht leere sind.

Die Schärfe photographischer Objektive außerhalb der Achse. Damit photographische Objektive Objekte in unmittelbarer Nähe der Achse mit großer Öffnung scharf abbilden, muß die Erfüllung der Sinusbedingung für diese Öffnung neben der Herstellung sphärischer Korrektion erreicht sein. Ihrer Herleitung entsprechend hat die Sinusbedingung diese Bedeutung nur für die Nachbarschaft der Achse, bei endlichen Hauptstrahlneigungen müssen besondere Untersuchungen durch Verfolgung windschiefer Strahlen angestellt werden, um eine Entscheidung über die Strahlenvereinigung abgeben zu können. Man faßt die hier möglichen Fehler unter der Bezeichnung der *Koma* zusammen, und wir können gleich hier bemerken, daß eingehendere Untersuchungen über diesen Bildfehler für die photographischen Objektive nicht veröffentlicht worden sind.

In einem sehr speziellen Falle ist man zu einer befriedigenden Lösung der Aufgabe, die Koma der tangentialen Büschel zu heben, gekommen und zwar bei holosymmetrischen Objektiven, die die Objektebene mit der Vergrößerung $\beta = 1$ abbilden.

Man kann schon aus Gleichung (8), p. 148 ersehen, daß die Koma bei holosymmetrischer Anordnung der Linsen und des Strahlenverlaufs in ihnen aufgehoben sein muß. Direkter kann man dies folgendermaßen erkennen (Figur 93) S_1, S_2 seien die beiden Bestandteile des Systems; symmetrisch zwischen ihnen befinde sich die Aperturblende. Denken wir uns nun zunächst ein Strahlenbündel, das in dem Raume zwischen den Linsen parallel und aberrationsfrei ist, nach beiden Seiten hin verfolgt, so wird es nach der Brechung durch jedes der Partialsysteme S_1, S_2 eine gleiche, aber symmetrisch gelegene Brennkurve $(A\,B\,C)$ $(A'\,B'\,C')$ — die Koma der Partialsysteme — bilden. Denke ich mir nun, um zu dem Falle eines monozentrisch einfallenden Büschels überzugehen, in dem, als unendlich eng anzusehenden, Partialbüschel $(m\,p)$ den Objektpunkt A auf dem Strahle p bis B verschoben, so verschiebt sich der ihm in bezug auf das ganze



Figur 93.
Zur Aufhebung der Koma in holosymmetrischen, bei symmetrischem Strahlengange benutzten Systemen.

System $(S_1 + S_2)$ konjugierte Bildpunkt A' auf p' im gleichen Sinne um die gleiche Strecke, also bis B'. Denn da in A und A' Gleichheit von Objekt und Bild $(\beta = 1)$ vorhanden ist, so ist auch die axiale Vergrößerung $\alpha = 1$. Ebenso entspricht in dem Partialbüschel $(l\,m)$ der Verschiebung des Punktes C auf dem Strahle l bis B die Verschiebung von C' auf l' bis B'. Folglich muß, wenigstens bei der Vergrößerung $\beta = 1$, einem monozentrischen objektseitigen Büschel im Meridianschnitte ein ebensolches im Bildraume entsprechen.

In der Praxis hat es sich nun herausgestellt, daß diese für enge meridionale Büschel geltende Ableitung auch für endlich geöffnete Büschel Bedeutung behält. Ebenso wichtig ist es ferner, daß die Freiheit von Koma, die zunächst nur bei holosymmetrischen Systemen für Reproduktionen in gleicher Größe erwiesen war, für die Anforderungen der Praxis meist genügend gewahrt bleibt, wenn man zu anderen Vergrößerungen übergeht oder wenn man hemisymmetrische (ein Ähnlichkeitszentrum enthaltende) Systeme anwendet, bei denen das Maßverhältnis der beiden Komponenten keinen allzusehr von der Einheit abweichenden Wert aufweist.

Bei allen unsymmetrischen Systemen, die der Zahl nach wohl ebenso verbreitet sind, wie die symmetrischen, ist die Koma nicht auf Grund allgemeiner Gesetze, sondern durch zweckmäßige Verfügung über die Konstruktionselemente gehoben.

Bevor wir zu dem nächsten Abschnitte übergehen, müssen wir wenigstens mit einigen Worten den Einfluß streifen, den die Änderung des Objektabstandes auf die sphärische Korrektion hat. Da bei den photographischen Konstruktionen die Sinusbedingung unbedingt erfüllt sein muß, so folgt schon daraus, daß die Herschelsche Bedingung, nach der der Korrektionszustand eines Achsenpunktes unabhängig sein soll von der Objektentfernung, nur in ganz speziellen Fällen erfüllt sein kann. Der wichtigste von diesen ist der eines sphärisch und auf die Sinusbedingung korrigierten Objektivs, das für die Vergrößerung $= \pm 1$ benutzt

wird, wie das L. SEIDEL[1] gezeigt hat. In der überwiegenden Mehrzahl der Fälle kann also die HERSCHELsche Bedingung nicht erfüllt sein. Es kommt dem photographischen Objektiv aber dabei zustatten, daß es in der Regel mit einer absolut genommenen kleinen Apertur (unter 0,15) verwandt wird, und aus diesem Grunde ziemlich unempfindlich gegen Verschiebungen des Objektpunktes ist. Bei den lichtstärksten photographischen Objektiven kann dieser Einfluß auf den Zustand der sphärischen Aberration auffallen, und er ist tatsächlich in der photographischen Literatur behandelt worden, bei mittleren und kleinen relativen Öffnungen entzieht er sich ganz der Wahrnehmung.

Die Schärfe bei großem Gesichtsfelde (die Behandlung des Astigmatismus). Handelt es sich um Objektive, die mit großem Bildwinkel benutzt werden sollen, so ist es schon wegen der sekundären Aperturbeschränkung durch die Gesichtsfeldblende geboten, das System beträchtlich abzublenden. Bei solchen Systemen mittlerer und kleiner Öffnung können sich hauptsächlich die Fehler des Astigmatismus und der Bildwölbung bemerkbar machen.

In den früheren Perioden der photographischen Objektive, als man die alten Glasarten in der Regel in verkitteten Systemen verwandte, vermochte man in sphärisch korrigierten Systemen nicht Astigmatismus und Bildwölbung gleichzeitig zu heben. Man half sich dann in der Regel so, daß man bei weitgeöffneten Systemen, die nur ein relativ kleines Bildfeld besaßen, den Astigmatismus vollständig beseitigte, denn die Bildwölbung vermochte bei der geringen Ausdehnung des Bildfeldes nicht zu störend zu werden. Als Beispiel mögen die beiden Porträtobjektive von J. PETZVAL und J. H. DALLMEYER und der Porträtantiplanet von A. STEINHEIL dienen. Bei sphärisch korrigierten Systemen mit großem Gesichtsfelde führte man in der Regel Bildfeldebenung in übertragenem Sinne ein, d. h. man ließ die Bildfläche der equatorealen Büschel etwa ebensoweit nach der einen Seite von der GAUSSschen Brennebene abstehen, wie die Bildfläche der meridionalen nach der anderen. Als Beispiel können hier die STEINHEILschen Aplanatkonstruktionen dienen.

In dem einen Falle, wo man mit den alten Glasarten ein verkittetes System mit anastigmatischer Bildfeldebenung versehen konnte (gemeint ist das Weitwinkelobjektiv von E. BUSCH: das *Pantoskop*), war von sphärischer Korrektion keine Rede.

In der neueren Periode der photographischen Optik ist man imstande, unbeschadet der sphärischen Korrektion, anastigmatische Bildfeldebenung herbeizuführen. Zunächst war dabei die Anwesenheit von hochbrechendem Crown, das erst seit der Eröffnung des Jenaer Glaswerks von SCHOTT & Gen. 1886 zur Verfügung stand, stets zu bemerken, später sind auch Objektive berechnet worden, die aus schwach brechendem Crown und hoch brechendem Flint hergestellt sind und doch eine Hebung aller Schärfenfehler aufweisen. Bei unserer Übersicht über die Objektivtypen werden wir noch darauf zu sprechen kommen.

Die Winkeltreue der photographischen Aufnahmen. Hatten wir bisher nur die Schärfenfehler behandelt, so müssen wir jetzt auf den Fehler zu sprechen kommen, der die Ähnlichkeit zwischen Objekt und Bild schädigt, die Verzeichnung oder Anorthoskopie der photographischen Systeme.

Besitzt das System aberrationsfreie Pupillen, so ist die Konstanz des Tangentenverhältnisses der Hauptstrahlneigungen

$$\frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = \Gamma$$

für endliche w, w' die notwendige und hinreichende Bedingung für die Verzeichnungsfreiheit je zweier konjugierter Ebenen. Liegen beide (wie bei einem teleskopischen System) im Unendlichen, so gilt sie auch, wenn die Pupillen nicht

[1] L. SEIDEL, A. N. **43.** 328. 1856. Vgl. das IV. Kapitel (p. 150—152).

aberrationsfrei sind, und sie ist für diesen Fall zuerst von G. B. Airy 1827 ausgesprochen worden, nach dem sie auch Airysche Tangentenbedingung genannt wird (s. p. 219).

Handelt es sich um Systeme, wie die holo- und hemisymmetrischen photographischen Objektive, die die Tangentenbedingung strenge erfüllen, aber aberrationsbehaftete Pupillen aufweisen und eine im Endlichen gelegene Bildebene haben, so bemerkte R. H. Bow zuerst, daß die Verzeichnungsfreiheit in aller Strenge nur für ein Ebenenpaar besteht, und zwar für das Ebenenpaar, wo die Reduktionszahl gleich ist dem Maßverhältnis der Komponenten des Objektivs. Etwas später wies Th. Sutton nach, daß bei aberrationsfreien Pupillen die Erfüllung der Airyschen Bedingung wieder die Verzeichnungsfreiheit in beliebigen Ebenen gewährleistet, eine Formulierung der Anforderungen, die als Bow-Suttonsche Bedingung bezeichnet wird (p. 221).

Es sei gleich bemerkt, daß bei symmetrischen Systemen für sehr viele Fälle der praktischen Anwendung die von selbst erfüllte Konstanz des Tangentenverhältnisses genügt. Man spricht dann von einer für praktische Zwecke genügenden Aufhebung der Verzeichnung. Bei empfindlichen Proben läßt sich aber auch da die Verzeichnung durch die Krümmung gerader Linien nachweisen, die nicht durch die Achse des Systems gehen.

Wirklich in strengem Sinne verzeichnungsfrei sind von den in Benutzung genommenen Systemen nur die konzentrischen Objektive, die aber für die Praxis ein zu stark gekrümmtes Bildfeld besitzen, dessen Radius gleich der Brennweite ist.

Die chromatische Korrektion photographischer Objektive. Da die Hauptwirkung des photographischen Objektivs auf der photographischen Platte erfolgt, so wäre es analog dem Verfahren bei den für subjektiven Gebrauch bestimmten Instrumenten das richtigste, das Minimum der Kurve des sekundären Spektrums auf die Wellenlänge zu legen, für die die photographische Platte am empfindlichsten ist. Eine solche *rein aktinische* Farbenkorrektion wird nun auch tatsächlich bei den Instrumenten für Himmelsphotographie angewandt, weil hier die ein für allemal empirisch genau ermittelte Einstellungsdifferenz ungeändert bleibt.

Bei den gewöhnlichen photographischen Objektiven, die für ganz verschiedene Objektentfernungen benutzt werden, läßt sich ein solches Verfahren nicht einschlagen, da bei verschiedenen Objektentfernungen die Differenzen gegen die subjektive Einstellung ganz verschiedene Beträge annehmen. Man würde also stets zu unrichtigen Einstellungen geführt werden. Aus diesem Grunde muß man auf die für die photographische Aufnahme günstigste Behandlung des sekundären Spektrums verzichten und richtet es nunmehr so ein, daß die Wellenlängen zusammenfallen, denen die Empfindlichkeitsmaxima des Auges und der Platte entsprechen. Dies geschieht dann, wenn man für die Wellenlängen von D und G' achromatisiert. Man nennt diese Methode der Achromatisierung die (*uneigentlich*) *aktinische* oder *photographische*. Bei Objektiven, die nicht eine Übereinstimmung der optischen und aktinischen Einstellung zeigen, spricht man mit einem aus der ältesten photographischen Zeit stammenden Ausdruck von *chemischem Fokus*. Damit bei keinem Objektabstande sich eine Einstelldifferenz zeige, dürfen nicht die Brennpunkte allein korrigiert sein, sondern die Äquivalentbrennweiten müssen ebenfalls übereinstimmen. Solche Systeme nennt man *stabil achromatisch*. Bei ihnen ist dann auch die Vergrößerung für beide Farben gleich, d. h. sie zeigen keine Vergrößerungsdifferenz.

Eine Aufhebung des sekundären Spektrums ist für den gewöhnlichen Gebrauch bei der Kleinheit der Brennweiten ohne große Bedeutung. Dieses Urteil verliert seine Gültigkeit bei den zu Aufnahmen für den Dreifarbendruck bestimmten Objektiven. Hier handelt es sich um die drei in rot, gelb und blau

zu machenden Aufnahmen, die genau gleich groß ausfallen müssen. Sollen nun für diese drei Farben die dem Objekt konjugierten Bilder genau übereinstimmen, ohne daß man für jede Farbe neu einstellt, so muß man für diese drei Farben Gleichheit der Schnitt- und Brennweiten erzielen. Wünschenswert ist es auch, für diese drei Farben gleichzeitig sphärische Korrektion herbeizuführen. In jüngster Zeit sind mehrere Veröffentlichungen auf diesem Gebiete zu verzeichnen.

II. Übersicht über die Entwickelung der photographischen Objektive.

Die nachfolgenden Angaben sind bis zum Jahre 1899 der Monographie des Verfassers[1] entnommen, die die Entwickelung der verschiedenen Konstruktionsgedanken im einzelnen erkennen läßt und die dabei benutzte Literatur vollständig angibt.

Auf die dort in graphischen Darstellungen mitgeteilten Ergebnisse der Durchrechnung von 48 Objektiven stützen sich ferner die im vorhergehenden und im nachfolgenden gemachten Aussagen über den Korrektionszustand der Objektive für gerade und schiefe Büschel.

Schon bei der Behandlung des Astigmatismus hatten wir darauf hingewiesen, daß das Ziel aller Arbeiten auf dem Gebiete der photographischen Objektive, die Herstellung eines Systems, das eine achsensenkrechte Ebene scharf und unverzerrt in eine andere abbilde, tatsächlich erst erreicht wurde, als man in den neuen Glasarten des Jenaer Werkes eine größere Auswahl des Materials zur Verfügung hatte. An und für sich lassen sich aber Objektive der beschriebenen Eigenschaften auch mit den alten Glasarten herstellen. Es entspricht nun nur den tatsächlichen Verhältnissen, wenn wir die Herbeiführung anastigmatischer Bildebenung in sphärisch korrigierten Systemen dazu benutzen, um die ältere von der neueren photographischen Optik zu scheiden. Wir erhalten auf diese Weise eine Zerlegung der ganzen Entwickelung in zwei Perioden, von denen die erste von den dreißiger Jahren des XIX. Jahrhunderts bis zur Mitte der achtziger reicht, während die zweite Periode dort ihren Anfang nimmt[2].

Jeder dieser beiden Hauptabschnitte zerfällt in Unterabteilungen und jeder wird angekündigt durch gewisse Vorarbeiten, die in der Folgezeit vollständig ausgebildet werden.

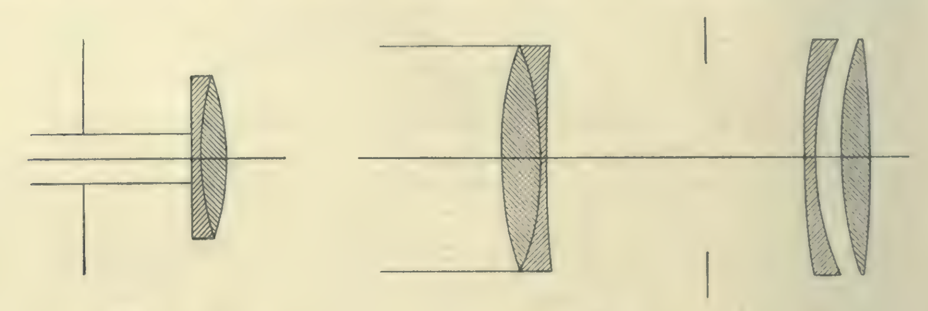
---

[1] M. von Rohr, Theorie und Geschichte des photographischen Objektivs XX, 436 S. 8° mit 148 Figuren und 4 Tafeln. Berlin, J. Springer, 1899. Preis 12 Mk. — [2] Es sei gleich an dieser Stelle bemerkt, daß die Entwickelung der photographischen Objektive eine verschiedenartige Behandlung erfahren hat: Dem ersten, von den älteren Typen handelnden Teile, bei dem man zu einem einigermaßen abschließenden Urteil gekommen ist, sind Illustrationen zur besseren Charakterisierung der Objektivtypen beigegeben worden. Von dem zweiten Teile gilt das aber nicht; denn man hat hier von einer Beigabe schematischer Zeichnungen aus zwei Gründen abgesehen: Einmal ist die Menge der neu erschienenen Objektivtypen so groß, daß bei gleichmäßiger Berücksichtigung aller in der hier geplanten kurzen Übersicht die Illustrationen ein ungehöriges Übergewicht erhalten würden; und dabei fehlen mehrfach die Angaben für eine gleichmäßige graphische Darstellung. Wählte man aber einzelne Typen zur Darstellung aus, so würde das für die eigenen Erzeugnisse außerordentlich feine Gefühl unserer heimischen Optiker tief verletzt werden, wofern nicht einzig und allein ihren eigenen Konstruktionen die Krone zuerkannt würde. Was nun die hier im zweiten Teile gegebene Aufzählung neuer Konstruktionen betrifft, für deren absolute Vollständigkeit nicht gebürgt werden kann, so sind in der Regel nur die Objektivtypen erwähnt worden, die in Katalogen und Flugblättern der verschiedenen Firmen regelmäßig angeboten werden. Nur patentierte, aber nicht oder nicht mehr ausgeführte Typen wurden zur Erleichterung der Übersicht fortgelassen.

1. Die älteren photographischen Objektive (1839–1885).

Die photographische Optik entwickelt sich auf dem Grunde, der durch die Ausbildung des Objektivs der camera obscura bereitet war. An jener rohen Form der Bikonvex- oder Plankonvexlinse ohne bestimmten Blendenort, wie sie durch Jahrhunderte bestanden hatte, nahm W. H. WOLLASTON 1812 die Änderungen vor, die zuerst das Instrument für die daran gestellten Anforderungen spezialisierten. Er gab der noch chromatischen Einzellinse die Form eines Meniskus mit der hohlen Fläche nach außen und schrieb eine bestimmte Blendenstellung vor. Mit diesen Änderungen verzichtete er darauf, die möglichst geringe sphärische Aberration in der Achse zu erhalten zugunsten geringerer Abweichungen in den seitlichen Teilen des Feldes.

Diese sehr bedeutsame Neuerung verbreitete sich rasch und bildete namentlich in Frankreich die Grundlage, auf der V. und CH. CHEVALIER ihre Einzel-



Figur 94.
CH. CHEVALIERS Landschaftslinse.
f = 100 mm.

Figur 95.
J. PETZVALS Porträtobjektiv.
f = 100 mm.

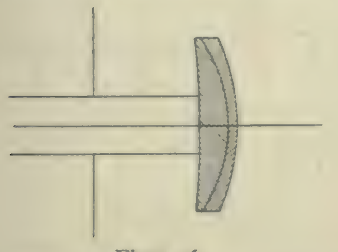
linse konstruierten. Als nämlich im Verlaufe der 30er Jahre an diese Optiker von L. DAGUERRE das Verlangen nach einem besser korrigierten Objektiv gestellt wurde, erfüllten sie es durch die Konstruktion der *französischen Landschaftslinse*[1], bei der ein fast plankonvexes Flintglas mit einem bikonvexen Crownglas zusammengekittet war, während die ganze Kombination mit bestimmter Blendenstellung benutzt werden mußte. Sie hatten durch diese Achromatisierung, die allerdings noch keine photographische gewesen zu sein scheint, die Verwendung des WOLLASTONschen Einzelobjektivs für den neuen photographischen Apparat überholt und ihrer neuen Kombination gleichzeitig eine größere Schärfe in der Mitte gegeben. Trotzdem blieb noch viel zu wünschen übrig. Die übrig bleibende sphärische Unterkorrektion gestattete keine beträchtliche Öffnung, und so kam es, daß das Verlangen nach einem lichtstarken Objektiv für Porträtzwecke gleich nach dem Bekanntwerden der photographischen Verfahren sehr rege wurde.

Es wurde erfüllt durch die Gewinnung von J. PETZVAL, dessen Wirken den ersten Abschnitt der älteren photographischen Optik bildet. Nach kurzer Zeit theoretischen Studiums berechnete er im Sommer 1840 sein weit bekanntes *Porträtobjektiv*[2], ein Dublet mit drei einzeln stehenden Linsensystemen,

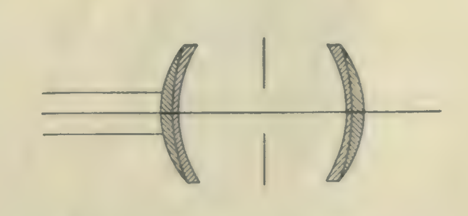
[1] Zum Zwecke leichterer Übersicht ist in den Objektivtypen stets für Crownglas niederer Brechung eine absteigende ⟍, für Flintglas mit hoher Brechung eine aufsteigende ⟋ Schraffierung gewählt worden. Die verschiedenen Typen sind im Interesse einer bequemeren Vergleichung auf die Grundbrennweite f = 100 mm gebracht und in natürlicher Größe dargstellt worden. — [2] s. hierfür und für das DALLMEYERsche Porträtobjektiv den Aufsatz M. VON ROHRS: Ueber ältere Porträtobjektive. Ztschr. f. Instrumentenk. **21.** 49—52. 1901.

das bei einer Öffnung von 1 : 3,4 eine vollendete sphärische Korrektion und Erfüllung der Sinusbedingung zugleich mit einer vollständigen Hebung des Astigmatismus für ein Gesichtsfeld von etwa 30° bot. Der etwas große Abstand im Innern des Dublets machte es untunlich, das Objektiv etwa für Aufnahmen von größerem Gesichtsfelde zu benutzen. Es blieb das Porträtobjektiv und ist als solches noch heute im Gebrauch. Die Ausführung der PETZVALschen Rechnung geschah durch FR. VOIGTLÄNDER in Wien. Andere Konstruktionen J. PETZVALS sind uns entweder unbekannt geblieben, oder sie lieferten wie das sogenannte *Orthoskop* ungünstige Resultate, und der schon 1843 eintretende Bruch zwischen J. PETZVAL und FR. VOIGTLÄNDER verhinderte die Ausbildung einer engen Beziehung zwischen Wissenschaft und Technik, die in ihren ersten Anfängen schon so schöne Früchte getragen hatte.

Wir kommen nun zu dem zweiten Abschnitte der älteren photographischen Optik, denn es geht nach einer langen Periode der Ruhe nunmehr die Führung in der photographischen Optik an England über, wo eine große Zahl von tätigen Fachleuten und begabten Amateuren um die Wette an



Figur 96.
TH. GRUBBs aplanatic lens mit mittlerem Blendenabstande.
f = 100 mm.



Figur 97.
CH. C. HARRISON u. SCHNITZERS Globe lens.
f = 100 mm.

der Verbesserung der photographischen Objektive arbeitete. Obwohl in dieser Zeit auch die Einzellinse und das Porträtobjektiv bearbeitet werden, so können wir diese Periode doch mit Recht als die der Schaffung der verzeichnungsfreien Weitwinkelobjektive bezeichnen.

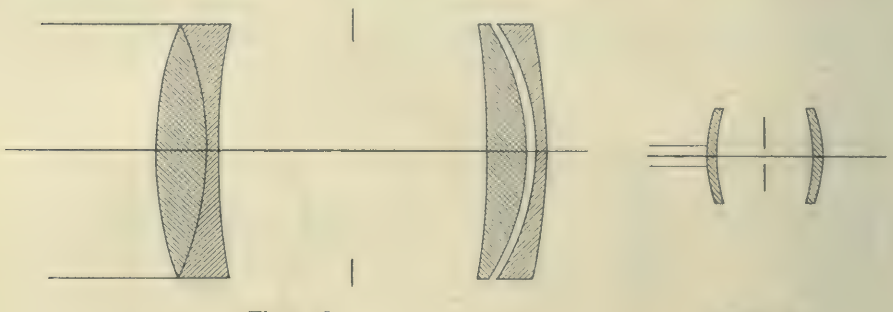
Die erste neue Konstruktion[1], die *aplantic lens*, von TH. GRUBB, 1857, gehört allerdings nicht in diese Klasse. Es war eine Einzellinse mit Vorderblende, die abweichend von der CHEVALIERschen Form aus einem Crown- und einem Flintmeniskus zusammengekittet war und die schlechte sphärische Korrektion vieler französischer Landschaftslinsen verbessern sollte. An die Zusammensetzung zweier Einzellinsen dieser Art zu einem Dublet ist wohl gedacht worden, doch hat sich solch ein Doppelobjektiv nicht eingebürgert.

Schon in etwas früherer Zeit beginnen aber die Bestrebungen, einen ganz neuen Typus mit großem Gesichtswinkel zu schaffen. Ein solcher war durch die Ausbildung der photographischen Verfahren, die nunmehr auch von einer Reihe tüchtiger Amateure geübt wurden, geboten. Die Entwickelung, die im wesentlichen auf die Namen J. ROTHWELL, TH. SUTTON, R. H. BOW, J. H. DALLMEYER, TH. ROSS, CH. HARRISON & SCHNITZER zurückgeht, bringt mehrere Typen zutage, die einmal durch die *globe lens* von CH. HARRISON & SCHNITZER, sowie das *unsymmetrische Doublet* von TH. ROSS repräsentiert werden, während auf der anderen Seite J. H. DALLMEYER sein *Triplet* herausbringt. Die symmetrischen

[1] s. hierfür und für CH. CHEVALIERS Landschaftslinse den Aufsatz M. VON ROHRS: Notes on some old lenses. The Brit. Journ. of Phot. **48**. Nr. 2140. 292—294. 1901.

Dublets (die etwas später in dem schon besprochenen *Pantoskop* von E. BUSCH noch weiter entwickelt werden) zeichneten in einem großen Gesichtswinkel ohne Verzeichnung und mit sehr vermindertem oder gar gehobenem Astigmatismus, verzichteten aber auf Erreichung der sphärischen Korrektion im engeren Sinne. Demgegenüber hatte J. H. DALLMEYER in seinem Triplet sich in der Größe des Gesichtsfeldes Schranken aufgelegt, indessen sphärische Korrektion eingeführt, so daß sein Objektiv ein Universalobjektiv darstellte, während die ersterwähnten Typen einseitig als Weitwinkelsysteme ausgebildet waren und nur mit ganz engen Blenden verwandt werden konnten.

Bevor wir hier abschließen, müssen wir noch ein ebenfalls bis in die neueste Zeit hinein beliebtes *Porträtobjektiv* von J. H. DALLMEYER erwähnen, das ebenfalls als Dublet mit großem Abstande und drei einzeln stehenden Linsen kon-



Figur 98.
J. H. DALLMEYERS Porträtobjektiv.
$f = 100$ mm.

Figur 99.
A. STEINHEILS Periskop.
$f = 100$ mm.

struiert, sich namentlich in der Zusammensetzung der Hinterlinse von dem PETZVALschen Objektiv unterscheidet. Infolge der hier getroffenen Einrichtung, den letzten Linsenabstand verändern zu können, besaß es die Eigenschaft, die Einführung beliebiger Beträge von Unterkorrektion zur Erzielung harmonisch wirkender Porträtaufnahmen zu gestatten.

Der dritte Abschnitt in der Zeit der älteren Objektive wird nun ausgefüllt durch das Wirken A. STEINHEILS. Ihm ist es zu danken, wenn die Führung auf dem Gebiete der photographischen Optik wieder nach Deutschland verlegt wird.

Er beginnt seine Tätigkeit auf photographischem Gebiete 1865 mit dem *Periskop*, einem aus zwei unverkitteten Menisken zusammengesetzten, symmetrischen Weitwinkelobjektiv, das auch noch heute in einfachen Apparaten Anwendung findet.

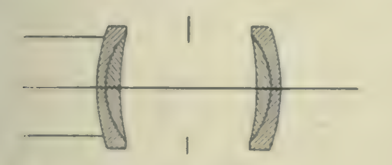
Es sei gleich hier bemerkt, daß im Jahre 1901 eine Periskopkonstruktion beschrieben wurde, die anastigmatische Bildfeldebenung zeigte. In dem von der optischen Anstalt von C. P. GOERZ[1] eingeführten *Hypergon-Doppelanastigmaten* ist fast in idealer Weise Hebung des Astigmatismus und der Bildkrümmung für ein ungemein großes Feld erreicht. Natürlich kann bei der Einfachheit der Konstruktion eine Hebung der sphärischen und chromatischen Abweichungen nicht herbeigeführt werden.

Schon im nächsten Jahre, 1866, tritt A. STEINHEIL mit einem auf Grund der SEIDELschen Formeln sorgfältig berechneten Universalobjektiv auf, dem *Aplanaten*. Dieses Objektiv leistete mit geringeren Mitteln (zwei gegen drei

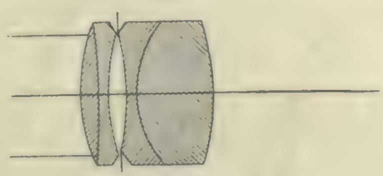
[1] Astigmatisch korrigirtes Weitwinkelobjektiv. D.R.P. 126 500 vom 21. Juni 1900.

Doppellinsen) dasselbe, wie das DALLMEYERsche Triplet und wurde so in kurzer Zeit das beliebteste Universalobjektiv. Nach dem gleichen Konstruktionsgedanken vollständiger Symmetrie und Verwendung zweier Flintgläser zum Aufbau der Systeme brachte er noch zwei Typen heraus, die einen größeren Winkel umfaßten und den Zwecken der Landschafts- und Architekturaufnahmen besonders angepaßt waren. Bei der Berechnung seiner Konstruktionen hat er stets darauf gesehen, keine zu großen sphärischen Zonen zuzulassen. Sie erwarben sich einen großen Ruf, und Objektive dieser Art haben seit der Mitte der 60er Jahre eine ganz bedeutende Verbreitung gefunden.

Etwa 15 Jahre später, im Beginn der 80er Jahre, brachte A. STEINHEIL nach einer Reihe von Modifikationen des Aplanattypus eine neue Konstruktion heraus, der er den Namen *Antiplanet* erteilte. Als Prinzip der Konstruktion



Figur 100.
A. STEINHEILs Aplanat.
$f = 100$ mm.



Figur 101.
A. STEINHEILs Gruppenantiplanet.
$f = 100$ mm.

hat er die Anhäufung entgegengesetzter Abweichungen von großem Betrage in den beiden Hälften des Objektivs bezeichnet, die auch selber entgegengesetztes Vorzeichen aufwiesen. Nach diesem Typus konstruierte A. STEINHEIL zwei Objektivserien, die er als Porträt- und Gruppenantiplanet unterschied. Während bei beiden die sphärischen Zonen sehr gering waren, zeigte der für den kleineren Bildwinkel bestimmte Porträtantiplanet eine vollständige Hebung des Astigmatismus, während bei dem Gruppenantiplaneten die Bildfeldebenung im übertragenen Sinne herbeigeführt war.

2. Das Teleobjektiv.

Bevor wir zur Schilderung der Wirkungen übergehen, die die Herstellung der neuen Glasarten in der Berechnung neuer Objektivtypen nach sich zog, wollen wir eine ganz besondere Art von Objektiven behandeln, die insofern von allen übrigen abweichen, als sie nicht als einfache Linsen aufgefaßt werden können: es sind das die Teleobjektive.

Man versteht in der photographischen Praxis wohl ziemlich allgemein unter einem Teleobjektiv eine derartige Verbindung eines Sammelsystems längerer mit einem Zerstreuungssystem kürzerer Brennweite, daß diese Bestandteile einander genähert und von einander entfernt werden können.

Bezeichnet man nun die Brennweite des vorderen (positiven) Bestandteiles mit f_1, die des hinteren (negativen) mit $-f_2$ und den Abstand der zugewandten Brennpunkte beider Systeme mit Δ, so ergibt sich die Brennweite des Teleobjektivs nach p. 55 zu

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta} \quad ,$$

eine Form, aus der man sofort ersieht, daß diese Brennweite innerhalb weiter Grenzen beliebig gewählt werden kann, wenn die Fassung der Linsen des Teletubus eine entsprechende Verschiebung der Linsen gegen einander und damit

eine entsprechende Variation von $\varDelta$ zuläßt. Sieht man die beiden Komponenten des Teleobjektivs als dünne Linsen an, so kann man die Entfernungen der Brennpunkte der Kombination von der Sammel- und der Zerstreuungslinse (α, β) ausdrücken durch

$$\alpha = f_1 \left\{ \frac{f_1}{\varDelta} + 1 \right\} \quad ; \qquad \beta = f_2 \left\{ \frac{f_2}{\varDelta} - 1 \right\} \quad ,$$

während der Hauptpunktsabstand I gegeben ist durch:

$$I = \frac{1}{\varDelta} \{ f_1 - f_2 + \varDelta \}^2 \quad .$$

Unter Berücksichtigung der Bemerkung über das Größenverhältnis zwischen f_1 und f_2, ergibt sich leicht, daß der vordere Brennpunktsabstand immer größer, der hintere immer kleiner ist als bei einem Objektiv gleicher Brennweite vom Typus der einfachen Sammellinse.

In diesem Umstande liegt in Verbindung mit der Variabilität der Brennweite der Vorzug des Teleobjektivs vor den Objektiven gewöhnlicher Art. Man ist imstande, den Standpunkt der Aufnahme ganz ohne Rücksicht auf den Reduktionsmaßstab zu wählen. Da infolge der oben angegebenen Formel für den Brennpunktsabstand auch die Objektentfernung bei einem Teleobjektiv stets größer ist als bei einem gewöhnlichen System, so neigt das Teleobjektiv dazu, geringere perspektivische Verkürzungen zu ergeben. Hand in Hand mit dieser Beeinflussung der Perspektive geht die Herabsetzung der Apertur der abbildenden Büschel infolge der Vergrößerung des Objektabstandes. Unser früher angeführten Formel entsprechend muß sich damit aber die Tiefe steigern. Eine lehrreiche Nebeneinanderstellung zweier Aufnahmen desselben Objekts im gleichen Reduktionsmaßstabe nach einem Vorschlage von P. RUDOLPH findet sich in der Literatur.

Was die optische Leistung des Teleobjektivs anlangt, so hat man mit der stets photographisch korrigierten Negativlinse sowohl besonders berechnete Einzellinsen verbunden, die eine hohe Lichtstärke und Brillanz zu erreichen erlauben, indessen die Verzeichnung nicht heben lassen, als auch Doppelobjektive ihr angepaßt, mit denen dann die für das wichtigste Gebiet der Telephotographie, die Aufnahme von Architektureinzelheiten, erforderliche Freiheit von Verzeichnung erreichbar ist.

In der Geschichte der Optik tritt das Teleobjektiv sehr früh auf. Die eingehenden Untersuchungen von J. WATERHOUSE[1] haben den Nachweis geliefert, daß schon J. KEPLER 1612 die Eigenschaften dieser Linsenkombination kannte. Gegen Ende des 17. Jahrhunderts ist sie zum Gemeingut der Optiker geworden, wird bei der beliebten Spielerei der Camera obscura verwandt und auch zur objektiven Demonstration der Sonnenfleken und Sonnenverfinsterungen gern benutzt. Es ist nicht recht verständlich, warum die Kenntnis dieser Einrichtung sich verliert; es geschieht indessen, und die Erfindung wird an mehreren Orten wieder gemacht, so um 1834 von P. BARLOW. In der eigentlich photographischen Optik erscheint das Teleobjektiv 1851, wo es der italienische Ingenieur I. PORRO vorschlägt und praktisch verwendet. Es scheint rasch in Vergessenheit geraten zu sein und wird dann wieder von BORIE und DE TOURNEMIRE 1860 auf den Markt gebracht. Auch da vermag es aber noch keinen Boden in der Praxis zu gewinnen, und nur der Praktiker J. TRAILL TAYLOR weckt durch einzelne anregende Artikel das Interesse an diesem Instrument gelegentlich, ohne daß diese Idee von den Optikern seiner Zeit aufgenommen wurde.

[1] J. WATERHOUSE, Notes on the early history of the camera obscura. The Phot. Journ. **25.** Nr. 9. 1900/01.

A. STEINHEIL berechnete ganz im Anfang des Jahres 1890 ein solches System, ohne es jedoch zu veröffentlichen. Dann aber nahte sich die Zeit, wo dieses Instrument eine wohl übertriebene Beachtung bei den Praktikern fand. Anscheinend gänzlich unabhängig von einander und von ihren Vorgängern suchten drei Optiker um Patente auf diese Erfindung nach: A. DUBOSCQ (Patent vom 7. August 1891), T. R. DALLMEYER (Patentanmeldung vom 2. Oktober 1891), A. MIETHE (Patentanmeldung vom 18. Oktober 1891). Der zuletzt Genannte ließ seine Konstruktion von der Rathenower Firma SCHULZE & BARTELS ausführen.

Für die Theorie dieses Instruments ist unter den drei zuletzt Genannten nur T. R. DALLMEYER[1] von Bedeutung gewesen, der die Fragen nach der Brennweitenbestimmung, nach Helligkeit und Gesichtsfeld in einer sehr anregenden Weise behandelt hat. Im Anfange namentlich hat er die Wirkung des Teleobjektivs aufgefaßt als das Resultat der durch die Negativlinse auf das Bild des Vordergliedes ausgeübten Vergrößerung. Nach ihm wird die Theorie gefördert durch eine Arbeit von P. RUDOLPH[2], in der zuerst das Teleobjektiv betrachtet wird als Gesamtsystem mit variabler Brennweite.

Die Herstellung von Teleobjektiven blieb nicht auf die Anstalt J. H. DALLMEYERS beschränkt; die Firma C. A. STEINHEIL SÖHNE führte in Deutschland solche Konstruktionen aus, ebenso VOIGTLÄNDER & SOHN in Braunschweig und C. ZEISS in Jena, ja in neuester Zeit ist auch ein Patent der Firma C. P. GOERZ in Friedenau auf Negativlinsen bekannt geworden. Alle hier aufgeführten Firmen empfehlen Zusammensetzungen gut korrigierter Doppelobjektive mit den Negativsystemen zum Zwecke der Architekturaufnahmen, während P. RUDOLPH von der Firma C. ZEISS außerdem für Landschafts- und Porträtaufnahmen ein aus vier Bestandteilen zusammengekittetes Einzelsystem berechnete.

Eine der neuesten Erscheinungen auf diesem Gebiete bildet ein von T. R. DALLMEYER[3] im Dezember 1899 zum Patent angemeldeter und den Namen *Adon* führender Apparat, bei dem ein vollständiges Teleobjektiv einem gewöhnlichen photographischen Objektiv vorgeschaltet wird. Ist dieses auf unendlich eingestellt und ist das Teleobjektiv ein teleskopisches System, für das $f_1 = \gamma f_2$; $\gamma > 1$ gilt, so liefert das gewöhnliche photographische System Bilder von γ-fachen Lineardimensionen, während sein Öffnungsverhältnis ungeändert bleibt, sobald nur die Linsen des vorgeschalteten Teleobjektivs eine ausreichende Größe haben.

3. Die Zeit nach der Eröffnung des Jenaer Glaswerks (nach 1886).

Die Anastigmate mit der Mindestzahl von Flächen gegen Luft. Beide Theoretiker der alten Zeit, L. SEIDEL sowohl als J. PETZVAL hatten nachgewiesen, daß bei Achromaten verschwindender Dicke nur dann die PETZVALsche Bedingung für die Ebenung des Bildfeldes

$$\sum \frac{1}{n f} = 0$$

erfüllbar sei, wenn das Crownglas einen höheren Brechungsexponenten habe, als das mit ihm verbundene Flintglas. Der Beweis dafür läßt sich führen, weil bei dünnen Linsen die Achromasiebedingung eine sehr einfache Form annimmt. Diese Erkenntnis wurde in der Form ausgesprochen, daß achromatische Sammelsysteme aus dem gewöhnlichen Crown und Flint (bei denen Crown stets die niedrigere Brechung hatte) kein geebnetes Bildfeld haben könnten. L. SEIDEL[4]

[1] T. R. DALLMEYER, Tele-photographic systems of moderate amplifications. The Brit. Journ. of Phot **40**. Nr. 1734. 477—479. 1893; s. auch desselben Verfassers: Telephotography London, Heinemann, 1899, XV, 148 S. gr. 8° mit 26 Tafeln und 66 Textfiguren. — [2] P. RUDOLPH, Gebrauchsanleitung für Teleobjektive. Mai 1896. 33 S. Lex. 8° mit einer Tafel. — [3] T. R. DALLMEYER, Photographisches Objektiv mit vorgeschaltetem Linsensystem. D.R.P. 120 480 vom 13. Dez. 1899. — [4] L. SEIDEL, A. N. **43**. 323. 1856.

hatte allerdings schon darauf hingewiesen, daß die Einführung von Linsendicken und Abständen einen Ausweg aus diesem Widerspruch bieten könnte, doch war diese Andeutung nicht weiter verfolgt worden.

Als nun nach Eröffnung des Jenaer Glaswerks Crowngläser mit höherem Brechungsexponenten zur Verfügung standen, verwandte man sie sofort zur Konstruktion von Objektiven mit Erfüllung der PETZVALschen Bedingung, wie die *concentric lens* H. SCHROEDERS (1887) und der *Anastigmat* von A. MIETHE (1888). Beide Objektive haben keine große Verwendung in der Praxis gefunden, weil sie sphärisch nicht korrigiert waren. Wirklichen Erfolg mit der Benutzung der neuen Glasarten für photographische Objektive sollte zuerst P. RUDOLPH von der optischen Werkstätte von CARL ZEISS in Jena erringen, der 1890 und 1891 die ersten Serien seiner unsymmetrischen Doppelobjektive herausbrachte, die zunächst als *Anastigmate*, später als *Protare* bezeichnet wurden.

Ihr Prinzip besteht in der gegensätzlichen Abstufung der Brechungsexponenten beider Komponenten, d. h. in einer solchen Zusammensetzung, daß in der einen Komponente der Brechungsexponent der Sammellinse, in der anderen aber der der Zerstreuungslinse höher ist als der Exponent der angekitteten Linse.

Bereits 1891 befand sich unter diesen Objektiven ein Universalobjektiv mit der relativen Öffnung von 1 : 9, das für endliche Öffnung und endliche Neigungswinkel im strengen Sinne eine Hebung der fünf SEIDELschen Fehler erkennen ließ. Auch die Landschaftslinse suchte P. RUDOLPH im gleichen Jahre zu verbessern, um so ein Element zur Bildung vollkommenerer Satzobjektive zu gewinnen, ein Bestreben, das er 1894 durch die Berechnung der *Protarlinse* 1 : 12,5 zu einem gewissen Abschluß brachte.

Während sich aber die Herausgabe des verbesserten Satzobjektivs verzögerte, arbeitete eine ganze Reihe deutscher Optiker an der Vervollkommnung des holosymmetrischen Objektivs, die sie dadurch erreichten, daß sie in jeder Hälfte Elemente zur Herstellung der anastigmatischen Bildebenung einführten, der erste dieser Optiker ist E. VON HÖEGH von der Firma C. P. GOERZ in Friedenau, der Ende 1892 den *Doppelanastigmaten* fertig stellte. Bei diesem Objektiv besteht jede Komponente der in den Handel gebrachten Form aus einer Zerstreuungslinse mittlerer Brechung, die von einer niedrig- und von einer hochbrechenden Sammellinse eingeschlossen wird.

Es folgen 1893 R. STEINHEIL und D. KAEMPFER mit einem von beiden unabhängig gefundenen und R. STEINHEIL geschützten Typus, den die Münchener Firma C. A. STEINHEIL SÖHNE unter dem Namen *Orthostigmat, Typus II*, die optische Anstalt von VOIGTLÄNDER & SOHN unter dem Namen *Collinear, Typus I* in den Handel bringen. Charakteristisch für diese Konstruktion ist eine derartige Zusammensetzung der Komponenten, daß eine Sammellinse niederer Brechung von einer Bikonvex- und einer Bikonkavlinse eingeschlossen wird, die beide ein höheres Brechungsvermögen haben.

Gemeinsam ist den photographischen Objektiven dieser ersten Periode, in der man sich auf die Mindestzahl von Flächen gegen Luft beschränkte, ein verhältnismäßig großer Zonenbetrag, der mit der Korrektion der sphärischen Aberration im engeren Sinne verbunden war. Er machte es untunlich, die Öffnung dieser Anastigmate (seien sie unsymmetrisch oder symmetrisch) wesentlich über die relative Öffnung 1 : 6 hinaus zu steigern.

Die englischen Anastigmate. Während so in Deutschland beharrlich an der Ausgestaltung des Dublets mit vier Flächen gegen Luft und an der Verbesserung der Einzellinse gearbeitet wurde, schlug man in England einen anderen Weg ein, indem man von dem Schema des Triplets ausging.

Hier tritt zuerst der Optiker H. DENNIS TAYLOR auf, dessen Konstruktionen von der Firma TAYLOR, TAYLOR, AND HOBSON ausgeführt werden. Seit dem

Januar 1893 arbeitete H. DENNIS TAYLOR an seinem Triplet, der *Cooke lens*, das er immer weiter vereinfachte und verbesserte, bis es vom Jahre 1895 ab, aus drei Einzellinsen bestehend, in einer Reihe von Serien herausgegeben wurde. Auch hier waren alle SEIDELschen Bildfehler für endliche Öffnungen und endliche Neigungen gehoben, und zwar waren die Zonen der sphärischen Aberration bemerkenswert klein.

In dieser Form bestand das Objektiv aus zwei hochbrechenden Sammellinsen, zwischen die eine Zerstreuungslinse niederer Brechung so eingeschoben war, daß sie der vorderen Sammellinse nahe stand. Wenn hier nun auch die neuen Crowngläser von höherer Brechung verwandt waren, so hatte H. DENNIS TAYLOR[1] doch in einer wesentlich komplizierteren Form (aus dem Januar 1893) ein Triplet berechnet, in dem nur schwachbrechendes Crown und starkbrechendes Flint vorkamen, und das doch namentlich in Hinsicht auf die schiefen Büschel einen sehr befriedigenden Korrektionszustand zeigte. Hier war in der Tat aus alten Gläsern ein sphärisch korrigierter Anastigmat hergestellt worden.

Im Januar 1899 erschien eine Abänderung der Cooke lens, durch die sie einige Eigenschaften eines Satzobjektivs erhielt. Die Hinterlinse konnte nämlich durch eine andere ersetzt werden, die eine andere Brennweite hatte und der chromatischen Korrektion wegen aus anderem Glasmaterial bestand, so daß sich dadurch ein Gesamtsystem anderer Brennweite ergab.

Die letzte Änderung[2], die an diesem Typus vorgenommen wurde, besteht in einer Einrichtung, die die beiden vorderen Linsen um einen kleinen Betrag zu trennen gestattet. Man ändert dabei die Schnittweite ziemlich stark und ist dadurch in den Stand gesetzt, bei konstanter Entfernung der Mattscheibe von der Objektivfassung doch auf verschiedene Objektentfernungen einzustellen.

Einige Jahre später als H. DENNIS TAYLOR, 1895, tritt auch die Firma J. H. DALLMEYER mit einer Konstruktion hervor, die ein anastigmatisch geebnetes Bildfeld zeigte, der sogen. *stigmatic lens*. Dieses Objektiv war von dem damaligen wissenschaftlichen Mitarbeiter der Firma H. L. ALDIS berechnet. Es hatte auch sechs an Luft grenzende Flächen; die Blende war von zwei Kombinationen eingeschlossen, von denen die eine aus zwei durch einen Luftzwischenraum getrennten Elementen bestand. Jede der beiden Kombinationen konnte bei dem nach diesem Typus gebauten Universalobjektiv als Einzellinse für Landschaftsaufnahmen verwandt werden, so daß das System ein drei Brennweiten zur Verfügung stellendes Satzobjektiv war. Auch ein ganz lichtstarkes Porträtobjektiv kam heraus, bei dem die gleiche Einrichtung der Linsentrennung getroffen war, wie bei dem DALLMEYERschen Porträtobjektiv von 1866, so daß auch hier ein beliebiger Betrag sphärischer Unterkorrektion eingeführt werden konnte, um einen mehr harmonischen Eindruck bei Porträtaufnahmen zu erzielen. Hinsichtlich der Zonen steht dieser Typus auf der Stufe der oben besprochenen anastigmatisch geebneten Dubletkonstruktionen kontinentaler Herkunft.

In neuester Zeit (Frühjahr 1902) hat derselbe Optiker H. L. ALDIS[3], der sich von T. R. DALLMEYER getrennt hat, eine sehr einfache Doubletkonstruktion unter dem Namen der *Aldis lens* mit 1 : 6 Öffnung herausgebracht, die aus nur drei Linsen besteht, von denen zwei mit einander verkittet sind und die Vorderkombination bilden, während als Hinterglied eine Einzellinse dient.

[1] H. D. TAYLOR, An improvement in photographic lenses, also applicable to microscopes and lantern objectives. E. P. 19193 vom 30. Januar 1893. Leider habe ich in meinem Sammelwerke dieses Patent ubersehen, und so konnte die Meinung entstehen, sphärisch korrigierte Objektive aus alten Glasarten mit anastigmatischem, ebenem Bildfelde seien eine Erfindung neuesten Datums. v. R. — [2] W. TAYLOR, An improvement in lens mounts for photographic cameras. E. P. 6029^{00} vom 31. März 1900. — [3] H. L. ALDIS, Improvements in photographic lenses. E. P. 5170^{01} vom 11. März 1901 mit der amended Spec. vom 14. Nov. 1902.

Die Anastigmate kontinentaler Optiker mit mehr als vier Flächen gegen Luft. Im Herbst 1896 meldete P. Rudolph ein Patent auf ein Doppelobjektiv mit dem Namen *Planar* an, bei dem vier einzeln stehende Konstruktionselemente verwandt waren. Das System war im wesentlichen symmetrisch zur Blende gebaut. Zwei seiner Komponenten waren aus zwei Teilen zusammengekittet, und zwar hatten die beiden Glasarten nahezu gleichen Brechungsexponenten, aber verschiedene Dispersion; sie bildeten zusammen je eine *hyperchromatische* Kombination, denn es war kein Glas vorhanden, das für die großen Öffnungen (1 : 3,6 bis 1 : 5) eine befriedigende chromatische Korrektion hätte bewirken können. In der Patentschrift hatte P. Rudolph auch schon auf den Einfluß hingewiesen, den man durch geeignete Wahl der Exponentendifferenz an der Kittfläche auf die Verminderung der Zonen des Typus ausüben kann. Die von ihm in den Handel gebrachte Kombination war beinahe ganz frei von Zonen der sphärischen Aberration im engeren Sinne. Sieht man von der Kittfläche ab, so hatte die Hälfte des Planars etwa den Typus eines Gaussschen Fernrohrobjektivs, mit dem sie die Eigenschaft teilte, keine chromatische Differenz der sphärischen Aberration zu besitzen. Dazu kam noch, daß auch die anastigmatische Bildebenung sehr vollkommen, und also der durch die neue Kombination erreichte theoretische Fortschritt nach verschiedenen Richtungen hin recht beträchtlich war.

Der Typus eines aus zwei gegen einander gestellten Fernrohrobjektiven Gaussscher Konstruktion gebildeten photographischen Systems war A. G. Clark schon 1889 geschützt worden, doch ist dieses Objektiv in seiner Patentschrift nicht genau genug beschrieben, um eine Durchrechnung zu gestatten. Überhaupt neigten amerikanische Optiker, wie ein guter Kenner dieser Verhältnisse, J. Traill Taylor, gezeigt hat, dazu, Systeme mit unverkitteten Komponenten zu empfehlen.

Nach dem Jahre 1896 nahm aber auch die kontinentale Optik die Herstellung von photographischen Objektiven mit einer größeren Zahl einzeln stehender Bestandteile, und zwar zunächst wesentlich symmetrischer Konstruktion, eifrig auf.

Von solchen im Handel vorkommenden Objektiven ist zunächst[1] der Goerzsche *Doppelanastigmat, Typus B* (1 : 4,5 bis 1 : 6,3) zu nennen, der anscheinend im Frühjahr 1902 in den Handel gebracht wurde, obwohl E. von Höegh das Patentgesuch bereits im Juni 1898 eingereicht hatte. Jede der beiden Hälften dieses Systems besteht aus einer Bikonkavlinse von leichtem Flint und einer Bikonvexlinse von hochbrechendem Crown.

Hier ist weiter zu erwähnen der nicht ganz symmetrische *Aristostigmat* (1 : 7,7), den die optische Anstalt von H. Meyer & Co.[2] seit dem Frühjahr 1900 herausgibt. Er besteht aus vier durch Luft getrennten Einzellinsen, und als Material kommt hochbrechendes Crown und niedriger oder höchstens gleich starkbrechendes Flint zur Verwendung. Ihm ähnlich scheint die Ende 1902 von der englischen Firma Ross Ltd angezeigte *homocentric lens* zu sein.

Ferner führen wir das von der optischen Industrieanstalt vormals E. Busch[3] in Rathenow seit dem Frühjahr 1902 unter dem Namen *Busch-Anastigmat* vertriebene Objektiv auf. Es ist von R. Martin berechnet und besteht aus schwachbrechendem Crown und starkbrechendem Flint. Material gleicher Art ist auch im *Lumar* von J. Rodenstock in München enthalten.

Erwähnt sei noch das *Euryplan* von Gebr. Schultze in Potsdam, dessen Autor E. Arbeit[4] ist.

[1] C. P. Goerz, Sphärisch, chromatisch und anastigmatisch corrigirtes Zwei-Linsen-System. D.R.P. 109 283 vom 27. Mai 1898. — [2] Hugo Meyer, Photographisches Doppelobjectiv. D.R.P. 125 560 vom 6. Juni 1900. — [3] Rathen. opt. Ind.-Anst. Sphärisch, chromatisch und astigmatisch corrigiertes Zwei-Linsen-Objektiv. Ö.P. 8364 vom 13. Sept. 1901. — [4] E. Arbeit, Chromatisch, sphärisch und astigmatisch korrigirtes Dreilinsenobjektiv. D.R P. 135 742 vom 21. Febr. 1901.

Zum Schluß weisen wir hin auf ein auch aus vier einzeln stehenden Linsen von nahezu gleichem Brechungsexponenten bestehendes Objektiv, das in jüngster Zeit der Firma C. A. STEINHEIL SÖHNE in München[1] geschützt worden ist.

Von der symmetrischen Form wich P. RUDOLPH[2] 1901 wesentlich ab in seinem aus vier Einzellinsen bestehenden *Unar*. Dieser Typus zeigt eine derartige Zusammensetzung, daß von den zwei nicht durch die Blende getrennten Nachbarflächenpaaren das eine einen sammelnden, das andere einen zerstreuenden Charakter hat.

Eine völlig abweichende Konstruktionsidee findet sich bei dem im Frühjahr 1902 von H. HARTING[3] herausgegebenen Triplet *Heliar* der optischen Anstalt VOIGTLÄNDER & SOHN, Aktiengesellschaft in Braunschweig. Das zunächst zu der inneren Zerstreuungslinse symmetrische Objektiv zeigt die Eigentümlichkeit, daß, wie auch die Zusammensetzung der verkitteten Außenlinsen sein mag, die im Innern sich gegenüber stehenden Linsen Glaspaare bilden, bei denen je das Glas geringerer Dispersion nicht auch das geringere Brechungsvermögen besitzt.

P. RUDOLPH[4] ließ schließlich dem Unar einen neuen Dublettypus folgen, der von der optischen Werkstätte von CARL ZEISS zu Jena Ende 1902 als *Tessar* herausgegeben wurde. Der Typus weist drei einzeln stehende Elemente auf. Die aus zwei Gliedern gebildete Hinterlinse hat eine sammelnde Kittfläche, während die Vorderkombination mit einem zerstreuenden Nachbarflächenpaare versehen ist.

Die Instrumente zur Unterstützung des Sehens.

Der gemeinsame Zweck dieser Instrumente ist der, die Gegenstände dem Auge deutlicher erscheinen zu lassen, und zwar geschieht das für das normale Auge dadurch, daß der Winkel vergrößert wird, unter dem sie sich ohne das Instrument darbieten würden. Dieser Winkel kann klein sein, weil die Objekte weit entfernt sind, und dann hat das Instrument für ebene und zur Achsenrichtung des Instruments senkrechte Objekte die Wirkung einer physisch häufig nicht ausführbaren Annäherung, oder er ist klein, weil die Objekte selber klein sind, und dann entspricht die Wirkung des Instruments einer Annäherung, die wegen der Beschränktheit des Akkommodationsvermögens für das unbewaffnete Auge zwecklos wäre. Daß die Instrumente auf solche Objekte andere Wirkungen, also beispielsweise eine Erhöhung der Helligkeit nicht ausüben können, haben wir früher bereits allgemein erörtert; die Vergrößerung der Helligkeit von Sternen durch die Betrachtung mit Teleskopen bildet nur eine scheinbare Ausnahme, da diese Objekte für uns nicht flächenhaft ausgedehnt sind, also auch nicht vergrößert erscheinen können.

Da das Auge den Instrumenten sehr nahe gebracht wird, so müssen sie, wenn wir hier besonders stark übersichtige Augen nicht in Betracht ziehen, virtuelle Bilder liefern.

[1] R. STEINHEIL, Sphärisch, chromatisch und astigmatisch korrigirtes photographisches Objektiv. D.R.P. 133 957 vom 26. Mai 1901. — [2] C. ZEISS, Sphärisch und chromatisch korrigirtes Objektiv mit anastigmatischer Bildebenung. D.R.P. 134 408 vom 3. Nov. 1899. — [3] VOIGTLÄNDER & SOHN, Chromatisch, sphärisch und astigmatisch korrigirtes Objektiv. D.R.P. 124 934 vom 1. Dez. 1900 und Zusatz D.R.P. 143 889 vom 10 Juni 1902. — [4] C. ZEISS, Sphärisch, chromatisch und astigmatisch korrigiertes Objektiv aus vier durch die Blende in zwei Gruppen geteilten Linsen. D.R.P. 142 294 vom 25. April 1902. —

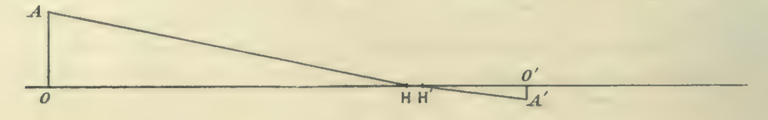
X. Die Brillen.

Von M. v. ROHR.

In den folgenden Abschnitten werden wir uns in der Regel auf die Betrachtung des Sehens mit *ruhendem* Auge beschränken und dabei die Objekte stets so annehmen, daß sie dem Auge nur unter einem kleinen Winkel erscheinen.

Die Größe des Netzhautbildes.

Nehmen wir nun das ruhend gedachte Auge mit Akkommodationsfähigkeit begabt an, so scheint zunächst eine allgemeine, die verschiedenen Brennweiten umfassende Behandlung in einfacher Form unmöglich. Beachten wir aber, daß nach A. GULLSTRAND[1] die Akkommodationsänderungen im Auge die Orte der Hauptpunkte ungeändert lassen, so nimmt unser Problem die folgende Form an:



Figur 102.

$\mathbf{H}O = \xi$; $\mathbf{H}'O' = \xi'$; $OA = y$; $O'A' = y'$; $\sphericalangle\, O\mathbf{H}A = \mathfrak{w}$.

Zur Abbildung ebener, im Akkommodationsgebiete liegender Objekte.

Wie groß ist für eine beliebige Objektentfernung $\xi = \mathbf{H}O$ vom vorderen Augenhauptpunkte $\mathbf{H}$ die Größe y' des Netzhautbildes, wenn O im Akkommodationsgebiete liegt, also wenn auf O akkommodiert wird?

Nach (17) auf p. 51 erhalten wir

$$\frac{y'}{y} = \beta = -\frac{f}{f'}\,\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\xi'}{n\,\xi} \quad ,$$

wo n bei dem in Luft angenommenen Auge den Brechungsexponenten des Glaskörpers gegen Luft bedeutet, und daraus ergibt sich nach Figur 102

$$(1) \qquad y' = \frac{\xi'}{n}\,\mathrm{tg}\,\mathfrak{w} \quad ; \qquad \mathrm{tg}\,\mathfrak{w} = \frac{y}{\xi} \quad .$$

In Worten heißt das, für ein bestimmtes Auge $\left(\frac{\xi'}{n} = \mathrm{const.}\right)$ ist die Größe y'

---

[1] Ophthalmologische Arbeiten von A. GULLSTRAND wurden schon in früheren Teilen dieses Buches erwähnt; sie sind eingehend berücksichtigt worden von C. HESS, Die Anomalien der Refraktion und Akkommodation des Auges mit einleitender Darstellung der Dioptrik des Auges. GRAEFE-SAEMISCHS Handbuch der gesamten Augenheilkunde, II. Teil, VIII. Band, XII. Kapitel. Leipzig, ENGELMANN 1902. 523 S. 8⁰. Diese Schrift liegt dem Folgenden zugrunde, wie aus den Zitaten zu ersehen ist, und auch da, wo unsere Ableitung einen anderen Weg einschlägt, hat ihre Lektüre den Anstoß zur Aufnahme gegeben. Besonders hingewiesen sei auf die GULLSTRANDsche Schrift „Über die Bedeutung der Dioptrie", GRAEFES Arch. f. Ophth. 1899. **49.** 46—70, in der eine sehr vollständige, auch die schiefe Brechung umfassende Darstellung der Zusammensetzung von Abbildungen und der Bestimmung der Kardinalpunkte mittels der Dioptrienrechnung gegeben ist: A. GULLSTRAND operiert nämlich nicht mit f, a, b selbst, sondern mit $1/f$, $1/a$, $1/b$ und führt da, wo es sich wie beim Auge um Systeme mit dem Schlußmedium ($n > 1$) handelt, die durch Division mit dem Brechungsexponenten erhaltenen „reduzierten" Abstände ein. Dann verschwinden alle Brechungsexponenten aus der Rechnung, und er vermeidet auf diese Weise den Widerspruch, den wir durch die Unterscheidung zwischen geometrischer und optischer Divergenzänderung (p. 75/76) aus dem Wege zu räumen versucht haben.

des Netzhautbildes eines ebenen und im Akkommodationsgebiete angenommenen Objekts allein abhängig von dem Hauptpunktswinkel $\mathfrak{w}$. Für verschiedene Augen ist die Größe y' des Netzhautbildes $\frac{\xi'}{n}$ proportional, wenn Objektgröße y und -entfernung ξ, also auch $\operatorname{tg}\mathfrak{w}$, ungeändert bleiben.

Sobald es sich aber um körperliche Gegenstände überhaupt oder um solche ebene Objekte handelt, die außerhalb des Akkommodationsgebietes liegen, stoßen wir wieder auf das schon auf p. 248 ff. behandelte Projektionsproblem. Ist dann **P** der Ort der E.-P. des Auges, so müssen wir durch die von HELMHOLTZ eingeführten Visierlinien alle Objektpunkte von **P** aus in die E.-E. projizieren. Die Größe des Netzhautbildes, das von diesem Abbilde entworfen wird, ist dann wie oben gegeben durch

$$y' = \frac{\xi'}{n} \operatorname{tg}\mathfrak{w} \quad ,$$

wenn wir bei der Größenbestimmung auf einem unscharfen Bilde von Mitte zu Mitte der Zerstreuungskreise messen.

Hier liegt also die Schwierigkeit vor, daß der Hauptpunkt **H**, der die Größe des Netzhautbildes so bequem zu bestimmen gestattet, nicht mit dem Pupillenorte **P** zusammenfällt, der die Perspektive bestimmt. Beachten wir aber, daß **P** und **H** nach p. 264 und 266 nur sehr wenig (zwischen 1,3 und 0,8 mm) von einander abstehen, während die Objektabstände ξ stets relativ groß dagegen und meistens auch absolut groß sind, so sehen wir ein, daß wir in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle ohne merklichen Fehler diese beiden Punkte als zusammenfallend ansehen können. Dann wird der Hauptpunktswinkel $\mathfrak{w}$ zum Gesichtswinkel w, und für die Größe des Netzhautbildes gilt allgemein, sei es nun scharf oder unscharf, die Beziehung

$$y' = \frac{\xi'}{n} \operatorname{tg} w \quad . \tag{2}$$

Man sieht aus dieser Form ohne weiteres, daß man die Sehschärfe des Auges auf zwei verschiedene Weisen angeben kann: erstens in angularem Maße durch den kleinsten Gesichtswinkel $w = \zeta$, unter dem der Abstand zweier Gegenstände erscheinen muß, wenn das Auge sie trennen soll, und zweitens in linearem Maße durch den Abstand der perzipierenden Netzhautelemente.

Die Bestimmung des korrigierenden Brillenglases.

Nach p. 265 liegt bei ametropischem Auge der Fernpunkt nicht im Unendlichen, und wir nennen es dann *korrigiert*, wenn durch ein Brillenglas von der Brennweite f_1 der Fernpunkt in das Unendliche verlegt ist.

F_1 — H H' — F_2 — H — F_1'

Figur 103.
$HH' = i$; $H\mathsf{H} = d$; $F_1 H = f_1$; $\mathsf{F}_2 \mathsf{H} = f_2$.
Zur Bestimmung des korrigierenden Brillenglases.

Das Auge bildet dann mit dem Brillenglase ein zusammengesetztes System, dessen Abbildungskonstanten leicht nach den auf p. 55 angegebenen Formeln berechnet werden können. Es ist nach Figur 103

$$\begin{aligned} F_1'\mathsf{F}_2 = \varDelta &= F_1'H' + H'H + H\mathsf{H} + \mathsf{H}\mathsf{F}_2 \\ &= -f_1 - i + d - f_2 \quad , \end{aligned}$$

und setzen wir dünne Linsen voraus, also $i = 0$, so ist

$$\varDelta = -f_1 + d - f_2 \quad .$$

Wählen wir nun $d = f_2 = 15$ mm, d. h. gleich einem Mittelwerte der vorderen Brennweite des Auges, so ist im Mittel

$$\Delta = -f_1 \quad ,$$

d. h. $\mathbf{F}_2$ fällt mit H, dem Orte des dünnen Brillenglases zusammen. Wir erhalten

$$\sigma = f_1 \quad ; \qquad f = f_2 \quad ,$$

d. h. der Brennpunkt F des Systems fällt mit dem vorderen Brennpunkte des Auges zusammen. Man kommt also zu dem folgenden Ergebnis: Schaltet man ein Brillenglas beliebiger Brennweite f_1 in dem vorderen Augenbrennpunkt ein, so kommt dem so gebildeten System derselbe vordere Hauptpunkt und dieselbe Brennweite zu wie dem unbewaffneten Auge.

Daß durch eine solche Annahme die Rechnungen vereinfacht werden, ist einleuchtend, und es sei daher im folgenden stets der Wert $d = 15$ mm festgehalten.

Soll der unendlich ferne Punkt durch das Brillenglas dem Fernpunkte $\mathbf{F}$ konjugiert sein, der von H die Entfernung $H\mathbf{F} = H\mathbf{H} + \mathbf{H}\mathbf{F} = \mathbf{r} + d$ hat, so muß

$$\frac{1}{\mathbf{r} + d} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{f_1}$$

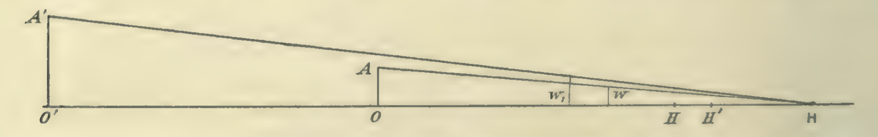
gelten, also $f_1 = \mathbf{r} + d$ sein.

Man erhält also, wie es auch sein muß, für myopische Augen konkave, für hypermetropische Augen konvexe korrigierende Linsen.

Die absoluten Beträge der Linsenstärken $1/|f_1|$ sind, dem stets positiven Werte von d entsprechend, im ersten Falle etwas größer, im zweiten Falle etwas kleiner, als sie sein würden, wenn die Korrektionslinse unmittelbar an den vorderen Hauptpunkt $\mathbf{H}$ des Auges gebracht werden könnte.

Die Brillenvergrößerung N.

Es leuchtet ein, daß wir die Brillenvergrößerung N bequem ausdrücken können durch den Quotienten der Größen der Netzhautbilder, oder, was nach (2) dasselbe ist, durch den Quotienten der Tangenten der Gesichtswinkel; wir müssen uns nur gegenwärtig halten, daß wir beim Sehen mit dem brillenbewaffneten Auge das von der Brille entworfene Bild als Objekt für das Auge ansehen.



Figur 104.
$H\mathbf{H} = d$; $HH' = i$; $HO = a$; $H'O' = b$; $\mathbf{H}O = \xi$; $\mathbf{H}O' = \xi_1$; $OA = y$; $O'A' = y'$.
Zur Brillenvergrößerung N.

Denken wir uns um die um $-d = \mathbf{H}H$ von $\mathbf{H}$ abstehende Brille durch ihre Hauptpunkte H, H' mit dem Interstitium $HH' = i$ und ihre Brennweite f_1 repräsentiert, so ist die scheinbare Größe des Objekts OA für das unbewaffnete Auge gegeben durch

$$\operatorname{tg} w = \frac{OA}{\mathbf{H}O} = \frac{y}{\mathbf{H}H + HO} = \frac{y}{a - d} = \frac{y}{\xi}$$

und analog für das bewaffnete Auge durch

$$\operatorname{tg} w_1 = \frac{O'A'}{\mathbf{H}O'} = \frac{y'}{\mathbf{H}H + HH' + H'O'} = \frac{y'}{b + i - d} = \frac{y'}{\xi_1} \quad .$$

Beachten wir nun noch, daß nach p. 85 gilt

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f_1} = \frac{f_1 + a}{f_1\, a}$$

und

$$\frac{y'}{y} = \frac{b}{a} \quad ,$$

so erhalten wir durch die Elimination von b die Gleichung

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} N &= \frac{\operatorname{tg} w_1}{\operatorname{tg} w} = \frac{y'}{y} \, \frac{a-d}{b+i-d} = \frac{f_1}{f_1+a} \, \frac{a-d}{\dfrac{f_1\, a}{f_1+a} + i - d} \\ &= f_1 \frac{a-d}{(a-d) f_1 - d\,a + i\,(f_1+a)} = \frac{1}{1 - \dfrac{d\,a - i\,(f_1+a)}{f_1\,(a-d)}} \quad , \end{aligned} \right.$$

aus der sich die Abhängigkeit des N-Wertes von f_1 entnehmen läßt. In der Regel wird man bei Brillengläsern die Dicke vernachlässigen, also $i = 0$ annehmen können, und man erhält dann

$$(3\text{a}) \qquad N = \frac{1}{1 - \dfrac{d\,a}{f_1\,(a-d)}} \quad .$$

Eliminiert man dagegen a, b, so ergibt sich

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} N &= \frac{\operatorname{tg} w_1}{\operatorname{tg} w} = \frac{b}{a}\,\frac{\xi}{\xi_1} = \frac{\xi}{\xi_1}\,\frac{f_1 - b}{f_1} = \frac{\xi}{\xi_1}\,\frac{f_1 - (\xi_1 - i + d)}{f_1} \\ &= \xi \left(\frac{1}{\xi_1} \left[1 - \frac{d-i}{f_1} \right] - \frac{1}{f_1} \right) \end{aligned} \right.$$

und entsprechend, wie bei C. Hess p. 188,

$$(4\text{a}) \qquad N = \xi \left(\frac{1}{\xi_1} \left[1 - \frac{d}{f_1} \right] - \frac{1}{f_1} \right) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{N} = 1 - \frac{d}{f_1} \left(1 + \frac{d}{\xi} \right) \quad .$$

Hält man die Brennweite f_1 des Brillenglases und seinen Abstand d fest, so ändert sich der Wert von N mit dem Betrage der mittleren deutlichen Sehweite ξ: Bei positivem f_1 (Konvexbrillen) ist $N > 1$ und wächst mit wachsenden Werten von $d:\xi$, so daß er für Übersichtige am größten ist. Bei negativem f_1 (Konkavbrillen) ist $N < 1$ und nimmt mit wachsendem $d:\xi$ ab.

Wie wir weiter aus (3a) sehen, erhält N für positive f_1 Beträge, die größer sind als 1, und es wächst mit der Stärke der Brille; für negative f_1 dagegen wird $N < 1$ und nimmt mit wachsendem $1/|f_1|$ ab.

Es geht nach (4) in die einfache Form

$$N = -\frac{\xi}{f_1}$$

über 1. wenn $\xi_1 = \infty$, d. h. wenn das Bild von der Linse im Unendlichen entworfen wird, und

2. wenn $f_1 = d - i$, d. h. wenn der hier mit der Pupille zusammenfallend angenommene vordere Hauptpunkt des Auges im hinteren Brennpunkte des (sammelnden) Brillenglases steht.

Wir sehen aus dieser Form, daß der Ausdruck für die Brillenvergrößerung dem für die konventionelle Vergrößerung analog gebildet ist, und daß wir in

derselben Weise von ihm aus auf den Wert des Vergrößerungsvermögens V nach E. Abbe kommen, wie es auf p. 228 geschah.

Da, wie sich oben ergab, Konvexgläser den Gesichtswinkel vergrößern, Konkavgläser ihn verkleinern, so sind die Ergebnisse der am brillenbewaffneten Auge vorgenommenen Sehschärfenprüfung im ersten Falle zu erniedrigen, im zweiten zu erhöhen (s. C. Hess, p. 184—185).

Die Änderung des Akkommodationsvermögens durch die Brille.

Das Akkommodationsvermögen des unbewaffneten Auges nach der oben p. 265 angegebenen Formel

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{p}}{\mathbf{p}\,\mathbf{r}}$$

gilt offenbar auch für den Bildraum des durch H, H' angedeuteten Systems. Ist $\mathbf{F}$ der Fern- und $\mathbf{N}$ der Nahepunkt des Auges, so haben wir zunächst nur

$\mathfrak{F}$ F $\mathfrak{N}$ N H H' H

Figur 105.
$H\mathbf{H} = d$; $HH' = i$; $\mathbf{H}\mathbf{N} = \mathbf{p}$; $\mathbf{H}\mathbf{F} = \mathbf{r}$; $\mathbf{H}\mathfrak{N} = \mathfrak{p}$; $\mathbf{H}\mathfrak{F} = \mathfrak{r}$.
Zur Änderung des Akkommodationsvermögens durch die Brille.

die Punkte $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{N}$ im Objektraume des Brillenglases aufzusuchen, die in $\mathbf{F}$ und $\mathbf{N}$ abgebildet werden. Nennen wir ihre Abstände von den entsprechenden Hauptpunkten der Brille

$$H\mathfrak{F} = \mathfrak{r}_1 \quad ; \qquad H'\mathbf{F} = \mathfrak{r}_1' \quad ; \qquad H\mathfrak{N} = \mathfrak{p}_1 \quad ; \qquad H'\mathbf{N} = \mathfrak{p}_1' \quad ,$$

so gelten für sie die Gleichungen

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1'} - \frac{1}{\mathfrak{r}_1} = \frac{1}{f_1} \quad ; \qquad \frac{1}{\mathfrak{p}_1'} - \frac{1}{\mathfrak{p}_1} = \frac{1}{f_1} \quad .$$

Suchen wir die Beziehungen zwischen $\mathfrak{r}_1'$, $\mathfrak{p}_1'$ und $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$ auf, so ist

$$H'\mathbf{F} = H'H + H\mathbf{H} + \mathbf{H}\mathbf{F} \quad ; \qquad H'\mathbf{N} = H'H + H\mathbf{H} + \mathbf{H}\mathbf{N} \quad ,$$

$$\mathfrak{r}_1' = -\,i + d + \mathbf{r} \quad ; \qquad \mathfrak{p}_1' = -\,i + d + \mathbf{p} \quad ,$$

mithin

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_1} = \frac{1}{\mathbf{r} + d - i} - \frac{1}{f_1} \quad ; \qquad \frac{1}{\mathfrak{p}_1} = \frac{1}{\mathbf{p} + d - i} - \frac{1}{f_1} \quad .$$

Gehen wir nun dazu über, auch $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{N}$ wieder auf den vorderen Hauptpunkt des Auges zu orientieren, so ist

$$H\mathfrak{F} = H\mathbf{H} + \mathbf{H}\mathfrak{F} \quad ; \qquad H\mathfrak{N} = H\mathbf{H} + \mathbf{H}\mathfrak{N} \quad ,$$

$$\mathfrak{r}_1 = d + \mathfrak{r} \quad , \qquad \mathfrak{p}_1 = d + \mathfrak{p} \quad .$$

Die Berechnung von $1/\mathfrak{r}$ und $1/\mathfrak{p}$ geschieht in folgender Weise:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 - d = \mathfrak{r}_1\left(1 - \frac{d}{\mathfrak{r}_1}\right) \quad ,$$

$$\frac{1}{\mathfrak{r}} = \frac{1/\mathfrak{r}_1}{1 - \dfrac{d}{\mathfrak{r}_1}} = \frac{f_1 - (\mathbf{r} + d - i)}{(\mathbf{r} - i)f_1 + d(\mathbf{r} + d - i)} \quad ,$$

und ganz analog wird

$$\frac{1}{\mathfrak{p}} = \frac{f_1 - (\mathbf{p} + d - i)}{(\mathbf{p} - i) f_1 + d(\mathbf{p} + d - i)} \quad .$$

Bilden wir jetzt die gesuchte Größe $\frac{1}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{\mathfrak{p}} - \frac{1}{\mathfrak{r}}$, so ergibt sich nach einigen Zwischenrechnungen das Akkommodationsvermögen $1/\mathfrak{A}$ des mit der Brille f_1 bewaffneten Auges zu

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{\mathfrak{K}} \quad ,$$

wo

$$\mathfrak{K} = \left[1 - \frac{i}{\mathbf{p}} + \frac{d}{f_1}\,\frac{\mathbf{p} + d - i}{\mathbf{p}}\right]\left[1 - \frac{i}{\mathbf{r}} + \frac{d}{f_1}\,\frac{\mathbf{r} + d - i}{\mathbf{r}}\right]$$

ist.

Im allgemeinen wird man das Interstitium i des Brillenglases vernachlässigen können und erhält dann für dünne Linsen die einfachere Formel

$$\bar{\mathfrak{K}} = \left[1 + \frac{d}{f_1}\,\frac{\mathbf{p} + d}{\mathbf{p}}\right]\left[1 + \frac{d}{f_1}\,\frac{\mathbf{r} + d}{\mathbf{r}}\right] \quad .$$

Die Diskussion dieses Akkommodationsfaktors ist einfach, wenn wir die Voraussetzung machen, daß $|\mathbf{r}|, |\mathbf{p}| > d$, d. h. daß weder der Fern- noch der Nahepunkt des unbewaffneten Auges zwischen Brille und Auge liegt. Alsdann ist sowohl für positive als für negative Werte von $\mathbf{p}$ und $\mathbf{r}$

$$\frac{\mathbf{p} + d}{\mathbf{p}} > 0 \quad ; \qquad \frac{\mathbf{r} + d}{\mathbf{r}} > 0 \quad .$$

Mithin ist der Wert von $\mathfrak{K}$ allein abhängig von dem Vorzeichen von f_1, und es ist bei dünnen Konvexlinsen $\frac{1}{\mathfrak{A}} < \frac{1}{A}$, bei dünnen Konkavlinsen $\frac{1}{\mathfrak{A}} > \frac{1}{A}$.

Die Änderung des Akkommodationsgebietes durch die Brille.

Ist das Akkommodationsgebiet des unbewaffneten Auges definiert durch

$$B = \mathbf{r} - \mathbf{p} \quad ,$$

so hat B nur dann einen endlichen (negativen) Wert, wenn Fernpunkt und Nahepunkt beide im Endlichen liegen und den unendlich fernen Punkt nicht einschließen.

Für das bewaffnete Auge ergibt sich

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{r} - \mathfrak{p} = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{p}_1 = \frac{f_1(\mathbf{r} + d - i)}{f_1 - (\mathbf{r} + d - i)} - \frac{f_1(\mathbf{p} + d - i)}{f_1 - (\mathbf{p} + d - i)}$$

$$= \frac{\mathbf{r} - \mathbf{p}}{\left[1 - \frac{\mathbf{r} + d - i}{f_1}\right]\left[1 - \frac{\mathbf{p} + d - i}{f_1}\right]} \quad ,$$

mit anderen Worten

$$\mathfrak{B} = B \cdot L \quad ,$$

wo L für die uns interessierenden dünnen Linsengläser aus der Beziehung

$$\frac{1}{L} = \left[1 - \frac{\mathbf{r} + d}{f_1}\right]\left[1 - \frac{\mathbf{p} + d}{f_1}\right]$$

zu entnehmen ist.

Für alle mit korrigierenden Brillengläsern (p. 321) bewaffneten Augen wird — wie es auch sein muß — das Akkommodationsgebiet unendlich, weil in dem für L geltenden Ausdrucke der erste Faktor des Nenners verschwindet.

Es handele sich aber unter Voraussetzung eines endlichen B-Wertes um nicht völlig korrigierte Augen, und es gelte

$$f_1 > \mathfrak{p} + d > \mathfrak{r} + d \quad ; \qquad \text{sign.} f_1 = \text{sign.}(\mathfrak{r} + d) \quad .$$

Sowohl bei Myopen als bei Hypermetropen wird L alsdann positiv und größer als 1, so daß wir also für endliche $\mathfrak{B}$-Werte hierin die Bestätigung des von C. Hess, p. 239, ausgesprochenen Satzes erhalten: „Das Akkommodations-„gebiet wird vergrößert durch alle Gläser, die den Fernpunkt dem Unendlichen „nähern."

Die Diskussion der Formel in anderen als den hier behandelten Fällen macht keine Schwierigkeiten.

Die Änderung der Perspektive und der Schärfentiefe durch die Brille.

Für die Perspektive können wir ohne weiteres die allgemeinen Darlegungen anwenden, die wir auf p. 252 ff. finden. Projektionszentrum wird der Punkt $\mathfrak{P}$, in den **P**, die mit **H** zusammenfallend gedachte Mitte der Augenpupille, durch das Brillenglas abgebildet wird. Für die hier in Betracht kommenden kleinen Winkel w ist er als aberrationsfrei anzusehen. Gehen wir auf Einzelheiten ein, so wird das perspektivische Zentrum durch Konkavlinsen den Gegenständen genähert, durch Konvexlinsen von ihnen entfernt. Da wir hier den Abstand $d = 15$ mm voraussetzen, so sind die Verschiebungen des perspektivischen Zentrums dabei unbedeutend.

Die Gesamttiefe des Auges nach der Vorschaltung eines Brillenglases läßt sich mit derselben Formel berechnen, die hierzu bei dem bloßen Auge angewandt worden ist. Es ist nur zu beachten, daß sich durch die Vorschaltung sowohl der Durchmesser der E.-P. als auch der Wert der Sehschärfe in angularem Maße ändert. Nennen wir die durch das Brillenglas hervorgebrachte Lateralvergrößerung der Pupille B, so ergibt sich die Angularvergrößerung zu $\frac{1}{B}$, und wir erhalten die nunmehr geltende Sehschärfe zu $\bar{\zeta} = \frac{\zeta}{B}$.

Setzen wir nun auch noch den jetzt gültigen Durchmesser der E.-P. mit $\bar{p} = p\,B$ ein, so erhalten wir, wenn wir die kleine Verschiebung der E.-P. unbeachtet lassen, die Schärfentiefe

$$t = \frac{2\,\bar{\zeta}\,\bar{p}}{(\bar{p}/\bar{\xi})^2 - \bar{\zeta}^2} = \frac{2\,\zeta\,P}{(P/\xi)^2 - \zeta^2} \quad ,$$

wo

$$P = p\,B^2$$

gesetzt ist.

Wir übersehen die in der Schärfentiefe des Auges durch das Brillenglas hervorgebrachte Änderung am einfachsten, wenn wir die (rein formale) Annahme machen, die Brille vergrößere den Pupillendurchmesser im quadratischen Verhältnis und ändere den ζ-Wert gar nicht.

Konkavlinsen vergrößern daher die Schärfentiefe, Konvexlinsen vermindern sie. Setzen wir des Beispiels wegen eine Konkavlinse von $-6{,}25\ D$ oder $f_1 = -160$ mm voraus, so reicht bei einem Pupillendurchmesser von $d = 4$ mm und der Sehschärfe von $1'$ bei Akkommodation auf 11,5 m die Gesamttiefe von 5,75 m bis ∞, und bei Akkommodation auf $\xi = -360$ mm ist eine Gesamttiefe von 22,57 mm vorhanden.

Die alte und die neue Brillennumerierung.

In früherer Zeit war die Anfertigung gleichseitiger Brillengläser ganz allgemein, und sie kommen auch heutigen Tages noch sehr viel vor, da die bei ihnen auftretenden Krümmungen möglichst gering sind. Die Brennweite des gleichseitigen Brillenglases ist dann nach p. 85 gegeben durch

$$f_1 = \frac{r}{2(n-1)} \quad ,$$

und sie wird $f_1 = r$, wenn man für Überschlagsrechnungen den Brechungsexponenten zu 1,5 annimmt. Sonach ist es verständlich, daß in früheren Zeiten die Maßzahl des Radius in Zollen die Brennweite und damit die Nummer des Brillenglases ergab.

Wohl in den 70er Jahren ging man zur Dioptrienrechnung über, d. h. man führte als Maßeinheit die Stärke einer Meterlinse

$$D = \frac{1}{m}$$

ein.

Die Beziehung der alten, die Zolle des Radius der gleichseitigen (dünnen) Linse angebenden Maßzahl R zur neuen Maßzahl M, die die Anzahl der Dioptrien der reziproken Brennweite angibt, erhalten wir nach Einführung eines genaueren Wertes für den Brechungsexponenten $n_D = 1{,}528$ zunächst für rheinländische (preußische) Zolle zu 26,15 mm, wie folgt:

$$R \cdot \text{Zoll} = \frac{26{,}15}{1056} R \cdot m = \left[1 \bigg/ \frac{40{,}4}{R}\right] \cdot m = \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{D} \quad ,$$

mithin, wenn man die Maßeinheit an R kenntlich macht:

$$M \cdot R_{\text{Zoll}} = 40{,}4 \quad .$$

Ganz entsprechend ergibt sich für französische (Pariser) Zolle (pouces) zu 27,07 mm:

$$M \cdot R_{\text{pouc.}} = 39{,}0$$

und für englische Zolle (inches) zu 25,40 mm:

$$M \cdot R_{\text{inch.}} = 41{,}6 \quad .$$

Die Konstruktionsformen der Brillen.

Schon oben hatten wir darauf hingewiesen, daß in älterer Zeit allgemein gleichseitige Linsen zu Brillengläsern benutzt worden sind, und daß diese auch heute noch vielfach vorkommen.

Wohl die einzige erfolgreiche Abweichung von dieser Form wurde 1803 von W. H. Wollaston mit seinen *periskopischen* Brillen eingeführt. Er wollte dadurch eine größere Schärfe der seitlichen Teile des Gesichtsfeldes erreichen. Bei dieser Konstruktion wird das Brillenglas von einem Meniskus gebildet, dessen Radien in einem Verhältnis von 1 : 2 stehen. Diese Brillenform verbreitete sich in Frankreich nach dem Eintritt friedlicher Verhältnisse rasch — wir besitzen einen Bericht darüber von R. Cauchois aus dem Jahre 1814 — und auch im deutschen Sprachgebiete scheint ihre Ausbreitung ziemlich schnell vor sich gegangen zu sein.

Von Brillenformen für astigmatische Augen sei hier die *zylindrisch-sphärische* Brille erwähnt, die zuerst G. B. Airy 1825 für das astigmatische seiner beiden Augen schleifen ließ.

Zum Schluß führen wir noch eine in England ziemlich häufig vorkommende Brillenform an, die so aus zwei mit einer wagerechten Scheidelinie zusammenstoßenden Hälften zusammengesetzt ist, daß die obere Brillenhälfte beim Sehen in die Ferne, die untere beim Sehen in die Nähe benutzt wird. Nach C. Hess (p. 153) geht diese Brillenform auf B. Franklin zurück.

Wegen anderer Brillenformen, wie *torischer*, *prismatischer* u. a. sei auf das entsprechende Kapitel bei C. Hess (p. 136—163) verwiesen.

Bei dem gewöhnlichen Gebrauche von Brillen handelt es sich nun um das Sehen mit bewegtem Auge, um das direkte Sehen, wie es in der Regel genannt wird. Wollte man hierbei zu den besten Resultaten kommen, so müßte man bei den Brillengläsern die Korrektion der schiefen Büschel für den Augendrehungspunkt durchführen; doch ist man wohl über den Vorschlag W. H. Wollastons, bessere Sehschärfe in den seitlichen Teilen des Gesichtsfeldes durch die Meniskenform zu erreichen, nicht hinausgegangen.

Für *schwache Lupen* oder *Lesegläser*, die in der Reihe der optischen Instrumente den Brillen nahe stehen, ist auf die Anregung von A. Gullstrand hin in jüngster Zeit von der optischen Werkstätte von Carl Zeiss ein solcher Versuch gemacht worden. Diese nach Rechnungen von M. von Rohr ausgeführten Konstruktionen sind unter der Bezeichnung *Verantlinsen* seit dem Spätherbst des Jahres 1903 auf dem Markte.

XI. Die Lupe (Das einfache Mikroskop).[1]

Die Fundamentalwirkung (Vergrößerung) und die Strahlenbegrenzung.

Für die Konstruktion und Wirkungsweise auch dieses Instruments ist, wie für die der Projektionssysteme — und zeitlich vor jenen — die einfache dünne Sammellinse Ausgangspunkt und maßgebend gewesen. In der Tat liefert eine solche von den diesseits ihrer ersten Brennebene gelegenen Objekten O (Figur 106) Bilder, welche in der linken Hälfte des Bildraumes, d. h. vor der hinteren Brennebene der Linse, liegen; und zwar liegt bei geeignetem Abstande x des Objekts O von F das Bild O' in derjenigen Entfernung x' vom hinteren Brennpunkt F', auf welche dem Beobachter die Akkommodation am bequemsten ist. Das Verhältnis des halben Sehwinkels w', unter welchem sich dem Beobachter dieses Bild darbietet, zur linearen Größe y seines Objekts, d. i. das Vergrößerungsvermögen des Instruments, ist nach p. 226

$$V = \frac{\operatorname{tg} w'}{y} = \frac{1}{f'}\left(1 + \frac{X'}{\xi'}\right) \quad ; \tag{1}$$

die auf $l = 250$ mm Projektionsdistanz bezogene konventionelle Vergrößerung

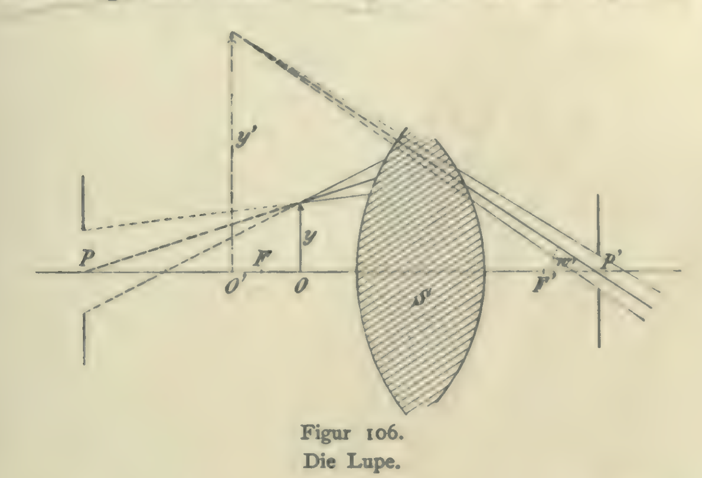
$$N = l \cdot V = \frac{l}{f'}\left(1 + \frac{X'}{\xi'}\right) \quad , \tag{1a}$$

[1] Man bezeichnet Systeme der unten beschriebenen Art, wenn sie weniger als ca. 20-fache Linearvergrößerung geben, als „Lupen“, bei stärkeren Vergrößerungsziffern als „einfache Mikroskope“.

wenn X' den Abstand der Austrittspupille von der hinteren Brennebene, ξ' den des Bildes von der A.-P. bezeichnet.

Sei für die folgende Untersuchung der Strahlenbegrenzung das Auge zunächst als ruhend betrachtet.

Die Lage der A.-P. ist bei denjenigen nach Art einer einfachen Linse wirkenden Lupen, deren freie Öffnung größer ist als die der Augenpupille, gegeben durch — nämlich identisch mit — der letzteren. Alsdann ist also die Augenpupille nach Lage und Größe maßgebend für die Apertur und den



Figur 106.
Die Lupe.

Strahlengang der beim Sehen durch die Lupe wirksamen Büschel. Wenn also die Lage der A.-P. nicht etwa anderweitig, z. B. durch eine eigens hierfür vorgesehene Blende, fixiert ist, so würde eine für die gute dioptrische Wirksamkeit der Lupen charakteristische Forderung darin zu bestehen haben, daß dieselbe in allen Beziehungen von Ortsveränderungen der A.-P. wenig beeinflußt werde, in bezug auf diese unempfindlich sei.

Die freie Öffnung der Linse bildet unter der obigen Annahme die Begrenzung für das Sehfeld, die auch hier nicht mit dem Bilde zusammenfällt und infolgedessen in diesem einen mit voller Apertur wirksamen Teil unterscheiden läßt von einem solchen, welcher mit einer nach dem Rande zu abnehmenden Apertur abgebildet wird (p. 215). Ist aber die freie Öffnung der Linse kleiner als die Augenpupille, so kehrt sich das Verhältnis zwischen Aperturblende und Gesichtsfeldblende um.

Es ist leicht, bei gegebener Größe beider Öffnungen die Beträge des Öffnungswinkels und Gesichtsfeldwinkels anzugeben. Man hat nämlich, wenn der Halbmesser der freien Linsenöffnung $= p$, der der Pupille $= \pi$ ist, im ersteren Falle ($p > \pi$) (Figur 107) für die Tangente des halben Winkels w, unter dem derjenige Bildteil $a\,b$ erscheint, welcher mit voller Apertur abgebildet wird, für den halben Gesichtswinkel w derjenigen Zone $A\,B$, welche mit Hauptstrahlen abgebildet wird und endlich für den halben Winkel w der äußersten sichtbaren Zone $\alpha\,\beta$ der Reihe nach

$$(2) \qquad \operatorname{tg} w = \frac{p - \pi}{d}\,, \qquad \operatorname{tg} W = \frac{p}{d}\,, \qquad \operatorname{tg} \omega = \frac{p + \pi}{d}\,,$$

wenn d die Entfernung zwischen Linsenöffnung und Pupille ist.

Der halbe Öffnungswinkel u der wirksamen Büschel auf der Objektseite ist in diesem Falle — wenn wir annehmen, daß das Auge auf große Entfernung eingestellt, die Büschel auf der Bildseite also als nahezu parallelstrahlig zu be-

trachten seien — unabhängig von der Linsenöffnung und nur von der Brennweite der Linse bedingt, nämlich

(2a) $$\operatorname{tg} u = \frac{\pi}{f} \quad .$$

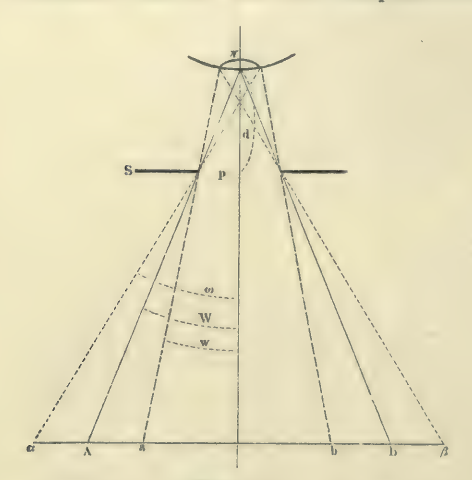
In dem anderen Falle, $p < \pi$ (Figur 108) hingegen sind die Gesichtswinkel der drei oben bezeichneten Räume

(3) $$\operatorname{tg} w = \frac{\pi - p}{d} \quad , \qquad \operatorname{tg} W = \frac{\pi}{d} \quad , \qquad \operatorname{tg} \omega = \frac{\pi + p}{d} \quad .$$

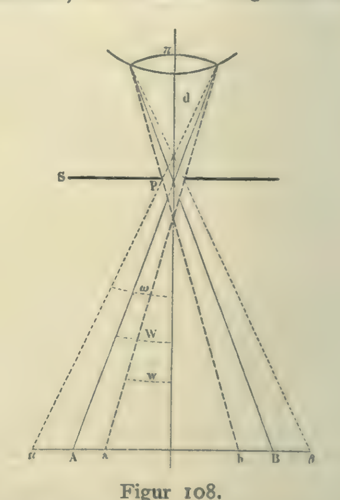
Der halbe Öffnungswinkel auf der Objektseite in diesem Falle ist

(3a) $$\operatorname{tg} u = \frac{p}{f} \quad .$$

Wenn wir also, wie früher, als Gesichtsfeldwinkel schlechthin denjenigen bezeichnen, welcher von den Hauptstrahlen (Mittelachsen) der Büschel begrenzt wird,



Figur 107.
Der Strahlengang in einer Lupe, deren freie Öffnung größer als die Augenpupille ist.



Figur 108.
Der Strahlengang in einer Lupe, deren freie Öffnung kleiner als die Augenpupille ist.

so ist dieser in dem einen Falle nur von der Öffnung des Linse, in dem anderen Falle nur von derjenigen der Pupille und in beiden Fällen vom gegenseitigen Abstand beider abhängig. Das Sehfeld ist also unter sonst gleichen Umständen desto größer, je näher man die Lupe an das Auge hält.

Über die sekundäre Aperturbeschränkung seitlicher Büschel durch eine solche Gesichtsfeldblende, wie sie bei beiden Lupenarten vorkommt, vgl. p. 215 und die dort zitierten Berechnungen.

Allvar Gullstrand[1] hat zuerst darauf hingewiesen, daß man bei den schwachen und mittleren Lupen auf die Beweglichkeit des Auges Rücksicht zu nehmen hat (vgl. p. 267). Dann bleibt freilich die Pupille bei jeder Lage des Auges bestimmend für die Apertur. Aber der Schnittpunkt der Hauptstrahlen wird, wenn man die Elemente des Bildes nach einander mit bewegtem Auge betrachtet, in den A u g e n d r e h u n g s p u n k t verlegt.

Ist die Lage der Augenpupille etwa durch eine Blende fixiert, so muß man mit dem Kopfe Bewegungen machen, um die Drehungen des Auges auszugleichen.

[1] Vgl. p. 328 und M. v. Rohr, The Brit. Journ. of photogr. **51.** Nr. 2279. p. 28. 1904. A. Köhler, Phot. Korr. Nr. 520. p. 9. 1904.

Es wird daher richtiger sein, die Lage des Kopfes so zu fixieren, daß der Augendrehungspunkt an der Stelle verbleibt, für die als den Schnittpunkt der Hauptstrahlen das System korrigiert ist.

Die Figur 107 und die Gleichung (2) liefern auch für das bewegte Auge (das direkte Sehen) den Gesichtsfeldwinkel W ohne weiteres, wenn man d als die Entfernung zwischen der Öffnung der Linse und dem Augendrehungspunkt auffaßt. Die Winkel w und ω hingegen sind nicht aus derselben Figur zu erkennen[1].

Die **Helligkeit der Bilder** ist im Falle $p > \pi$ bei jeder Vergrößerung gleich der des Sehens mit freiem Auge, im anderen Falle wie $p^2 : \pi^2$ gegen diese verringert (p. 245).

Der Einfluß der Aberrationen auf das Bild der Lupe.

Wir fanden früher (p. 115) den durch die sphärische Aberration eines Linsensystems verursachten Zerstreuungskreis, bezogen auf die Objektseite, in erster Näherung proportional der dritten Potenz der Apertur und einer Konstanten K, welche von der spezifischen Konstruktion des Systems abhängt, von dessen Brennweite aber unabhängig ist,

$$\zeta = \left(\frac{h}{f}\right)^3 \cdot K \quad . \tag{4}$$

Diese Gleichung gilt nun aber ebenso, wie für den dort angenommenen Fall eines unendlich entfernten Objekts, auch für den hier vorliegenden eines sehr entfernten Bildes. ζ ist dann der angulare Wert des Zerstreuungskreises im Bilde, zurückbezogen auf das in der vorderen Brennebene liegende Objekt und gemessen vom vorderen Knotenpunkte des Systems, also auch der angulare Betrag des Zerstreuungskreises im Bilde. Daß man die Bedeutung der obigen Gleichung in dieser Weise umkehren kann, ergibt sich sowohl durch direkte Ausrechnung nach p. 213 ff., als auch aus den allgemeinen Betrachtungen im XIII. Kapitel.

Es darf nun in diesem, wie in jedem anderen Falle, der Zerstreuungskreis im Bilde höchstens denjenigen Betrag erreichen, welcher eine merkliche Unschärfe hervorbringen würde. Dieser Betrag hängt, wie wir früher bereits wiederholt hervorhoben, von der Gestalt, Farbe, Helligkeit des Objekts, sowie von der Sehschärfe des beobachtenden Auges ab, andererseits natürlich auch von der Art, wie der „Zerstreuungskreis" geometrisch bestimmt wurde und von der Lichtverteilung innerhalb desselben. Für die gewöhnlich vorliegenden Objekte kann man vielleicht 5 Bogenminuten als Durchschnittsmaß annehmen. (Für die empfindlichen, sogen. „Testobjekte" muß er auf 1—2′ herabgesetzt werden.)

Es ist dann also bei Lupen, deren Durchmesser größer als der der Augenpupille ist,

$$\zeta = \frac{\pi^3 \cdot K}{f^3} \quad , \tag{4a}$$

d. h. der durch die sphärische Aberration hervorgerufene Zerstreuungskreis unter sonst gleichen Umständen umgekehrt proportional der dritten Potenz der Brennweite, direkt proportional der dritten Potenz der Vergrößerung der Lupe. Hier-

[1] Nach mündlicher Mitteilung hat M. v. ROHR die Konstruktion der drei Gebiete $a\,b$, $A\,B$, $\alpha\,\beta$ für das direkte Sehen durch die Lupe in einem demnächst erscheinenden Werke der Mitarbeiter der Firma CARL ZEISS (Die Bildentstehung in optischen Instrumenten) auf das Schema der Figur 107 zurückgeführt, indem er dort die Pupille durch eine um den Augendrehungspunkt mit dem Pupillenradius geschlagene Kugel ersetzte und die Grenzen $a\,b$ und $\alpha\,\beta$ durch Tangenten an diese Kugel bestimmte.

nach ist leicht zu bemessen, daß die axiale sphärische Aberration einer einfachen plankonvexen mit der ebenen Seite nach dem Objekt zu gerichteten Crownglaslinse für ein Auge von 4 mm Pupillenöffnung erst bei einer Brennweite von 9—10 mm, also bei einer ca. 25-fachen linearen Vergrößerung — in umgekehrter Lage bei einer ca. 7-fachen — anfängt, bemerklich zu werden, was in Übereinstimmung mit der Erfahrung ist.

Ganz analog ist der Einfluß der chromatischen Aberration zu bemessen. Wir fanden diese auf p. 172 poportional einer von der Zusammensetzung des Systems abhängigen Konstanten G und der ersten Potenz des Öffnungsverhältnisses, also in unserem Falle

$$\gamma = \left(\frac{h}{f}\right) \cdot G = \frac{\pi \cdot G}{f} \quad . \tag{5}$$

Bei konstantem π ($p > \pi$) wächst daher der Zerstreuungskreis der chromatischen Aberration direkt mit der Vergrößerung des Systems und wird demgemäß in einfachen Crownglaslinsen erst bei einer ca. 10-fachen Vergrößerung bemerklich.

Die Ansprüche, die an die Eigenschaften der von Lupen entworfenen Bilder außerhalb der Achse zu stellen sind, decken sich zunächst mit denjenigen, welche wir bei den photographischen Systemen namhaft gemacht haben. In der Tat läßt sich ein photographisches Objektiv, dessen A.-P. im zugänglichen Teile des Bildraumes liegt, z. B. die einfache Linse mit außerhalb gelegener Blende ohne weiteres als Lupe benützen, wenn man ihre Stellung gegenüber Objekt und Bild umkehrt (bei der auf p. 310 betrachteten einfachen Landschaftslinse hätte man demnach die Blende nach dem Auge hin zu richten). An Stelle des in oder ein wenig hinter der Brennebene gelegenen Bildes würde hier für ein normalsichtiges Auge das in oder etwas innerhalb der Brennweite gelegene Objekt kommen (für ein übersichtiges Auge würden Objekt und Bild ihre Lage unter bloßer Umkehrung ihres Verhältnisses geradezu beibehalten können). Von Wichtigkeit sind also hier wie dort: Aufhebung des Astigmatismus und der Koma, Ebenung des Bildes, Orthoskopie und von den chromatischen Eigenschaften insbesondere: Gleichheit der Vergrößerung für die verschiedenen Farben.

Bei schwächeren Lupen, die der ersten der beiden erwähnten Arten ($p > \pi$) angehören, ist es aber nicht gleichgültig, für welchen Blendenort die genannten Korrektionen ausgeführt werden. Sie müssen wie auf p. 330 und bei den Lesegläsern (p. 328) auseinandergesetzt wurde, für einen so gelegenen Punkt korrigiert werden, daß man den Drehungspunkt des Auges mit diesem zusammenfallen lassen kann; und man wird am besten durch geeignete Anschläge für Stirn und Nase den Kopf zu der Stellung veranlassen, die der angegebenen Forderung entspricht. Diese heißt nach ihrem Entdecker die GULLSTRANDsche Bedingung.

Die üblichsten Konstruktionsformen der Lupe.

1. Die einfache unachromatische Linse. Diese ist in Brennweiten bis zu ca. 30 mm herunter, d. h. bis zu ca. achtmaliger Vergrößerung ganz brauchbar, wenn man ihr eine etwa plankonvexe Gestalt gibt, mit der ebenen Seite nach dem Auge zu. (Diese Stellung ist zwar wegen des bei ihr relativ großen Betrages der sphärischen Aberration in der Achse ungünstig, verdient aber trotzdem wegen der in ihr erheblich geringeren Fehler außer der Achse bei weitem den Vorzug.) Man hat, wenn man sie nahe ans Auge hält, ein Bildfeld von ungefähr $^1/_5$ der Brennweite merklich eben und ziemlich frei von Verzerrung. Darüber hinaus sind die Fehler in diesen letzteren beiden Eigenschaften, wie auch namentlich in bezug auf die chromatische Vergrößerungsdifferenz zu sehr bemerklich.

2. Eine wesentliche Verbesserung diesen einfachen Lupen gegenüber bilden die aus zwei unachromatischen (meist plankovexen) Linsen zusammengesetzten, deren bekannteste Typen die von FRAUNHOFER (Figur 109) und WILSON (Figur 110) sind. Bei der ersteren Konstruktion, in welcher noch nahezu der Typus der einfachen Linse festgehalten ist, sind durch die Verteilung der Brechung auf die doppelte Anzahl von Flächen und die infolgedessen geringeren Krümmungen derselben die Aberrationen in der Achse ohne weiteres verringert, während durch die besondere Art der Zusammensetzung aus zwei annähernd gleichen, mit den konvexen Flächen einander zugewandten Linsen in geringem Abstand von einander die Aberrationen außerhalb der Achse möglichst vermindert sind.

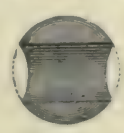
Bei der WILSONschen Lupe kommen einerseits dieselben Vorteile zur Geltung; die größere Entfernung der Linsen von einander gewährt sogar für die Verminderung der Aberrationen außer der Achse noch günstigere Bedingungen und ermöglicht außerdem, wenn auch nicht die Aufhebung — das würde dem System gänzlich den freien Objektabstand rauben — so doch eine Verminderung



Figur 109. Die FRAUNHOFERsche Lupe.



Figur 110. Die WILSONsche Lupe.



Figur 111. Die Lupe von BREWSTER.



Figur 112. Die Lupe von STANHOPE.

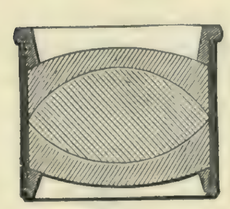
der chromatischen Differenz der Vergrößerung; dafür ist diese Lupe gegen die FRAUNHOFERsche im Nachteil in bezug auf den Objektabstand. Man wählt die Brennweiten der Einzellinsen bei ihr ungefähr gleich, ihren Abstand zu $^3/_8$ jener Brennweiten. Das Sehfeld wird bei der WILSONschen Lupe entweder durch ein zwischen den Linsen befindliches Diaphragma oder ebenso wie bei einer einfachen Linse durch die Größe (den Rand) einer der beiden Linsen bestimmt.

3. Andere Konstruktionen sind aus der auf p. 70 auseinander gesetzten Idee hervorgegangen, indem sie nur solche Brechungen herbeiführten, bei denen die Achsen der wirksamen Büschel durch die Zentren der brechenden Kugelflächen gehen, oder wenigstens die für die Bildentstehung wesentlichen Brechungen mehr oder weniger vollkommen dieser Forderung genügen ließen. So entstand das periskopische Mikroskop WOLLASTONS[1]: zwei plankonvexen Linsen, die mit ihren planen Seiten auf eine zentrisch durchbohrte Messingscheibe gelegt werden. Es war die erste symmetrische Konstruktion[2], sein Typus hat, für photographische Zwecke in mannigfaltiger Weise ausgebildet, die am meisten verbreitete Klasse der Objektive hervorgebracht. BREWSTER füllte, um die inneren Reflexionsverluste zu beseitigen, den Hohlraum mit einer Flüssigkeit aus und ersetzte schließlich die beiden Linsen durch eine bikonvexe mit einem äquatorialen Einschliff, der die Stelle der Blende vertrat[3] (Figur 111). Waren die beiden Außenflächen Teile derselben Kugel, so war die Idee rein zentraler Büschel streng verwirklicht, wofern die Mittelblende wirklich als Aperturblende wirksam war, was besonders bei der von CODDINGTON herrührenden Form, einem Zylinder mit einer schmalen, aber tiefen Ausdrehung erreicht werden kann. — Die Lupe von STANHOPE besitzt mit den vorigen einige Ähnlichkeit, da sie ebenfalls aus einem Glaszylinder besteht, ist aber unsymmetrisch (Figur 112). Dabei sind die beiden

[1] W. H. WOLLASTON, On a periscopic camera obscura and microscope, Phil. Trans. **2.** 370. 1812. — [2] M. v. ROHR, Theorie u. Gesch. d. photogr. Obj. Berlin 1899. p. 89. — [3] H. LLOYD, A Treat. on light and vision. London 1831. p. 298. Vgl. auch die ähnlichen Konstruktionen photographischer Objektive, die wir auf p. 70 zitiert haben.

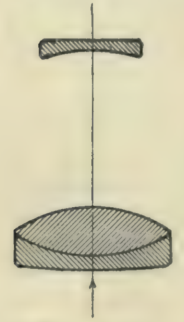
Krümmungen erheblich verschieden, oft in der Weise, daß die vordere (untere) Brennebene dem Orte und der Krümmung nach mit der vorderen Linsenfläche zusammenfällt, um die in dieser angebrachten Gegenstände (z. B. kleine Photogramme) durch die stärker gewölbte Fläche hindurch betrachten zu können. Auch bei der Brewsterschen Lupe ist der Abstand des Objekts von der ersten Linsenfläche, der sogen. freie Objektabstand, natürlich sehr gering.

4. Unter den aus Gläsern mit verschiedenem Zerstreuungsverhältnis zusammengesetzten Lupen haben sich namentlich die von Steinheil konstruierten, sogen. aplanatischen, bewährt. Dieselben bestehen aus einer zwischen zwei gleichen Flintglasmenisken eingeschlossenen bikonvexen Crownlinse. Eine weitere Verbesserung im Rahmen derselben Konstruktion wurde — es ist mir nicht bekannt, durch wen zuerst — dadurch eingeführt, daß der mittleren Crownlinse eine größere Dicke gegeben wurde, so daß gewissermaßen eine achromatische Brewstersche Lupe entstand (Figur 113; $f = 40$ mm).



Figur 113.
Eine 6-fache verbesserte aplanatische Lupe in natürlicher Größe.

5. Das Gegenstück zu der Wilsonschen Lupe bildet in gewissem Sinne die zuerst von Chevalier[1] vorgeschlagene, später von E. Brücke[2] wieder aufgenommene Konstruktion, nach der man eine kollektive Vorderlinse mit einer dispansiven Hinterlinse verbindet (Figur 114). Denn während bei der Wilsonschen Lupe die Ausdehnung und Qualität des Bildes auf Kosten des freien Objektabstandes erhöht wird, findet bei der Brückeschen umgekehrt eine Einbuße in diesen beiden Beziehungen zugunsten des freien Objektabstandes statt. Doch stellt diese, jetzt gewöhnlich nach Brücke bezeichnete, Lupe schon mehr ein zusammengesetztes Mikroskop in dem weiter unten aufgefaßten Sinne vor; ihre Wirkungsweise findet daher besser bei dessen Besprechung eine nähere Erklärung.

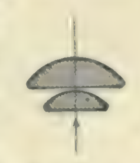


Figur 114.
Die Lupe von Chevalier („Brückesche Lupe").

6. Man hat früher einfache Mikroskope von erheblich kürzerer Brennweite und entsprechend stärkerer Vergrößerung hergestellt, als die oben aufgeführten besitzen. Die Anwendung einer einzigen Linse zu diesem Zweck verbot sich natürlich bald von selbst; denn eine solche würde schon bei mittleren Vergrößerungen einen sehr kurzen Krümmungsradius erhalten müssen (z. B. bei 500-facher linearer Vergrößerung und plankonvexer Form wäre, Crownglas vom Brechungsexponenten vorausgesetzt 1,5 als Material vorausgesetzt, $r = 0{,}25$ mm). Dadurch wäre einerseits die äußerste mögliche Öffnung der Linse ebenfalls auf sehr geringe Beträge herabgedrückt (der Durchmesser einer vollständigen Halbkugel im obigen Falle $= 2r = 0{,}5$ mm) also die Lichtstärke eine entsprechend geringe. Andererseits führt eine solche Halbkugel oder — was man auch vorgeschlagen und benutzt hat — Vollkugel (Glasperle), bis an ihren Äquator benützt, so starke Aberrationen herbei, daß von einer Strahlenvereinigung und einem optischen Bilde überhaupt kaum noch die Rede sein kann. Man muß die freie Öffnung einer solchen Linse also erheblich vermindern, auf $^1/_5$ bis $^1/_{10}$ ihres Maximalbetrages, und verliert proportional dieser Reduktion an Unterscheidungsvermögen, im quadratischen Verhältnis mit ihr an Lichtstärke. Man hat daher nach einigen mißlungenen Versuchen, die genannten Übelstände durch Anwendung von hochbrechenden Substanzen (Edelsteinen oder Flüssigkeiten Brewster 1819, Goring

[1] Ch. Chevalier, Des Microscopes. Deutsche Übersetzung. Quedlinburg 1853. p. 38. —
[2] E. Brücke, Sitzber. Wien. Akad. d. Wiss. **6**. 554. 1851.

und PRITCHARD 1824) zu vermindern nach dem Vorschlag von EULER[1], J. HERSCHEL[2] und namentlich von WOLLASTON[3] zwei und später auch drei Linsen zu einem sogen. Dublet (Triplet) zusammengesetzt. Durch die Verteilung der Krümmung auf mehrere Flächen werden die Aberrationen gemäß dem p. 110 Ausgeführten erheblich vermindert. Figur 115 stellt ein solches Dublet von 2 mm Brennweite in vierfacher Vergrößerung dar (von ZEISS), wie es noch in der zweiten Hälfte dieses Jahrhunderts vielfach gebraucht wurde. Der größte Teil der mikroskopischen Untersuchungen bis zur Mitte dieses Jahrhunderts wurde mit derartigen Systemen ausgeführt, bei denen Vergrößerungen bis zu 200 noch ziemlich vorteilhaft erreichbar waren[4].



Figur 115. Ein Dublet 120-fach; in vierfachem Maßstabe.

Die folgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der Objektabstände und des Gesichtsfeldes der oben genannten Lupen bei verschiedenen Brennweiten (Vergrößerungen).

Konstruktionstypus	Lineare Vergrößerung	Fokalabstand mm	Objektseitiges Gesichtsfeld mm
Einfache Linse, plankonvex	6	40	bis ca. 8 mm brauchbar
WILLSONsche Lupe	10	12—14	14
STEINHEILsche Lupen	6	34	18
	10	20	10
	20	10	3,5
Verbesserte aplanatische Lupen	6	32	30
	10	12	15
BRÜCKEsche Lupe	6	70	10
Dublets von ZEISS	17	13	4
	34	5	2
	70	2,5	1,2

7. Die erste und bisher einzige Lupe, die wirklich, d. h. für das direkte Sehen (entsprechend der GULLSTRANDschen Bedingung) anastigmatisch und orthoskopisch ist, ist die von M. v. ROHR konstruierte Linse des „Veranten" von C. ZEISS. Diese ist bisher nur für schwächere Vergrößerungen ausgeführt und daher bei den Brillen (Lesegläsern) bereits besprochen worden (p. 328).

XII. Das zusammengesetzte Mikroskop.

An sich wäre kein Grund gewesen, auf dem eingeschlagenen Wege nicht noch weiter zu gehen und durch Zusammensetzung des Systems aus mehreren geeignet angeordneten Linsen von verschiedenem Brechungsvermögen und verschiedener Dispersion die sphärischen und chromatischen Fehler nach dem Prinzip der gegenseitigen Kompensation vollständig aufzuheben, ja sogar dies unter Erzielung genügend großer Linsenöffnungen, ganz ebenso wie das in den Objek-

[1] L. EULER, Mém. Acad. Berlin. 20. 105. 1764. — [2] J. HERSCHEL, Phil. Trans. 1821. p. 246. — [3] W. H. WOLLASTON, ibid. 1829. p. 91; POGG. Ann. 16. 176. 1829. — [4] Näheres über diese und die Entwickelungsgeschichte des einfachen Mikroskops überhaupt in den älteren der unten angeführten mikrographischen Werken, insbesondere: H. v. MOHL, Mikrographie, Tübingen 1846, p. 36, und P. HARTING, Das Mikroskop. Braunschweig 1859. I, p. 91—118, u. III. (Geschichte u. s. w. des Mikroskops), p. 569 ff.

tiven der modernen Mikroskope tatsächlich geschieht. In der Tat werden wir bald zeigen, daß diese Objektive im wesentlichen nichts anderes sind als gut korrigierte Lupen (einfache Mikroskope) von kurzer Brennweite und relativ großer Öffnung.

Wenn man sich trotzdem behufs Erzielung hoher Vergrößerungen von jenem Wege abgewandt, und seit den 30er Jahren dieses Jahrhunderts mehr und mehr, seit der Mitte des Jahrhunderts sogar ausschließlich der Benutzung und Vervollkommnung des schon vor nunmehr ca. 300 Jahren erfundenen zusammengesetzten Mikroskops zugewandt hat, so müssen die Gründe hierfür anderwärts zu suchen sein. Als solche Gründe konnten schon zu jener Zeit die folgenden geltend gemacht werden.

Die Vorzüge des zusammengesetzten Mikroskops vor dem einfachen.

1. Durch die Zusammensetzung eines Systems aus zwei anderen, um einen endlichen Abstand getrennten, erhält man nach den auf p. 53 ff. dargelegten Gesetzen ein neues System, dessen Brennweite f in einem beliebigen Verhältnis kleiner ist, als die seiner Bestandteile f_1, f_2, wenn man den Abstand zwischen den einander zugewandten Brennpunkten dieser Partialsysteme, $F_1' F_2 = \Delta$, den Abbe als die optische Tubuslänge bezeichnet, entsprechend groß wählt. Wir fanden auf p. 55 die vordere Brennweite des kombinierten Systems

$$(1) \qquad f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} \quad , \qquad \text{die hintere analog } f' = +\frac{f_1' f_2'}{\Delta} \quad .$$

Man kann hiernach z. B. ein System von 1 mm Brennweite erzielen durch Kombination zweier anderer von je 10 mm Brennweite, deren zugewandte Brennpunkte um 100 mm von einander entfernt sind. Diese Verteilung der dioptrischen Fundamentalwirkung auf zwei Partialsysteme von beiläufig 5—20-fach größeren Dimensionen würde auch unter sonst gleichen Umständen handgreifliche Vorteile schon für die technische Ausführung bieten.

2. Ein anderer praktischer Vorteil, der ohne weiteres mit der Trennung in zwei gesonderte Bestandteile verbunden ist, besteht darin, daß hierdurch das Objekt in größere Entfernung vom Auge und Gesichte des Beobachters gerückt wird. Die großen Unbequemlichkeiten und Beengungen im Gebrauch des Mikroskops, ja sogar die Gefahr, welche unter Umständen für den Beobachter in dessen großer Nähe am Auge beruht (z. B. bei Erwärmung, elektrischer Erregung oder dgl. des Objekts) bedürfen wohl kaum einer weiteren Erläuterung.

3. Nicht nur der Abstand des Objekts vom Auge, sondern auch derjenige von der Vorderfläche des Objektivs wird durch die Zusammensetzung des Mikroskops aus zwei getrennten Bestandteilen und die dadurch ermöglichte Vergrößerung der Dimensionen (Brennweiten) dieser Bestandteile selbst mit vergrößert, — was besonders bei den stärkeren Systemen, von kurzer Gesamtbrennweite, außerordentlich ins Gewicht fällt. Diese Vergrößerung ist einerseits mit derjenigen des Vorderteils des Systems (Objektivs) an sich verknüpft, wenn wir die später näher zu rechtfertigende Annahme gelten lassen, daß dieses für die Erzielung einer gleichartigen Wirkung auch eine im wesentlichen gleiche Konstruktion erhalten müsse, wie ein einfaches Mikroskop. Denn alsdann wird der Abstand der vorderen Brennebene dieses Systems von seiner ersten Fläche mit seinen übrigen Dimensionen einfach mitvergrößert. Die vordere Brennebene des Gesamtmikroskops liegt aber noch vor derjenigen seines Objektivs, wenn der Abstand der zugewandten Brennpunkte von Objektiv und Okular, $F_1' F_2 = \Delta$, positiv ist — was wir hier immer annehmen wollen; denn wir fanden früher die Größe

$$(2) \qquad F_1 F = \sigma = -\frac{f_1^2}{\Delta} \quad ,$$

also liegt F vor F_1, d. h. der freie Objektabstand des ganzen Mikroskops ist noch größer als derjenige seines Vorderteils wäre, wenn dieses für sich als Lupe benützt würde (vgl. Figur 115).

4. Ein weiterer Vorzug des zusammengesetzten Mikroskops liegt darin, daß die Bestandteile desselben gegen andere von abweichender Konstruktion oder Stärke auswechselbar sind, z. B. dasselbe Objektiv mit verschiedenen Okularen benützt werden kann, so daß man mit demselben Objektiv auf sehr bequeme Weise eine Reihe verschiedener Vergrößerungen erzielen kann. Ferner erscheinen die durch das Objektiv allein vermittelten und etwa in dessen hinterer Brennebene auftretenden Lichterscheinungen (Achsenbilder von Kristallen, Diffraktionsspektra) daselbst entsprechend seiner Brennweite vier- bis zehnmal größer als in der Brennebene eines dem ganzen Mikroskop äquivalenten einfachen, sind daher im selben Verhältnis leichter zu beobachten.

5. Die jetzt fast allgemein adoptierte Zusammensetzung des Mikroskops aus zwei getrennten kollektiven Bestandteilen bringt die Erzeugung eines reellen Zwischenbildes vor dem zuletzt beobachteten virtuellen mit sich. Hierdurch wird es möglich, in bequemer Weise dieses Bild aufzufangen, um es entweder einer Messung zu unterwerfen oder photographisch zu fixieren oder — sei es als Ganzes, sei es in seinen einzelnen Bestandteilen — physikalischen Veränderungen zu unterwerfen (Polarisation, spektrale Zerlegung der Farben, Absorption u. s. w.), mittels derer ein Rückschluß auf die Beschaffenheit des Objekts möglich wird. Diesen Möglichkeiten, die sicher noch bei weitem nicht erschöpft sind, verdankt das zusammengesetzte Mikroskop schon jetzt einen nicht geringen Teil seiner tatsächlichen Verbreitung. Sie haben in Verbindung mit den anderen oben genannten für die Schaffung und den Ausbau einer mikrochemischen, mikrophysikalischen, mikrobiologischen, mikrodiagnostischen und ähnlicher Disziplinen die wesentliche Grundlage gebildet.

Die vorstehend genannten Momente, die, wie bemerkt, schon früher geltend gemacht werden konnten, betreffen Vorzüge teils technischer, teils sonstiger praktischer Natur. Sie betreffen nicht die dioptrische Leistung des Mikroskops und würden in gleicher Weise bestehen bleiben z. B. auch bei einer geometrisch vollkommenen Abbildung, wie der im II. Abschnitt dieser Darstellung betrachteten. Der fundamentale Vorzug des zusammengesetzten Mikroskops vor dem einfachen — wie er praktisch natürlich auch schon früher von selbst zur Geltung, aber erst in verhältnismäßig neuer Zeit durch ABBE[1] zu klarer Erkenntnis und in der Konstruktion dieses Instruments zu bewußter methodischer Anwendung gekommen ist — liegt nun gerade darin, daß es eine Erhöhung der optischen Leistungsfähigkeit nach der quantitativen wie qualitativen Seite hin gestattet, d. h. daß es die Abbildung eines größeren Objektstückes und diese in größerer Vollkommenheit ermöglicht, als ein einfaches System gleicher Stärke.

Denn nach den allgemeinen Gesetzen, denen jede optische Abbildung unterworfen ist, ist es schlechterdings unmöglich, die Abbildung einer gegen die Brennweite eines Systems beträchtlichen Objektfläche mit Büscheln zu bewirken, welche auf der Objekt- oder Bildseite sehr große Öffnungen haben. Man kann nur — wie wir bewiesen und woran wir wiederholt erinnert haben — entweder mit Büscheln großer Öffnung ein Objekt abbilden, dessen Dimensionen klein sind gegen die Brennweite des Systems, oder ein relativ großes Objekt, dieses aber nur mittels entsprechend enger Büschel. So

[1] Zuerst ausgesprochen (ohne Beweise) in MAX SCHULTZEs Arch. f. mikr. Anat. **9.** 421; später von demselben weiter ausgeführt im Journ. Roy. Micr. Soc. (2) **2.** 300. 460. 1882; **3.** 790. 1883; auch Ges. Abhandl. **1.** 53. 375. (Übersetzung.) Jena 1904.

lange man daher beim einfachen Mikroskop stehen blieb, war dessen Wirkung notwendig auf die eine oder andere Möglichkeit beschränkt. Wie wir später zeigen werden, beruht nun die Kapazität eines Mikroskops in erster Linie auf der Größe des Öffnungswinkels der vom Objekt aus divergierenden, zum Bilde beitragenden Büschel. Die möglichste Vergrößerung dieses Winkels ist also das erste Postulat bei der Konstruktion des Mikroskops für die Steigerung seiner Wirkung. Andererseits sind die das letzte Bild formierenden und von ihm zum Auge gelangenden Büschel naturgemäß — entsprechend der mittleren Sehweite und Pupillengröße des Auges — sehr enge.

In dem zusammengesetzten Mikroskop ist nun gerade von den Eigentümlichkeiten jener beiden in ihm auftretenden Grenzformen optischer Abbildung — mittels sehr weiter und mittels sehr enger Büschel — Gebrauch gemacht, um zugleich den Forderungen großer Apertur der Büschel und größeren Objektfeldes zu genügen. Denn seine Zusammensetzung hat nicht nur die Teilung und damit erleichterte Leistung der optischen Fundamental-(Vergrößerungs-)Wirkung zum Zwecke — wie man es auszudrücken pflegt: das vom Objektiv entworfene Bild wird vom Okular abermals vergrößert — sondern sie bedeutet vor allem eine Verteilung spezifischer Funktionen auf die beiden Bestandteile des Systems, eine Art Arbeitsteilung innerhalb des Systems, wie sie eben durch die erhöhten Ansprüche an die Leistungen desselben und durch die Natur der dioptrischen Bilder, d. h. der Mittel und Grenzen ihrer Erzeugung unabweislich geboten ist.

Durch das Objektiv wird zunächst eine gegen dessen Brennweite — aber nicht ebenso gegen die des ganzen Mikroskops — kleine Objektfläche mittels weiter Büschel abgebildet. Dieses Bild, in dem die Strahlenbüschel schon entsprechend der in ihm repräsentierten Vergrößerung enger geworden sind, bildet das Objekt für den zweiten Teil des Systems, das Okular, für den daher die Gesetze der Abbildung mittels enger Büschel maßgebend sind. In ihm kann daher ein im Verhältnis zu seiner Brennweite erheblicher Teil jenes ersten Bildes — und zwar dieser unter beträchtlicher Divergenzänderung der Achsen der wirksamen Büschel (der Hauptstrahlen) — weiterer Abbildung unterworfen werden. In etwas schroffer und daher nicht ohne Einschränkung zutreffender Weise drückte Abbe dieses Verhältnis in seiner ersten Abhandlung folgendermaßen aus:

„Im Objektiv erfolgt die Flächenausbreitung des Bildes praktisch so gut wie vollkommen nach den Gesetzen für die Abbildung eines unendlich kleinen Flächenelements; im Okular erfolgt die Divergenzänderung in den einzelnen Lichtbüscheln bis auf unmerkliche Abweichungen so wie an unendlich engen Strahlenbüscheln. Dagegen kommt dort das eigentümliche Moment der Divergenzänderung von Strahlenkegeln großen Öffnungswinkels, hier das eigentümliche Moment der Ausbreitung einer Bildfläche auf großen Bildwinkel zur Geltung. — — In dieser Teilung der dioptrischen Leistung noch viel mehr als — wenn auch in Verbindung mit — den vorher namhaft gemachten Momenten liegt der wahre Grund der notorischen Überlegenheit des zusammengesetzten Mikroskops gegenüber dem besten Simplex auch schon bei solchen Vergrößerungen, die sich ohne alle Schwierigkeit mit dem einfachen Mikroskop erreichen lassen, wenn man die Qualität der Leistung ins Auge faßt." Wie wir später sehen werden, ist eine gewisse Größe der Apertur (des Öffnungswinkels der vom Objekt aus divergierenden Strahlen) erforderlich, damit ein Detail von gegebener Feinheit im Bilde überhaupt wiedergegeben werde, und es ist eine gewisse Ausbreitung dieses Details auf einen bestimmten Sehwinkel notwendig, damit es für das Auge bei der beschränkten Sehschärfe desselben getrennt wahrnehmbar sei. Hierdurch wird der Vollzug dieser beiden Leistungen Grunderfordernis und zugleich Maßstab der Wirkung jedes optischen Instruments. Die Verteilung derselben auf zwei ge-

trennte Bestandteile aber bietet, wie schon hier erkennbar ist, allein die praktische Möglichkeit für die Ausführung der beiden Leistungen, und darin eben liegt ihre prinzipielle Bedeutung.

Die Strahlenbegrenzung und der Strahlengang im Mikroskop.

In der Art der Strahlenbegrenzung und des dadurch bedingten Strahlenganges finden die genannten Momente ihren unmittelbarsten Ausdruck; denn natürlich bedingt die Art der Strahlenbegrenzung ebenso sehr die Art der Wirkung, als umgekehrt eine spezifische Wirkungsweise eine gewisse Art der Strahlenbegrenzung erfordert. Wir betrachten daher zunächst diese.

Die Begrenzung der Apertur. Die Lage der Pupillen. Die Lage der die Öffnung der Strahlenbüschel begrenzenden Blende ist im zusammengesetzten Mikroskop nicht einheitlich und nach bestimmten Gesichtspunkten reguliert. Gemeinsam ist allen Mikroskopen nur dies, daß die Begrenzung der Strahlenbüschel nicht im Okular, sondern im Objektiv oder sogar vor demselben indirekt, im Beleuchtungsapparat stattfindet. (Mit Ausnahme des Falles, daß die Vergrößerung unter der Normalvergrößerung bleibt, wo dann die Apertur durch die Pupille des Auges reduziert wird.)

Nur wenn es sich darum handelt, das vom Objektiv allein entworfene Bild mikrometrischer Messung zu unterwerfen, ist es für deren Genauigkeit, wie wir früher (p. 231) näher ausgeführt haben, vorteilhaft, eine genügend enge Blende in der hinteren Brennebene des Objektivs anzubringen; denn da der Abstand der Pointierungsebene (Mikrometervorrichtung) vom Objektiv durch die Verbindung beider mit dem Tubus mechanisch festgelegt ist, so bleibt nur derjenige des Objekts vom Objektiv einer Variabilität unterworfen. Es muß daher der Strahlengang nach der Objektseite hin telezentrisch gemacht werden. Andererseits kann man bei solchen Messungen meist auf die Forderung großer Öffnungswinkel verzichten, die für die sonstige Anwendung des Mikroskops, zur Beobachtung fein strukturierter Objekte, und daher auch für seine Konstruktion wesentlich ist. Jene Einrichtung fällt daher eigentlich etwas außerhalb des Rahmens unserer jetzigen Diskussion.

Bei den stärkeren Mikroskopen findet die Begrenzung der Strahlenbüschel oft an deren Frontlinse statt, die infolge ihrer eigentümlichen Beschaffenheit (halbkugelig oder selbst überhalbkugelig) der Apertur von selbst eine Grenze setzt. In anderen Fällen kann die Blende durch den Rand irgend einer der auf die Frontlinie folgenden Linsen vorgestellt oder zwischen denselben eigens vorgesehen sein. Wir wollen diesen letzteren Fall als den allgemeinsten ins Auge fassen.

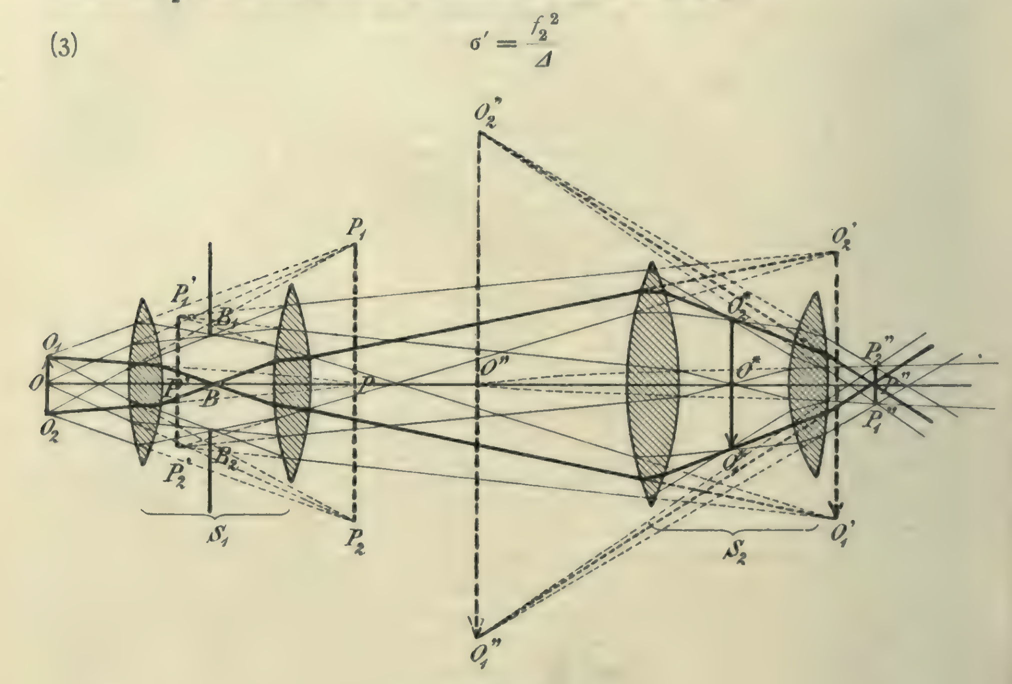
Der sich dann ergebende Strahlengang ist in Figur 116 schematisch dargestellt. Die Lage der Eintritts- und Austrittspupille sowohl für das Objektiv ($P_1 P_2$, $P_1' P_2'$) als für das Okular ($P_1' P_2'$, $P_1'' P_2''$) ergibt sich dann nach den allgemeinen früher aufgestellten Regeln. Die Lage der E.-P., $P_1 P_2$, hinter dem Objektivsystem S_1, wie in der Figur 116 dargestellt, ist nach dem eben bemerkten nur zufällig; diese Lage hängt vielmehr ganz von der Stellung der wirksamen Blende, $B_1 B_2$, gegen den ihr vorangehenden Teil des Objektivsystems ab. Im allgemeinen aber ist es vorteilhaft, wenn die E.-P. nicht allzunah am Objekt liegt, damit die Hauptstrahlen der von dessen Punkten ausgehenden Büschel $O_1 P$, $O_2 P$ keine erheblichen Neigungen gegen einander erhalten und damit nicht durch die mit einer solchen verbundene perspektivische Verkürzung der E.-P. — von den seitlich liegenden Objektpunkten aus gesehen — eine entsprechende Verminderung der Apertur der von ihnen ausgehenden Strahlenbüschel eintrete. Dieser Bedingung ist bei stärkeren Systemen stets hinreichend genügt, da infolge des nach dem Sinus des halben Öffnungswinkels zu bemessenden photometrischen Wertes schiefer Strahlen die optische Schwerpunktslinie hier auch bei ganz nahe gelegener E.-P. dennoch nahezu parallel der Achse wird.

Die Austrittspupille des gesamten Systems, $P_1'' P_2''$, ist dann das vom Okular S_2 entworfene Bild der für das Objektiv S_1 allein wirksamen, $P_1' P_2'$. Da die letztere sich stets vor der vorderen Brennebene des Okulars befindet —

und zwar meist ebenfalls in der Nähe des Linsensystems selbst, also in beträchtlicher Entfernung vom Okular — so liegt die Austrittspupille des ganzen Systems hinter der zweiten Brennebene des Okulars. Wenn also die letztere im zugänglichen Teile des Bildraumes (hinter der letzten Okularlinse) liegt, so ist dies mit der A.-P. des Systems um so mehr der Fall.

Wenn z. B. das Objektiv telezentrisch ist, seine A.-P. sich in seiner hinteren Brennebene befindet, so fällt diejenige des ganzen Systems zusammen mit der hinteren Brennebene desselben, F' und ist von der hinteren Brennebene des Okulars, F_2', um eine Strecke σ' entfernt, welche nach p. 55

$$\sigma' = \frac{f_2^2}{\Delta} \tag{3}$$



Figur 116.
Der Strahlengang im Mikroskop.

ist. Sehr annähernd wird dies immer der Fall sein, da die Entfernung Δ an sich schon beträchtlich groß zu sein pflegt (150—300 mm), so daß eine mäßige Abweichung der A.-P. des Objektivs von F_1' keinen erheblichen Einfluß auf die Lage der A.-P. des ganzen Systems ausübt.

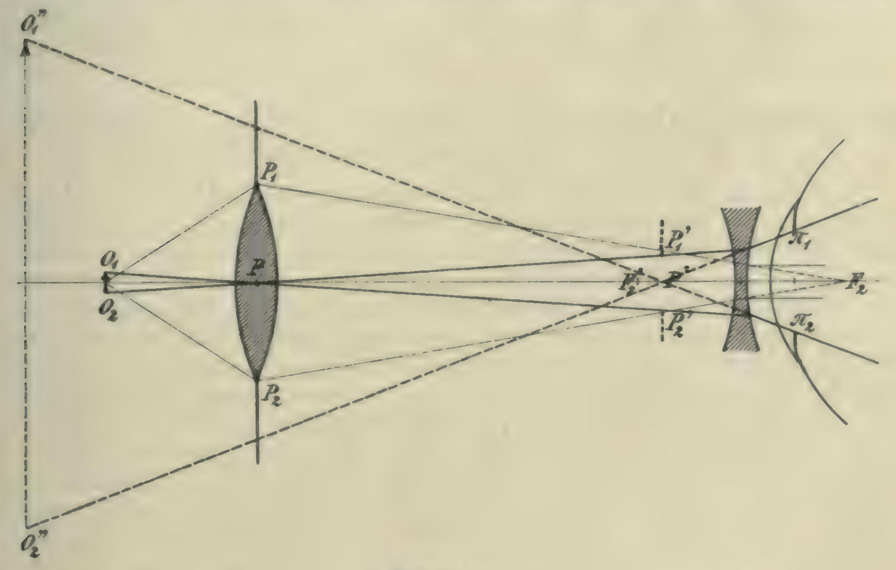
Bei Objekten, welche nicht selbstleuchtend sind, sondern von einer anderen Lichtquelle beleuchtet werden, kann — wie wir früher bereits hervorgehoben — diese nach Lage und Größe maßgebend werden für die Apertur der wirksamen Büschel. Es kann diese Lichtquelle entweder durch regelmäßige Brechung in einem zwischen ihr und dem Objekt befindlichen optischen System (Beleuchtungsapparat) in eine solche von anderer Lage und Größe verwandelt werden, oder es kann das von ihr bezw. ihrem Bild ausgegangene Licht in dem Objekt noch weitere Richtungsänderungen durch Brechung und Beugung erfahren — für die Apertur der wirksamen Büschel ist immer diejenige Lichtverteilung maßgebend, welche unter Berücksichtigung dieser Verhältnisse, d. h. tatsächlich, in dem Raume zwischen Objekt und erster Linsenfläche statt hat. Je nachdem diese Lichtausbreitung — für je einen Punkt des Objekts als Konvergenzpunkt — den Gesichtswinkel der E.-P., von demselben Punkt aus gesehen, überschreitet oder nicht, ist diese E.-P. oder jene

durch die Beleuchtungsverhältnisse gegebene Lichtausbreitung maßgebend für die wirksame Öffnung der Büschel.

Die Begrenzung des Sehfeldes. Diese erfolgt bei zusammengesetzten Systemen, umgekehrt wie die der Apertur, fast stets im Okular und zwar an derjenigen Stelle ($O_1^* O_2^*$), wo vor dem Okular oder innerhalb desselben ein reelles Bild des Objekts zustande kommt. Die E.-L. (Eintrittsluke, p. 214) ist dann das Bild jener physischen Blende wie es durch den ihr vorangehenden Teil des Systems nach der Objektseite hin entworfen würde; die A.-L. das Bild derselben Blende, von dem ihr nachfolgenden Teil des Systems nach dem Bildraum hin projiziert. In diesem wie in jenem Raume fällt sie also mit dem (ebenen) Objekt oder dem Bilde selbst zusammen, d. h. es findet hier eine **scharfe Begrenzung des Sehfeldes** statt.

Mikroskope mit negativem Okular (mit aufrechten Bildern).

Eine Ausnahme hiervon macht nur der Fall, daß das Okular nach dem Typus der einfachen Dispansivlinse konstruiert ist; alsdann kommt ein reelles Bild des Objekts nirgends zustande. Die das Bild formierenden Strahlenbüschel (Figur 117) sind in diesem Falle



Figur 117.
Der Strahlengang im Mikroskop mit negativem (einfachem) Okular.

begrenzt einerseits durch die Pupille des Auges $\pi_1 \pi_2$, andererseits durch das von dem Okular entworfene virtuelle Bild $P_1' P_2'$ der Objektivöffnung (E.-P.) $P_1 P_2$. Das Bild — wo dasselbe auch zustande kommen möge — wird vom Auge durch jenes Bild der Objektivöffnung wie durch ein physisches Diaphragma hindurch gesehen. Die Verhältnisse sind dann im Bildraume dieselben, wie wir sie bei den Lupen und einfachen Mikroskopen betrachtet haben. Je nachdem die Augenpupille oder das Objektivbild größer ist, wirkt die erstere als Gesichtsfeldblende und das letztere als Aperturblende oder umgekehrt. Bei den stärker vergrößernden nach diesem Typus konstruierten Mikroskopen ist das eine, bei den schwächer vergrößernden (CHEVALIER-BRÜCKEsche Lupe) das andere der Fall.

Der Vorzug der Anwendung eines solchen Okulars beruht einmal darin, daß dasselbe, $(f_2) > (f_1)$ vorausgesetzt, eine positive Gesamtbrennweite des ganzen Systems ergibt, also bei der hier gedachten Art des Gebrauches aufrechte Bilder. Außerdem darin, daß bei gegebenen Brennweiten von Objektiv und Okular und gegebenem Abstand derselben von einander — beide als dünne Linsen gedacht — eine etwas stärkere Vergrößerung resultiert oder bei gegebener Vergrößerung ein etwas kleinerer Abstand der Linsen von einander als bei positiver Okularlinse. Beide Umstände machen den Gebrauch derartiger Mikroskope vorteilhaft für Zwecke wie das Praparieren unter mäßigen Vergrößerungen (bis höchstens 100-fach). Für die weit

überwiegenden Anwendungsfälle des Mikroskops bedeutet die oben bezeichnete Art der Strahlenbegrenzung und die mit ihr verbundene Einschränkung des Sehfeldes eine Erschwernis, die durch jene Vorteile in keiner Weise aufgehoben, ja kaum gemildert wird. Wir wollen daher diese Einrichtung des Mikroskops nicht weiter berücksichtigen, sondern den weiteren Betrachtungen diejenige mit kollektivem Okular als die normale und typische zugrunde legen.

Man würde die genannten Übelstände zwar vermeiden können, ohne den Vorteil, den aufrechte Bilder manchmal bieten, preiszugeben, indem man — wie beim Fernrohr — zwar ein dispansives Okular anwendetete (mit negativem f) aber ein solches, welches seinerseits nach Art des ganzen Mikroskops zusammengesetzt ist aus zwei Teilen, die ähnlich wie bei diesen Objektiv und Okular repräsentieren (dies aber nur in bezug auf die dioptrische Fundamentalwirkung nicht in bezug auf die oben bezeichneten spezifischen Funktionen, in welchen vielmehr beide Teile Okulare vorstellen) und die beide kollektiv sind, daher bei entsprechendem Abstand von einander negative Gesamtbrennweite und außerhalb des Systems liegende Brennpunkte besitzen. Ein solches zusammengesetztes negatives (bildaufrichtendes) Okular würde im wesentlichen ebenso wirken, wie ein entsprechendes kollektives. Sein Augenpunkt würde im zugänglichen Teile des Raumes liegen, das Auge also mit ihm in Koinzidenz gebracht werden können; das Bild würde an einer, ja sogar an zwei Stellen reell und infolgedessen scharf begrenzbar sein und vom Auge in seiner ganzen Ausdehnung übersehbar. Doch werden solche Okulare wegen ihrer gewöhnlich 2—3-fachen Länge und der etwa doppelten Anzahl der in ihnen wirksamen, daher auch partiell reflektierenden Flächen sehr selten verwendet.

Die Bildaufrichtung kann jedoch ohne Abänderung des bei einem kollektiven Okular stattfindenden Strahlenganges durch Prismen ausgeführt werden (AMICIsches Prisma, von NACHET über, dann zwischen den beiden Okularlinsen angebracht; PORROsche Prismen, im stereoskopischen Mikroskop nach GREENOUGH von C. ZEISS verwendet). Diese Prismen werden im Kapitel über die Fernrohre beschrieben werden.

Die Funktionen des Objektivs und Okulars in bezug auf den Strahlengang und die Divergenzänderung in den abbildenden Büscheln.

Auf Grund der obigen Festsetzungen läßt sich nunmehr der Strahlengang im Mikroskop vollständig konstruieren: Das Objektiv entwirft von dem Objekt ein reelles vergrößertes Bild $O_1' O_2'$ nahe dem oder im vorderen Brennpunkt des Okulars; das Okular bildet dieses zum zweiten Mal nach $O_1'' O_2''$ ab in einer Entfernung, die dessen Abstand von seinem vorderen Brennpunkt, d. h. indirekt der Sehweite des Beobachters entspricht, jedenfalls aber in relativ großer Entfernung von seinem hinteren Brennpunkte. Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen: in unendlicher Entfernung, da die Abweichungen von diesem Fall durch Einführung kleiner Korrektionsglieder berücksichtigt werden können und das Wesen der Sache nicht berühren. Mit der Erzeugung des ersten Bildes F_1' in einer Entfernung Δ von etwa 200 mm vom hinteren Brennpunkt des Systems S_1 ist zunächst eine lineare Vergrößerung und damit eine Divergenzänderung in den abbildenden Büscheln verbunden, die desto stärker ist, je kürzer die Brennweite von S_1 ist; denn es ist

$$\frac{y'}{y} = \beta = -\frac{\Delta}{f_1} \tag{4}$$

und, wenn die Bedingung aplanatischer Abbildung in diesem System erfüllt ist,

$$\frac{\sin u'}{\sin u} = \gamma = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\beta} \tag{5}$$

Je stärker also die vom Objektiv allein hervorgebrachte Linearvergrößerung ist, desto stärker ist auch die Reduktion der Öffnungswinkel der abbildenden Büschel. Da man, wie wir später sehen werden, eine Zunahme der Objektivvergrößerung stets mit einer solchen der Apertur der einfallenden Büschel verbindet, so heben sich diese beiden Momente nahezu auf, insofern die Apertur der vom Objektiv austretenden, das erste Bild erzeugenden Büschel in allen Mikroskopen nahezu von gleicher Größe oder wenigstens von gleicher Größenordnung ist. Sie beträgt ungefähr $^1/_{20}$ (ca. 3^0), ist also bereits absolut genommen sehr gering.

Mit der Abbildung durch das Okular ist eine weitere Divergenzänderung der abbildenden Büschel verbunden, sei es, daß dieselben parallelstrahlig gemacht werden (für ein auf unendlich akkommodiertes Auge), sei es, daß sie diejenige stets geringe Öffnung behalten, welche der Sehweite des Auges und dessen Pupillengröße entspricht (höchstens 1°). Für parallelstrahlig austretende Büschel ist diese Divergenzänderung bestimmt durch die Brennweite des Okularsystems, indem gemäß der Definition derselben der halbe Querschnitt des austretenden Büschels p'' sich zum Tangens des halben Öffnungswinkels der einfallenden verhält wie die Brennweite zur Einheit, d. h.

$$(6) \qquad \frac{p''}{\operatorname{tg} u'} = \frac{p''}{u'} = f_2 \quad .$$

Insoweit würde die Zusammensetzung des Mikroskops aus zwei getrennten Bestandteilen noch nichts Spezifisches bieten, was nicht auch mit jeder anderen sukzessiven Abbildung notwendig verbunden wäre. Wenn wir aber den Gang der Hauptstrahlen im Mikroskop auf Grund der obigen Bestimmung über die Lage der Pupillen betrachten, so bemerken wir, daß die Hauptstrahlen auf der Objektseite im allgemeinen sowohl divergierend als konvergierend verlaufen können, beides aber, wie wir bemerkt haben, vorteilhaft nur unter geringen Winkeln. Auf der Bildseite werden dieselben aber nach dem Bilde hin stets von P' aus divergieren, also z. B. bei telezentrischer Einrichtung etwa von dem hinteren Brennpunkt F_1' des Objektivs aus. Um dieses Bild dem Auge in möglichster Ausdehnung sichtbar zu machen, ist es, wie wir früher gezeigt haben, notwendig, die Augenpupille in den Divergenzpunkt der Hauptstrahlen zu bringen, und da dies bei der Abbildung durch das Objektiv allein nicht ausführbar ist (es sei denn für ein stark übersichtiges Auge), so fällt dem Okular als eine zweite und für seine Konstruktion spezifische Funktion die zu, die vom Objektiv aus divergierenden Hauptstrahlen in konvergierende zu verwandeln und zwar nach einem Konvergenzpunkt hin, welcher für das Auge zugänglich ist. Diese Funktion hat also das Okular beim Fernrohr wie beim Mikroskop auch dann schon zu erfüllen, wenn mit demselben eine weitere Vergrößerung des vom Objektiv entworfenen Bildes gar nicht bezweckt und erzielt wird und dies ist der hauptsächliche Grund, aus welchem die einfache Dispansivlinse so wenig geeignet ist, als Okular verwendet zu werden. Denn bei ihr ist mit der für die Bilderzeugung notwendigen Divergenzvermehrung der bildformierenden Büschel gleichzeitig stets eine solche der Hauptstrahlen verbunden, ohne daß der Divergenzpunkt selbst in den zugänglichen Teil des Bildraumes übergeführt würde. Man mildert diesen Übelstand, indem man dergleichen Okulare von sehr kurzer Brennweite macht und gleichzeitig ihre Entfernung vom Objektiv relativ gering wählt. Alsdann liegt ihr hinterer Brennpunkt, wenn auch unterhalb der Okularlinse, so doch — der Verringerung ihrer Dimension entsprechend — näher an derselben und die A.-P. als Bild der Objektivöffnung von jenem zweiten Brennpunkt desto weiter nach der Linse zu, je näher dem Okular sich das Objektiv befindet.

Beim kollektiven Okular hingegen tritt gewöhnlich innerhalb desselben noch eine weitere Teilung der Funktionen dahin ein, daß in einem Vorderteil (Kollektivglas) der wesentliche Teil jener Divergenzänderung der Hauptstrahlen bewirkt, d. h. deren Divergenz in eine Konvergenz verwandelt wird. Hierbei wird das vom Objektiv entworfene Bild in seiner Größe entweder unverändert gelassen (Ramsdensches Okular) oder sogar verkleinert (Huygenssches Okular). Dann bewirkt eine zweite in diesem Augenpunkt oder nahe vor demselben befindliche Linse (die Augenlinse) die eigentliche Lupenwirkung, nämlich die Projektion jenes Zwischenbildes $O_1^* O_2^*$ auf eine innerhalb der Sehweite gelegene Distanz, wobei

die Divergenz der Hauptstrahlen nicht in erheblichem Grade und eventuell nur in förderlichem Sinne modifiziert, d. h. nur vermehrt wird.

Die genannten beiden Modifikationen: die Divergenzänderung in den bildformierenden Strahlenbüscheln und diejenige der Achsen (Hauptstrahlen) weisen den beiden Bestandteilen des Mikroskops ihre Funktionen in der früher angegebenen Weise bereits vollständig zu: das Objektiv, nach Art eines Projektionssystems wirkend, hat die Abbildung von Büscheln großen Öffnungswinkels zu vollziehen, und damit ist nach unseren früheren allgemeinen Festsetzungen von selbst gegeben, daß diese Abbildung sich nur auf ein gegen seine Brennweite kleines Flächenstück beziehen kann und daß sie infolge dessen — je kleiner die Objektfläche mit desto größerer Annäherung — in diesem, was die Maßverhältnisse betrifft, nach den Gesetzen der kollinearen Abbildung erfolgt, also insbesondere ohne weiteres geometrische Ähnlichkeit des Bildes mit dem Objekte mit sich bringt. Das Okular hat es mit sehr viel engeren Strahlenbüscheln zu tun und ist infolgedessen imstande, ein im Verhältnis zu seiner Brennweite größeres Objekt, d. h. einen größeren Teil des vom Objektiv entworfenen Bildes, abzubilden, läßt aber z. B. für die Anomalien der Vergrößerung völlig freien Spielraum.

Die Anforderungen an die dioptrischen Leistungen von Objektiv und Okular.

In dem Objektiv oder dem von ihm entworfenen Bilde steht daher die Erfüllung der Bedingungen des Aplanatismus in erster Linie, also

1. die Aufhebung der sphärischen Aberration in den konjugierten Punkten O und O',
2. die Herstellung konstanten Sinusverhältnisses in den abbildenden Büscheln auf der Objekt- und Bildseite,
3. bei dioptrischen Systemen die Aufhebung der chromatischen Fokusdifferenz (Koinzidenz der Bildpunkte für verschiedene Farbe an derselben Stelle der Achse) und dies, wenn möglich,
4. unter gleichzeitiger Aufhebung der sphärischen Aberration auch für diese verschiedenen Wellenlängen (Beseitigung der chromatischen Differenz der sphärischen Aberration) und
5. die Herstellung des Aplanatismus für verschiedene Wellenlängen.

Beim Okular andererseits werden hauptsächlich die auf die außeraxialen Bildpunkte bezüglichen Abbildungsfehler in Betracht kommen und demnach aufzuheben sein, also

1. die Anomalien der Vergrößerung (Disproportionalität der Vergrößerung in verschiedenen Teilen des Sehfeldes, Verzeichnung),
2. der Astigmatismus und eventuell auch die Koma in den schiefen Büscheln,
3. die Verschiedenheit der Vergrößerung (Brennweite) für die verschiedenen Farben, die gegebenen Falls sogar unter Kompensation der in dieser Beziehung im Objektivbilde vorhandenen Defekte aufzuheben ist.

(Es würde nach Analogie der für die Abbildung durch Lupen geltenden Bedingungen hier noch die Aufhebung der Bildwölbung anzuführen sein. Wie aber eine genauere Betrachtung zeigt, sind die vom Objektiv bei großer Apertur desselben entworfenen Bilder in einiger Entfernung von der Achse meist schon so stark gewölbt, daß eine ebene Abbildung durch das Okular allein ohne Nutzen wäre, eine Kompensation aber jenes Fehlers durch das Okular außerhalb des Bereiches der Möglichkeit liegt.)

Die Aberrationen weitgeöffneter Büschel.

Entsprechend der großen Apertur der Büschel, welche auf der Objektseite des Mikroskops zur Wirkung kommen, gewinnen in dem vom Objektiv entworfenen Bilde alle von dieser Apertur abhängigen Aberrationen unvergleichlich größere Bedeutung als in irgend einem anderen optischen System; denn während in photographischen Objektiven und im Fernrohr die Öffnung höchstens den dritten Teil der Brennweite beträgt, ist sie in den modernen Mikroskopobjektiven umgekehrt bis auf das 2,5- ja selbst 3-fache jener gesteigert. Für die Konstruktion des Mikroskops und die Beurteilung der von ihm entworfenen Bilder sind daher die einfachen Begriffe von sphärischer und chromatischer Aberration, wie sie aus den Näherungsformeln — unter Berücksichtigung nur des ersten Gliedes der Reihenentwickelung — entnommen werden und vor der Existenz dieser starken Systeme allein Anwendung fanden, durchaus unzulänglich. Es gewinnen vielmehr weitaus überwiegende Bedeutung die von den höheren Potenzen jener Reihenentwickelung abhängigen Glieder der Aberration, die von ihrem Anwachsen, mit der zunehmenden Neigung der Strahlen gegen die Achse, einen sehr ungleichen Gang befolgen.

Eine Aufhebung der ersten Glieder würde aber in einem Mikroskopobjektiv von auch nur mäßiger Apertur gar nichts besagen, da dann im allgemeinen die von den höheren Potenzen abhängigen Glieder immer noch Beträge haben, wie sie z. B. mit Fernrohrobjektiven (der Apertur 0,1 etwa) in den ersten Gliedern nicht einmal absichtlich erreichbar sind. Sobald der Öffnungswinkel über einen ganz geringen Betrag hinausgeht, kann die Ausgleichung der sphärischen Aberration nicht anders erfolgen als dadurch, daß die nicht aufhebbaren höheren Glieder durch absichtlich herbeigeführte Reste der niederen kompensiert werden — ein Ausgleichungsverfahren, das wir p. 121 u. 152 besprochen haben und bei dem nur noch die trigonometrische Verfolgung oder experimentelle Isolierung genügend vieler das System in verschiedenen Zonen (unter verschiedener Anfangsneigung) durchsetzender Strahlen oder Partialbüschel die nötigen Unterlagen für die Beurteilung des Effektes bietet.

Das Anwachsen des unvermeidlichen Restes, den diese Kompensation wegen des ungleichen Ganges der einzelnen Teile notwendig übrig läßt, bestimmt die Grenze, welche dem Öffnungswinkel gesetzt werden muß, wenn jenes Defizit im mikroskopischen Bilde ohne schädliche Wirkung bleiben soll.

Aus dem gleichen Grunde — wegen der Höhe der wirksamen Apertur — ist von den chromatischen Abweichungen von geringerer Bedeutung die fundamentale, aus der Variation aller Abbildungsfaktoren mit der Wellenlänge entspringende Fokusdifferenz für verschiedene Farben. Diese ist ja, wie wir früher sahen, schon mit einem aus zwei Einzellinsen zusammengesetzten System stets aufhebbar. Auch das sekundäre Spektrum würde sich — als Fokusdifferenz irgend einer Zone — stets heben lassen, wenn geeignete Substanzen als Material für die Linsen zur Verfügung stehen. Von wesentlich größerem Einfluß auf die Bildqualität ist vielmehr die früher (p. 180) als chromatische Differenz der sphärischen Aberration bezeichnete Variation der letzteren mit der Wellenlänge. Ihre Beseitigung — früher mit den zur Verfügung stehenden Glasarten unausführbar, erst seit 1886 durch die von der Jenaer Glasschmelzerei hergestellten neuen Gläser möglich geworden — bildete eins der wesentlichsten Hindernisse für eine gute Wirkung der Systeme größeren Öffnungswinkels. Wir haben dieselbe nach ihrem allgemeinen Charakter a. a. O. bereits gekennzeichnet. Auf die sphärische Aberration bezogen wird das Resultat dies, daß wenn dieselbe für eine Wellenlänge im allgemeinen aufgehoben (oder doch möglichst ausgeglichen ist) für kürzere Wellenlänge sphärische Über-, für längere Unterkorrektion in

dem Bildpunkte besteht. Faßten wir diesen Defekt, wie früher, als eine sphärische (Zonen-)Differenz der chromatischen Aberration auf, so war ersichtlich, daß bei unvollständiger Aufhebung dieser Differenz ihr Einfluß auf die Bildqualität am meisten gemildert wurde, wenn man die beste Korrektion (Aufhebung der Fokusdifferenz) in eine zwischen Rand und Mitte des Systems befindliche Zone verlegte, d. h. sie in einem unter mittlerem Einfallswinkel vom Objekt aus divergierenden Partialbüschel bewirkte. Ist dies der Fall, so sind die unter größeren Einfallswinkeln verlaufenden Strahlen chromatisch über-, die unter geringeren Winkeln das System passierenden chromatisch unterkorrigiert. Erst in den „apochromatischen“ nach Berechnungen von ABBE durch die ZEISSsche Werkstätte in Jena hergestellten Objektiven ist dieser Defekt und zugleich das sekundäre Spektrum — folglich auch dieses für alle Zonen — beseitigt worden.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich als ein allgemeines Resultat, daß die Aberrationen, welche dem Zustandekommen scharfer Bildpunkte eines guten Bildes in der Achse und in ihrer unmittelbaren Nähe hinderlich sind, die Möglichkeit ihrer Kompensation nur dort bieten, wo sie ihren Ursprung nehmen, nämlich in denjenigen Teilen des Systems, wo die von je einem Objektpunkt divergierenden Strahlen große Neigungswinkel mit der Achse bilden, Neigungswinkel von gleicher Größenordnung wie im Objektraum oder wie an der Stelle ihrer maximalen Divergenz. Dies ist — wenn das Objektiv auch nur eine mäßige Divergenzänderung (Vergrößerung) herbeiführt, der Fall nur in diesem selbst und auch in ihm nur in seinen vordersten (untersten) Linsen. In dem Okular, in das die Büschel schon als relativ und absolut enge eintreten, und das sie als noch engere verlassen, verlieren in diesen Büscheln die wichtigsten Faktoren der Bilddeterioration gänzlich den Boden. Innerhalb so geringer Öffnungswinkel ist die Möglichkeit eines erheblichen Variierens der Strahlenvereinigung überhaupt — noch viel mehr die einer variablen Abstufung derselben — und infolgedessen auch die Möglichkeit einer Kompensation derartiger im Objektivbild etwa noch vorhandener Defekte vollständig ausgeschlossen. Die geringen hier erreichbaren Gesamtbeträge der (ersten Glieder der) sphärischen und chromatischen Abweichung sind allemal schon im Objektiv durch minimale Änderungen seines Baues aufhebbar und werden daher im allgemeinen auch am besten schon in diesem kompensiert.

Umgekehrt verhält es sich mit den Eigenschaften oder Fehlern der Bilder außer der Achse. Für ihr Anwachsen, ihre Variabilität und Kompensation fehlt in dem Objektiv — wegen der geringen Divergenzänderung der Hauptstrahlen in ihm — die praktische Unterlage. Nur die chromatische Differenz der Vergrößerungen (Brennweiten) kann in seinem Bilde merklich werden. Aber es kann dann sowohl diese als etwa restierende Mängel in der Orthoskopie im Okular gehoben werden (beide jedoch auch nur, wenn sie konstant sind für alle Zonen des Objektivs!), das seinerseits bei der großen Verschiedenheit und dem großen Betrage der Neigungen der Hauptstrahlen in ihm auch genügenden Spielraum für die Modifikationen derselben bietet. —

Wenn es möglich wäre, die Aberrationen, insbesondere diejenigen des Objektivs für Achsenpunkte, vollständig, restlos aufzuheben, und wenn ferner die Technik der Herstellung vollkommener Flächen, vollkommen korrekter Zentrierung und Distanzierung derselben keine Grenzen hätte, so würde auch nach den vorstehend erörterten Gesichtspunkten die Verteilung der optischen Fundamentalwirkung und damit der spezifischen Funktionen auf Objektiv und Okular, zwar an sich notwendig, aber ihrem Maße nach völlig unbestimmt bleiben. Eine vorgeschriebene Brennweite und Vergrößerung würde mit ganz gleichem Fug und Recht auf die verschiedenste Weise erreicht werden können durch Verfügung über die Einzelbrennweiten von Objektiv und Okular sowie

deren gegenseitigen Abstand. Sind je zwei dieser Elemente gegeben, so bestimmt sich aus Gleichung (1) ohne weiteres die Dimension des dritten.

Tatsächlich gebietet aber das Vorhandensein jener beiden Defekte — die mit der fortschreitenden Entwickelung der praktischen Optik nach Theorie und Technik wohl mehr und mehr reduziert, aber natürlich niemals völlig beseitigt werden können — gewisse Einschränkungen und gibt bestimmte Normen für das Maß der Wirkungsverteilung an die Hand. Die Unterlagen für eine solche werden gegeben einerseits natürlich durch eine genaue Kenntnis der Technik und ihrer Leistungsfähigkeit. Es zeigt sich, daß die Anforderungen, die an das Mikroskop nach der dioptrischen Seite hin gestellt werden, bereits bis an die Grenzen des von Menschenhänden zu leistenden führen, daher bei Erwägungen der vorliegenden Art volle Berücksichtigung verdienen. Den Schlüssel aber für diese optischen Leistungen bezw. Anforderungen bietet mit und neben den rein dioptrischen Momenten

Der Begriff der **Apertur** in Verbindung mit dem Sinussatz.

Wir haben von demselben schon wiederholt Gebrauch gemacht, indem wir ihn zuerst durch ein approximatives, sodann durch ein strengeres Maß definierten.

1. Wir sahen auf p. 115, daß die sphärische, und ebenso auf p. 172, daß die chromatische Aberration — rationell bemessen nach ihrem Einfluß auf die Sichtbarkeit des Objekts — proportional ist Potenzen des Produkts aus halbem Öffnungswinkel der vom Objekt aus oder nach dem Bilde hin divergierenden Büschel (bei unendlich fernem Objekt statt des Öffnungswinkels das Verhältnis von halber linearer Öffnung und Brennweite) und Brechungsexponent des Objekt- bezw. Bildmediums. Dort blieb wegen der absoluten Kleinheit des Winkels allerdings noch unbestimmt und willkürlich, ob man denselben nach seinem Sinus, der Tangente oder dem Bogenwert selbst zu bemessen habe. Hingegen fanden wir weiterhin

2. daß die Bedingung einer Abbildung mittels weitgeöffneter Büschel bestand in der Herstellung konstanten Verhältnisses der Sinus konjugierter Strahl-Achsen- (halber Öffnungs-)winkel innerhalb der ganzen Büschelöffnung. Dieses Verhältnis multipliziert mit den Brechungsexponenten der zugehörigen Medien, d, h. das Verhältnis der numerischen Aperturen, bemaß die lineare Vergrößerung

$$\frac{n \sin u}{n' \sin u'} = \frac{a}{a'} = \beta \quad .$$

3. Eine unmittelbare Konsequenz dieses Sinussatzes war, daß die lineare Halböffnung p' eines aplanatisch abbildenden Büschels in der einen Brennebene des Systems bis auf kleine Korrektionsglieder gleich war dem Produkt von Apertur des Büschels und Brennweite des Systems auf der anderen Seite des Systems

$$p' = a \cdot f \quad .$$

4. Dieser Satz gab dann die Unterlage für die Bestimmung der Helligkeitsverhältnisse der Bilder in optischen Systemen. Die Beleuchtungsstärke eines Bildes zeigte sich, bei gegebener Vergrößerung proportional dem Quadrate der Apertur der wirksamen Büschel

$$B = k \cdot a^2 \quad \text{bezw.} \quad = k\, a'^2 \quad .$$

5. Es zeigte sich endlich, daß das Bild, was den Einfluß der Strahlenbegrenzung auf dasselbe betrifft, sich in allen Stücken genau so verhält, als wenn das von diesem Einfluß frei gedachte Bild durch ein physisches Diaphragma betrachtet würde, dessen freie Öffnung nach Größe und Lage mit der Austritts-

pupille ($2p'$) des Systems zusammenfällt. Dieser Satz gab außer der obigen Bestimmung der Helligkeit auch die Unterlagen für diejenige des Prozeßes der Bilderzeugung nach ihrem physischen Charakter als eines Interferenzphänomens — sei es bei selbst-, sei es bei indirektstrahlenden Objekten — dessen wir auch schon gedacht haben (p. 16 und 247).

Wir führen hier nur die folgenden für unsere nächsten Betrachtungen wesentlichen Ergebnisse an[1]:

a) Bei selbstleuchtenden Objekten bildet die Apertur das Maß für die Größe des Lichtscheibchens, als welches jeder Punkt des Objekts durch die Beugungswirkung der Öffnung (Begrenzung der bildformierenden Wellenfläche) im Bilde dargestellt wird — diese Größe des Scheibchens angular, vom hinteren Knotenpunkte des Systems aus gemessen. Infolgedessen bildet die Apertur hier ohne weiteres das Maß für das sogen. Definitions- und für das Auflösungs-(Unterscheidungs-)vermögen des Systems.

b) Bei indirekt strahlenden, mittels auf- oder durchfallenden Lichts beleuchteten, dieses Licht reflektierenden oder durchlassenden Objekten bildet die Apertur die Begrenzung des von diesen Objekten ausgehenden Interferenz- oder Beugungseffekts. Die genauere Analyse zeigt, daß auch dann ein einzelner Objektpunkt und die Punkte der Begrenzung eines nicht weiter differenzierten Objektflächenstücks abgebildet werden als Scheibchen, in welchen die Lichtabstufung von der Mitte nach dem Rande zwar nicht demselben, aber einem ähnlichen Gesetze folgt, wie bei einem selbstleuchtenden Punkte. Die Grenze der Auflösbarkeit einer regelmäßigen Struktur bestimmt sich bei sogen. schiefer Beleuchtung nach derselben Gleichung, die für eine ebensolche selbstleuchtende Struktur gilt, daß nämlich die Feinheit (Elementdistanz d) dieser Struktur mit der Apertur a und der Wellenlänge des wirksamen Lichtes λ in dem Zusammenhang steht, daß

$$d = \frac{\lambda}{2a} \quad .$$

Bei unregelmäßigen Strukturen dieser Art bestimmt die Apertur ebenfalls das Maß der Ähnlichkeit oder Unähnlichkeit, mit welcher sie im Bilde wiedergegeben werden, jedoch nach weniger einfachen Regeln.

Nur noch einige weitere Schritte führen uns jetzt zu dem Standpunkt, von welchem aus wir das Maß und die Grenzen der Wirkung des zusammengesetzten Mikroskops — und nach ganz gleichen Normen diejenigen des Fernrohrs — als eines Ganzen wie in seinen einzelnen Bestandteilen vollständig zu übersehen vermögen.

Die erste Grundlage für die Konstruktion eines Instruments bilden die Anforderungen, die man an seine Gesamtleistung stellt, also beim Mikroskop die Feinheit des Details, welches mit demselben erkennbar sein soll. Sei dieselbe gegeben durch den Abstand d der engsten von dem Mikroskop noch getrennt abzubildenden Strukturelemente, so folgt aus diesem nach dem eben angedeuteten unmittelbar die Apertur der vom Objekt aus divergierenden Büschel, welche das System aufzunehmen imstande sein muß. Damit andererseits das Bild der im Objekt um d entfernten Strukturelemente auch vom Auge trennbar sei, muß es diesem unter einem Sehwinkel dargeboten werden, welcher dem Unterscheidungsvermögen ε des Auges entspricht, also unter einem Winkel von

[1] Vgl. E. ABBE, SCHULTZEs Arch. f. mikr. Anat. 9. 413. 1873; Sitzungsber. d. Jen. Ges. p. 71. 1880. (Gesammelte Abh., Jena 1904. p. 45 u. 273.) H. v. HELMHOLTZ, POGG. Ann. Jubelbd. 1874. p. 557. (Wissenschaftl. Abh. 2. Bd. Leipzig 1883. 185); s. auch L. DIPPEL, Handb. d. allgem. Mikr., Braunschweig 1882. p. 309. K. STREHL, Zentralztg. f. Opt. u. Mech. 14. 277. 1893 und die unten zitierten Abhandlungen desselben.

ca. 2'. Hieraus ergibt sich die Vergrößerung, welche das Instrument liefern muß, beim Mikroskop also auch dessen Gesamtbrennweite f'. Endlich ist zu berücksichtigen, daß das Bild eines Objekts durch ein optisches Instrument niemals ein vollkommenes ist, sondern durch die nicht aufhebbaren Aberrationsreste mehr oder minder verundeutlicht wird. Die Forderung, daß die Zerstreuungskreise der verschiedenen im System übrig gebliebenen Aberrationen nicht ihrerseits das Bild verwischen, d. h. zusammen höchstens den Betrag des physiologischen Grenzwinkels ε erreichen dürfen, gibt nun den Maßstab für die Verteilung der dioptrischen Gesamtleistung auf die drei Faktoren, Objektivstärke, Tubuslänge und Okularstärke, aus denen sie sich zusammensetzt.

Die schematische Zerlegung des Mikroskops.

Die dioptrische Vollkommenheit der Abbildung von Punkten auf und nahe der Achse hängt, wie die vorangegangenen Erörterungen gezeigt haben, im wesentlichen nur von derjenigen ab, die das Objektiv des Mikroskops (und ganz ebenso liegen die Verhältnisse beim Fernrohr) für sich allein ergibt oder zuläßt. Die Beurteilung derselben würde nun gerade beim Mikroskop sehr erschwert werden, wenn man sie unter dem Gesichtspunkt durchführen wollte, unter welchem sich die Wirkung des Objektivs zunächst und unmittelbar darbietet und wenn man bei derselben den für das Wesen der Sache rein zufälligen Umständen Rechnung tragen wollte, welche der Gebrauch des Mikroskops mit sich bringt.

Das Objektiv — so hatten wir zur Erläuterung seiner Wirkung in Übereinstimmung mit dem augenscheinlichen tatsächlichen Sachverhalt gesagt — entwirft ein reelles vergrößertes Bild des Objekts, das vom Okular — dieses wie eine Lupe wirkend — weiter vergrößert und in bezug auf den Strahlengang sonst umgestaltet wird. In der Gleichung

$$V = \frac{1}{f'} = \frac{\Delta}{f_1' \cdot f_2'} = \frac{\Delta}{f_1'} \cdot \frac{1}{f_2'} \tag{7}$$

oder

$$N = \frac{l}{f'} = \frac{\Delta}{f_1'} \cdot \frac{l}{f_2'} \quad , \tag{7a}$$

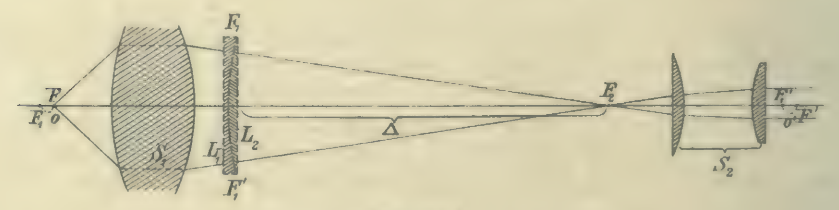
die den Effekt der Zusammensetzung des Instruments aus den Wirkungen seiner beiden Bestanteile ausdrückt, konnte dementsprechend die Größe Δ/f_1' als die dem Bildabstand Δ und der Stärke $1/f_1'$ entsprechende lineare Vergrößerung des Objekts durch das Objektiv, die Größe $1/f_2'$ bezw. l/f_2' als die Lupenvergrößerung des Okulars aufgefaßt und die resultierende Wirkung in anscheinend sehr natürlicher Weise als Produkt ihrer beiden wesentlichen Faktoren dargestellt werden.

Bei der Bemessung der Abbildungsfehler, welche das Objektiv für sich allein mit sich bringt, würde nun die Berücksichtigung der von Fall zu Fall, ja von Land zu Land innerhalb ziemlich weiter Grenzen (150—300 mm) schwankenden Tubuslänge, d. h. Projektionsdistanz des Bildes eine erhebliche Erschwernis bilden, ja sogar geradezu den wesentlichen Kern des Sachverhalts verdecken, welcher doch offenbar darin besteht, daß jene Projektionsdistanz, zum mindesten bei den stärkeren Systemen, stets sehr groß ist gegen deren Brennweite. So wichtig daher auch *in praxi* die genaue Berücksichtigung der Bilddistanz (d. h. der besonderen Lage des zur Benutzung zu bringenden aplanatischen Punktepaares des Systems) gerade bei den stärkeren Systemen von großer Apertur ist, so bietet sich für eine Übersicht über das Wesentliche und Typische des Sach-

verhalts naturgemäß die Betrachtung des Grenzfalls dar, daß jene Bilddistanz unendlich groß, also das Objekt in den vorderen Brennpunkt des Systems gestellt sei[1].

„Zufolge dieser besonderen Art schematischer Zerlegung des Mikroskops besteht also der erste Akt im Abbildungsvorgang nicht in der Erzeugung des umgekehrten reellen Bildes vor oder in dem Okular, sondern vielmehr in der Erzeugung eines unendlich entfernten virtuellen Bildes; der zweite Akt aber umfaßt dessen fernere Abbildung unter dem Gesichtswinkel des Okularfeldes und in der Weite des deutlichen Sehens und kommt durch eine letzte Brechung der Strahlen im Objektiv und durch die verschiedenen Brechungen im Okular zustande. Den ersteren kann man die Lupenwirkung des Objektivs nennen, weil dieser Teil der Leistung vollkommen identisch ist mit derjenigen einer gewöhnlichen Lupe für ein fernsichtiges Auge; der zweite Teil aber entspricht offenbar, alle einzelnen Veränderungen des Strahlenganges zusammengefaßt, der Wirkung eines Fernrohres mit — absolut und relativ zur Brennweite — kleiner Objektivöffnung, welchem das vorher erwähnte unendlich entfernte virtuelle Bild als Objekt dient. — — Das hier dargelegte Ineiandergreifen von Objektiv- und Okularfunktion in Form von Lupenwirkung und Fernrohrwirkung muß als die allgemeingültige Charakteristik des zusammengesetzten Mikroskops hingestellt werden. Auf Grund derselben beantworten sich zahlreiche für die Theorie des Mikroskops und für dessen rationelle Konstruktion gleich wichtige Fragen, insbesondere die nach dem Sitz der verschiedenen Fehlerquellen, nach den Mitteln zu ihrer Beseitigung, nach der Grenze der unter gegebenen Bedingungen möglichen Vollkommenheit, nach dem Einfluß, welchen Brennweite des Objektivs, Tubuslänge und Okularstärke auf die Qualität des Gesamteffekts üben" u. s. w.

Man wird hiernach zunächst daran denken, von dem Objektiv selbst denjenigen Teil seiner Brechungswirkung abzusondern, welcher die Überführung des vorher aus einem divergenten in ein parallelstrahliges verwandelten Büschels in ein solches von schwacher Konvergenz zu leisten hat und diesen Teil — etwa die letzte Fläche des Objektivs — als zum Okular (Fernrohr) gehörig anzusehen. Es würden jedoch bei einer derartig vorgenommenen Scheidung der Bestandteile des Mikroskops die Maßverhältnisse ihrer Abbildungsfaktoren ein wenig geändert. Man kann nun auch diese letzteren streng festhalten, wenn man folgende Fiktion annimmt (Figur 118).



Figur 118.
Die schematische Zerlegung des Mikroskops.

In die hintere (obere) Brennebene F_1' des Objektivs sei eine dünne planparallele Platte gesetzt, — die natürlich weder die Lage noch die Größe des vom Objektiv entworfenen Bildes irgendwie ändert. Diese Platte bestehe aus einer nach dem Objektiv zu gelegenen Plankonkavlinse L_1, von der Brennweite $-\Delta$ und einer nach dem Okular hin gelegenen Plankonvexlinse L_2 von der Brennweite

[1] E. Abbe, Beiträge u. s. w. l. c. p. 422. Wir entnehmen dieser Darstellung im folgenden einige Stellen im Wortlaute.

$+ \varDelta$. Die erstere ändert die Brennweite des Objektivs, wie man leicht erkennen kann, gar nicht, verschiebt aber dessen vorderen Brennpunkt F_1 in den des ganzen Systems F, d. h. in den Objektpunkt. Die Linse L_2 stellt das Objektiv des Fernrohres $(L_2 + S_2)$ vor, zu dem S_2 ebenfalls als Okular gehört. Die (Lupen-)Vergrößerung, welche das Objektivsystem $(S_1 + L_1)$ bewirkt, ist nach unseren früheren Festsetzungen gleich dem Reziproken seiner hinteren Brennweite

$$V_1 = \frac{\operatorname{tg} w_1'}{y} = \frac{1}{f_1} \quad (8)$$

wenn w_1' die Hälfte des Winkels ist, unter welchem durch dieses Objektiv hindurch ein Objekt von der halben Größe y erscheint.

Die (Angular)-Vergrößerung des Fernrohres von der Objektivbrennweite $\varDelta$ und der Okularbrennweite f_2' ist nach p. 56

$$\gamma = V_2 = \frac{\operatorname{tg} w_2'}{\operatorname{tg} w_1'} = \frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w_1'} = \frac{\varDelta}{f_2'} \quad ; \quad (9)$$

wenn $w_2' = w'$ der Winkel ist, unter welchem y, durch das ganze Mikroskop gesehen, erscheint. Hiernach ist also die Gesamtvergrößerung, welche das Mikroskop liefert

$$V = \frac{\operatorname{tg} w'}{y} = \frac{\operatorname{tg} w_1'}{y} \cdot \frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w_1'} = V_1 V_2 = \left(\frac{1}{f_1'}\right) \left(\frac{\varDelta}{f_2'}\right) \quad (10)$$

bezw.

$$N = \left(\frac{l}{f_1'}\right) \left(\frac{\varDelta}{f_2'}\right) \quad (10a)$$

ganz ebenso wie vorher (Gleichung 7 und 7a), nur unter andersartiger Zusammenfassung und Deutung der Faktoren.

Der Charakter der unkompensierten Aberrationsreste.

Diese letztere Betrachtung läßt noch deutlicher als die entsprechenden früheren die dort gekennzeichneten spezifischen Funktionen von Objektiv und Okular hervortreten. Aus ihr ergibt sich vor allem, daß die für die Korrektheit der Abbildung in der Mitte des Sehfeldes und damit für das mögliche Maximum der Leistung maßgebenden Faktoren — nämlich die chromatische und die sphärische Aberration — allein in der Konstruktion der Objektive wurzeln und daß die Einrichtung der Okulare auf jene überhaupt keinen irgend merklichen Einfluß gewinnen kann.

Denn was zunächst die sphärische Aberration betrifft, so zeigt eine genauere Diskussion derselben, in Ergänzung der von uns an früherer Stelle durchgeführten, daß, wie verschieden auch im einzelnen Falle der tatsächliche Verlauf der Strahlen in der Nähe ihres ideellen Vereinigungspunktes, d. h. wie verschieden auch ihrem Betrage und Gange nach die nicht kompensierten Reste der sphärischen Aberration höherer Ordnungen sein mögen, jenem Strahlenverlauf immer durch bloße Veränderung der Distanz zweier Linsen des Systems der gleiche Charakter gegeben werden kann, nämlich so, daß der zentrale Teil und die äußerste Randzone des Objektivs richtig zusammenwirken, während von ihnen aus nach einer zwischengelegenen Zone zu wachsende Überkorrektion bestehen bleibt. Der maximale Betrag dieser kann füglich als Maß für die unkompensiert gebliebenen Aberrationsreste („Zonen") gelten. Zugleich aber zeigt sich, daß kein äußeres Hilfsmittel eine solche typische Korrektionsdifferenz, wo sie einmal vorliegt, beseitigen oder auch nur vermindern kann. Weil sie in den Krümmungs-

und Brechungsverhältnissen der untersten Linsen des Objektivs wurzelt — in welchen die Büschel noch große Öffnungen besitzen und entsprechend großen Spielraum für das Entstehen und die Kompensation von beträchtlichen Aberrationen höherer Ordnung bieten — leisten ihr gegenüber alle Vorrichtungen, durch welche man auf ihre Korrektion hat hinwirken wollen (besondere Korrektionsgläser oberhalb des Objektivs oder Okulare von besonderer Konstruktion) im günstigsten Falle nur dasselbe, was auch eine Veränderung der Linsenabstände möglich macht. Sie gestatten, den vorhandenenen Aberrationsrest zwischen Mitte und Rand der freien Öffnung gleichsam hin- und herzuschieben und auf diese Weise irgend eine einzelne Zone des Objektivs auf Kosten der übrigen mehr oder minder aberrationsfrei zu machen. Durch solche Hilfsmittel kann daher die wirkliche Leistungsfähigkeit des Mikroskops niemals erhöht werden. Jene Einrichtungen stützen sich auf einen Begriff der sphärischen Aberration der — weil er nur Spielraum läßt für die einfache Alternative: überkorrigiert und unterkorrigiert — mit samt der ganzen darauf gebauten Theorie der aplanatischen Brennpunkte gegenüber den heutigen stärkeren Mikroskopen durchaus wertlos ist. Alles, was sie bewirken können, ist bei richtiger Konstruktion des Objektivs auch schon in diesem selbst zu erreichen, und alles, was hier nicht zu erreichen ist oder in einer mangelhaften Konstruktion nicht erreicht worden ist, kann auch durch jene Vorrichtungen nicht erreicht werden.

Ganz analoge Betrachtungen finden Anwendung auf die chromatischen Abweichungen. Wie wir schon hervorhoben, sind es nicht allein die schon an engen Strahlenkegeln auftretenden Fokusdifferenzen, die der Dispersion und deren ungleichförmigem Gang in den Crown- und Flintgläsern entsprechen, — die eigentliche chromatische Aberration oder das primäre und deren höheres Glied, das sogen. sekundäre Spektrum — die hier zur Geltung kommen und Berücksichtigung fordern, sondern ebenso sehr die Ungleichheit der Vereinigungsweiten verschiedenfarbiger Strahlenbüschel für verschiedene Öffnungswinkel d. h. die chromatische Differenz der sphärischen Aberration. Diese äußert sich, wie wir früher (p. 180) fanden, darin, daß, wenn ein System für eine mittlere Zone chromatisch möglichst gut korrigiert ist, dann nach dem Rande zu chromatische Über-, nach der Achse hin chromatische Unterkorrektion besteht. Während die zuerst erwähnten (primären und sekundären) Farbenabweichungen bei korrekter Konstruktion sich entweder ganz heben oder doch wenigstens fast unmerklich machen lassen, hat sich diese zweite Fehlerquelle, wie wir ebenfalls schon hervorhoben, erst mit den neuerdings der Technik seitens der Jenaer Schmelzerei zur Verfügung gestellten Gläsern überhaupt beseitigen lassen. Macht man von diesen Materialien nicht den notwendigen umfassenden Gebrauch oder scheut sich der Konstrukteur vor der Kompliziertheit und Empfindlichkeit des Aufbaues, den starke Linsensysteme behufs Beseitigung jenes Defekts erhalten müssen, so ist diese Beseitigung ebenfalls in einem anderen Teile des Mikroskops, im besonderen im Okulare nicht mehr möglich, aus Gründen, die den bei der sphärischen Aberration geltend gemachten ganz entsprechen. Auch hier läßt sich im Objektivsystem durch eine relative Lagenänderung seiner Bestandteile nur eine Verschiebung der Zone günstigster Farbenkorrektur — nach der Mitte oder nach dem Rande zu — erreichen. Durch irgend welche Hilfsapparate an Stellen, wo die Strahlenbüschel bereits eng sind, kann man aber selbst die Lage jener günstigsten Zone kaum beeinflussen, geschweige denn eine Minderung in dem wahren Betrage jenes Defektes herbeiführen.

Ganz das gleiche endlich ist in bezug auf die Bedingung der Abbildung eines axialen Flächenelements, die des konstanten Sinusverhältnisses, zu sagen. (Hingegen fällt die chromatische Variation desselben, wenn das Verhältnis selbst für je eine Farbe konstant ist, unter eine andere Kategorie von Abbildungsanomalien.)

Das Verhältnis des Okulars zum Objektiv in bezug auf Aberrationsreste.

Gegenüber diesen in der Fokalwirkung des Objektivs begründeten Abbildungsfehlern kann der ganze Okularapparat des Mikroskops — von groben Verstößen in der Konstruktion natürlich abgesehen — in bezug auf diese als praktisch vollkommen fehlerfrei angesehen werden und zwar in allen wesentlichen Punkten auch dann, wenn nur die einfachsten unter den bekannten Einrichtungen angewendet werden. Hieraus folgt, daß die mögliche Höhe der Leistung beim Mikroskop allein in der Konstruktion der Objektive wurzelt und daß keine denkbare Vervollkommnung der Okulare sie in irgend einem wesentlichen Punkte beeinflussen kann; ferner aber auch, daß die besonderen Umstände, unter welchen der Okularapparat fungieren mag, namentlich die Art, wie die Vergrößerung durch die Länge des Tubus und die Stärke des Okulars bewirkt wird innerhalb des praktisch in Betracht kommenden Spielraumes vollkommen gleichgültig bleiben und — richtige Anpassung der Objektive an die einmal angenommenen Verhältnisse vorausgesetzt — die erreichbare Höhe der Leistung durchaus nicht berühren. Das Teleskop, welches die Okularwirkung ausübt, ist, wie schon erwähnt, in jedem Falle ein solches von verhältnismäßig kleinen absoluten Dimensionen (seine Objektivöffnung beträgt höchstens 15 mm, und ist gerade bei stärkeren Mikroskopsystemen auf 3 mm und noch weniger beschränkt) und seine Objektivbrennweite ist stets ein sehr großes Vielfaches jener Öffnung (mindestens das 10-, bei starken Mikroskopobjektiven aber das 20-, ja 40- und selbst 80-fache). Aus Gründen, die wir bei der Besprechung des Teleskops noch besonders namhaft machen werden, die sich aber auch schon durch eine bloße Umkehrung der obigen Betrachtungen über das Mikroskop gewinnen lassen, kann in einem Teleskop derartiger Einrichtung irgend welche besondere Fokalwirkung in der Achse überhaupt nicht erzielt werden. Die Abbildung paraxialer Büschel und Objektpunkte geschieht in ihm so gut wie abweichungsfrei nach den für solche geltenden Fundamentalgesetzten der Dioptrik.

Das rationelle Verhältnis zwischen Unterscheidungsvermögen, Apertur und Vergrößerung des ganzen Mikroskops.

Im Hinblick auf diese Resultate gewinnt die oben durchgeführte Grenzbestimmung in bezug auf Objektiv- und Okularfunktion beim Mikroskop und das auf sie gegründete Zerlegungsschema eine besondere Tragweite. Alle Abbildungsfehler, die überhaupt die Wirkung beeinflussen, finden ihren vollständigen Ausdruck schon in der Beschaffenheit des unendlich entfernten virtuellen Bildes, welches das Objektiv, nach Art einer Lupe für ein fernsichtiges Auge wirkend, vom Objekt erzeugt. Diesem gegenüber spielt der Okularapparat, wie er sich aus Tubus und den eigentlichen Okularlinsen zusammensetzt, die Rolle eines indifferenten Vergrößerungsmechanismus, der, nach Art eines Fernrohres wirkend, nur dazu dient, jenes Objektivbild dem beobachtenden Auge auf den erforderlichen Sehwinkel auszubreiten, ohne dabei seinem Inhalte irgend etwas hinzuzufügen oder von demselben irgend etwas hinwegzunehmen.

Dieser Inhalt selbst aber ist nach den früher gemachten Andeutungen, seinem möglichen Detail nach bestimmt einmal durch die Apertur des Objektivs und andererseits, eine gegebene Apertur vorausgesetzt, durch die angulare Größe der Zerstreuungskreise, welche die in der Konstruktion des Objektivs begründeten Abbildungsfehler an Stelle scharfer Bildpunkte in das Lupenbild einführen. Hiernach ergibt sich für jedes konkrete Objektiv eine ihrerseits durch Tubuslänge

und Okularstärke beliebig zusammensetzbare Angularvergrößerung, welche für ein Auge von angenommener Sehschärfe gerade ausreichen muß, um das im Objektivbild enthaltene Detail vollkommen zu erkennen. Eine stärkere Vergrößerung kann zwar noch brauchbar sein, indem sie solches Detail deutlicher und bequemer zur Wahrnehmung bringt; sie vermag aber niemals das optische Vermögen eines gegebenen Objektivs zu erhöhen. Die erstere — welche man die förderliche Okularvergrößerung nennen könnte — muß daher als das Maß der relativen Vollkommenheit des Objektivs angesehen werden. Aus ihr bestimmt sich in naheliegender Weise die förderliche Gesamtvergrößerung, d. h. diejenige, mit welcher die Leistung des betreffenden Objektivs erschöpft ist. Es ist die kleinste Vergrößerung, bei der man alles Detail sieht, welches mit ihm, seiner Apertur und dioptrischen Vollkommenheit nach, überhaupt getrennt abgebildet werden kann.

Sei also gegeben seinem linearen Maße nach das Detail, die gegenseitige Entfernung d der feinsten Strukturelemente, welche durch das Mikroskop noch getrennt erkennbar sein sollen. Damit diese im Bilde überhaupt unterschiedlich wiedergegeben werden, muß die Apertur des Systems, $a = n \sin u$, einen Betrag haben, welcher nach der Abbe-Helmholtzschen Grundgleichung

$$d = \frac{\lambda}{2a}$$

sich bestimmt zu

$$a = \frac{\lambda}{2d} \quad , \tag{11}$$

wenn λ die Wellenlänge (in Luft) des bei der Abbildung wirksamen Lichtes bezeichnet.

Im letzten Bilde erscheint die Objektgröße d unter einem Sehwinkel δ^*, welcher, gemäß der Gleichung für die Vergrößerung virtueller Bilder (p. 226) abgesehen von kleinen Korrektionsgliedern bestimmt ist durch

$$\delta^* = d \cdot V = \frac{d}{f'} \qquad \text{oder} \qquad \delta^* = \frac{d}{l} N \quad , \tag{12}$$

wenn V die absolute, N die lineare Gesamtvergrößerung des Mikroskops bedeutet. Diese Vergrößerung muß, damit das betreffende Detail vom Auge deutlich unterschieden werde, so groß sein, daß δ^* dem Unterscheidungswinkel ε des Auges mindestens gleich wird. Man darf ε nach den darüber vorliegenden zum Teil gerade durch mikroskopische Beobachtungen gewonnenen Erfahrungen, kaum geringer als $= 2'$ ansetzen. Für ganz bequemes Sehen muß etwa der doppelte Betrag angenommen werden. Also ist — $\delta^* = \varepsilon$ genommen —

$$V = \frac{1}{f'} = \frac{2a}{\lambda} \varepsilon \quad ; \qquad N = \frac{l}{f'} = \frac{2al}{\lambda} \varepsilon \tag{13}$$

die der Apertur a entsprechende Mindestvergrößerung, bezw. Maximalbrennweite, welche man dem ganzen Instrument geben muß.

Setzen wir hierin $\lambda = 0{,}55\,\mu$ und ε einmal $= 2'$ und dann $= 4'$, so erhalten wir die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte für die kritischen linearen Vergrößerungen und Brennweiten bei verschiedenen Aperturen.

$a = n \sin u$	d in μ	$\varepsilon = 2'$		$\varepsilon = 4'$	
		N	f'[1] mm	N	f'[1] mm
0,10	2,75	53	4,72	106	2,36
0,30	0,92	159	1,58	317	0,79
0,60	0,46	317	0,79	635	0,39
0,90	0,31	476	0,52	952	0,26
1,20	0,23	635	0,39	1270	0,20
1,40	0,19	741	0,34	1481	0,17
1,60	0,17	847	0,30	1693	0,15

Die Austrittspupille des Mikroskops hat, da nach p. 235 $p' = a f' \left(= \frac{\lambda}{2\,\varepsilon}\right)$ ist, für $\delta^* = \varepsilon = 2'$ einen Durchmesser von ca. 1 mm (genauer $= 0{,}95$ mm), für $\varepsilon = 4'$ einen halb so großen.

Die rationelle Verteilung der dioptrischen Wirkung auf Objektiv und Okular.

Um jetzt beurteilen zu können, welcher Betrag der Gesamtleistung dem Objektiv, welcher dem aus Tubuslänge und Okularlinsen zusammengesetzten Okularapparat zuerteilt werden könne, ist festzustellen, wie groß die infolge dioptrischer und technischer Konstruktionsmängel restierenden Abbildungsfehler in dem von ersterem entworfenen virtuellen Bilde bei dem gegenwärtigen Zustande der praktischen Optik bezw. bei den besten vorhandenen Konstruktionen der Objektive sind.

Der Einfluß der Aberrationsreste im Objektiv auf die Bildgüte des gesamten Mikroskops.

Den Zerstreuungskreis der im virtuellen Objektivbilde unkompensiert gebliebenen sphärischen Aberration fanden wir, seinem angularen Betrage nach auf p. 331

$$\zeta = \left(\frac{h}{f}\right)^3 \cdot K \quad ,$$

wenn nur das erste Glied der Aberration berücksichtigt wurde. Beim Mikroskop, wo gerade die höheren Glieder von Wichtigkeit sind, hat man unter Mitberücksichtigung dieser Glieder

$$\zeta = \left(\frac{h}{f}\right)^3 K_1 + \left(\frac{h}{f}\right)^5 K_2 + \cdots\cdots \tag{14}$$

zu setzen. Das Verhältnis der von den austretenden Büscheln ausgefüllten Halböffnung h zur hinteren Brennweite des Objektivs ist nach Gleichung (5a) p. 235 seine numerische Apertur, a, also

$$\zeta = a^3 K_1 + a^5 K_2 + \cdots \tag{14a}$$

worin K_1, K_2 ... Konstanten sind, welche von der Zusammensetzung des Systems, d. h. von dessen Konstruktionstypus, aber nicht von der Brennweite abhängig sind.

Die Winkelgröße ζ dient als Objekt für das aus Tubuslänge und Okularstärke zusammengesetzte schematische Fernrohr. Die Angularvergrößerung $V_2 = \frac{\Delta}{f_2}$,

[1] Wir wollen hier gleich darauf hinweisen, daß das im Mikroskop sichtbare Objektflächenstück etwa den Durchmesser $\frac{3}{4} f$ hat, so daß die betreffenden Kolumnen der Tabelle diese Größe annähernd mit angeben.

dieses darf also nicht größer sein, als daß $\zeta V_2 = \zeta^*$ eine unmerkliche Größe, jedenfalls aber $\zeta^* < \varepsilon$, wird.

Man sieht zunächst, daß es gleichgültig ist, ob die Übervergrößerung des im Objektivbilde verbliebenen Fehlers durch kurzen Tubus und starkes Okular oder durch langen Tubus und entsprechend schwaches Okular bewirkt wird, solange letzteres überhaupt eine genügend fehlerfreie Abbildung von Achsenpunkten herbeiführt. Da die Fehlergröße im Bilde, ζ^*, nur von der Okularvergrößerung abhängt, so ist sie bei einem gegebenen Konstruktionstypus des Objektivs (gegebenen Konstanten K_1, K_2 ... und damit gegebenem Werte von ζ)

$$\zeta^* = \zeta \cdot \frac{\Delta}{f_2'} = \zeta \cdot \frac{f_1'}{f'} = \zeta \cdot f_1' \cdot V \quad , \tag{15}$$

also die Fehlergröße im Bilde direkt proportional der Brennweite des Objektivs, wenn gleiche Gesamtvergrößerungen V verglichen werden. Eine bestimmte Bildqualität (Größe von ζ^*) bei einer gegebenen Gesamtvergrößerung ist daher desto leichter zu erreichen, je kürzer man die Brennweite des Objektivs wählt. [Man kann dies auch daraus entnehmen, daß der gleichen angularen Größe ζ im virtuellen Objektivbilde eine desto kleinere lineare Fehlergröße z im Objekte entspricht, je kleiner die Brennweite des Objektivs ist, gemäß der Gleichung $z = \zeta \cdot f_1'$. Dieser auf das Objekt bezogene Fehler z unterliegt der Vergrößerung V durch das ganze Mikroskop, welche nur von dessen Gesamtbrennweite, aber nicht von f_1' abhängt. Folglich bleibt die Fehlergröße im schließlichen Bilde proportional ihrer Größe im Objekt, d. h. proportional f_1'[1]].

Ganz analog zieht man die aus der chromatischen Abweichung und aus deren Variation mit der Apertur herrührenden Fehler im Objektivbild in Rechnung. Die erstere fanden wir früher, ebenfalls in ihrem angularen Betrage

$$\gamma = \left(\frac{h}{f}\right) G = a \cdot G \quad , \tag{14b}$$

wo G wiederum eine vom Konstruktionstypus des Systems abhängige Konstante bedeutet. Die andere würde, analog der sphärischen Aberration selbst

$$\Delta \zeta = a^3 \Delta K_1 + a^5 \Delta K_2 + a^7 \Delta K_3 + \cdots \tag{14c}$$

zu setzen sein.

Die aus allen drei Ursachen zusammen herrührende Aberration — so unsicher dieselbe auch auf solche Weise mathematisch und physikalisch bestimmt sein mag — wird daher jedenfalls durch eine nach ungeraden Potenzen der Apertur fortschreitende Reihe dargestellt, deren Koeffizienten von der Brennweite des Systems unabhängig sind. Die lineare Größe dieses Gesamtfehlers, zurückbezogen auf das Objekt, ist also, ebenso wie seine einzelnen Bestandteile, direkt proportional der Brennweite des Objektivs. Indem man dann die Bedingung festhält, daß der aus allen drei Ursachen herrührende Gesamtfehler im letzten Bilde den kritischen Betrag ε nicht übersteigen dürfe, kommt man zu einer rationellen Skala der Verhältnisse von Apertur und Brennweite in den Mikroskopobjektiven.

Es würde schwer und jedenfalls ein sehr unsicheres Verfahren sein, wenn man die Größe von ζ für verschiedene Konstruktionstypen und Aperturen direkt — etwa rechnerisch, — bestimmen wollte. Abbe[2] hat daher zu ihrer Ermittelung einen indirekten Weg eingeschlagen, indem er an zahlreichen Exemplaren ver-

[1] Erster Hinweis auf diese Verhältnisse in Huyghens Dioptrica, Prop. LXI ff. — [2] E. Abbe, Beiträge zur Theorie u. s. w. l. c. und Relation of Aperture and Power in the Microscope, Journ. Roy. Micr. Soc. (2) 2. 300. 460 790. 1882; Ges. Abhandl. 1 Bd. Jena 1904, l. c.

schiedenster Provenienz und Zusammensetzung empirisch den Betrag der Übervergrößerung $\frac{\Delta}{f_2'} = V_2$ feststellte, den das Objektivbild verträgt, ohne irgend merkliche Einbuße an Schärfe zu erfahren. Aus der Apertur a und dem kritischen Winkel ε ist gemäß Gleichung (13) die Gesamtbrennweite f' bestimmt, die das System erhalten muß. Diese setzt sich aus Objektivvergrößerung $V_1 = \frac{1}{f_1'}$ und der Okularvergrößerung $V_2 = \frac{\Delta}{f_2'}$ gemäß der Gleichung (10)

$$V = \frac{1}{f'} = V_1 \cdot V_2 = \frac{1}{f_1'} \frac{\Delta}{f_2'}$$

zusammen. Daher bestimmt der Wert von V_2 umgekehrt denjenigen von f_1', nämlich zu

$$f_1' = \frac{V_2}{V} = f' \cdot V_2 \tag{16}$$

oder aus der zulässigen Linearvergrößerung N zu

$$f_1' = \frac{l \cdot V_2}{N} \quad , \tag{16a}$$

wo V bezw. N die dem Winkel ε und der Apertur a nach Gleichung (13) p. 354 entsprechenden Größen sind.

Eine Reihe der auf diese Weise sich ergebenden Werte der kritischen Übervergrößerung und der entsprechenden Objektivbrennweite sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Darin sind neben den Werten, welche den Systemen der älteren Art, den „Achromaten", zugehören, diejenigen aufgeführt, welche nach einer gleichartigen Untersuchung den mit den neuen Jenaer Glasarten konstruierten „Apochromaten" zugehören.

Apertur $a = n \cdot \sin u$		Förderliche Gesamtvergrößerung $= N$	Achromate V_2	Achromate f_1'	Apochromate V_2	Apochromate f_1'
Trockensysteme	0,10	53	10	47	—	—
	0,20	106	8	19	—	—
	0,30	159	7	10,5	10	16
	0,60	317	4,5	3,5	10	8
	0,90	476	4	2,1	8	4
Wasserimmersion . . .	1,20	635	4	1,6	7	2,5
Homogene Immersion .	1,35	714	6	2,1	9	3

Wegen der verschiedenen, bei Aufstellung einer solchen Tabelle in Betracht kommenden Nebenumstände müssen wir auf die zweite der oben zitierten Abhandlungen von ABBE verweisen.

Der Einfluß der Wirkungsverteilung auf Objektiv und Okular in bezug auf die Bildfehler außer der Achse.

Die Werte von f_1' in dieser Tabelle und überhaupt alle gemäß solcher Bestimmungsweise erhältlichen sind obere Grenzwerte. Nach den oben angestellten Erwägungen könnte es nun scheinen, als käme man zu immer günstigeren Verhältnissen, je kleiner man *caet. par.* f_1' wählt. Dies ist jedoch nur richtig unter dem bisher allein festgehaltenen Gesichtspunkt der Verminderung des Einflusses der unvermeidlichen Aberrationsreste auf die Bildqualität in der Achse. Eine zu starke Verkürzung der Objektivbrennweite — auf mehr als $\frac{2}{3}$ bis

höchstens $\frac{1}{2}$ der oben angegebenen Werte — würde dagegen mehrere Nachteile im Gefolge haben.

Die meisten der p. 336/7 angeführten Vorzüge des zusammengesetzten Mikroskops vor dem einfachen würden bei relativ sehr kurzen Objektivbrennweiten in entsprechend geringerem Grade zur Geltung kommen. Insbesondere würde man mit den bequemsten Okularbrennweiten und Tubusdimensionen auf übermäßige, „leere" Vergrößerungen kommen und keine Abstufung brauchbarer Vergrößerungen durch Wechsel der Okulare vornehmen können; ferner würde bei den höheren Aperturen der freie Objektabstand — der hier ein mit der Apertur abnehmender Bruchteil der Brennweite ist (bei $a = 0{,}25$ ca. $0{,}7\,f_1$, bei $a = 0{,}5$ ca. $0{,}3\,f_1$ und bei $a = 0{,}85$ nur ca. $0{,}1\,f_1$) — auf unangenehm geringe Beträge herabgesetzt werden.

Der wichtigste Übelstand aber wäre der, daß mit der Verringerung der Objektivbrennweite die Fehler des letzten vom Okular entworfenen Bildes außerhalb der Achse zunehmen.

Wir machten als Hauptmoment für die Verteilung der dioptrischen Leistung auf ein Objektiv und ein Okular geltend, daß durch diese Teilung die Abbildung eines im Verhältnis zur Brennweite des ganzen Systems größeren Objektflächenstückes ermöglicht werde. In der Tat, nehmen wir Okulare von gegebenem Konstruktionstypus an, in welchen z. B. das angulare Bildfeld ca. $= 35^0$ ist, also $\operatorname{tg} w' = \operatorname{tg} 17{,}5^0 = 0{,}32$, dann ist das durch das ganze System abgebildete Objektflächenstück

$$2y = 2\cdot f'\cdot \operatorname{tg} w' \text{ nahezu } = 0{,}65\,f' \quad .$$

Nun sind durch Erfüllung der Sinusbedingung die der ersten Potenz des Winkels (des Sehfeldes) proportionalen Bildfehler (die Vergrößerungsdifferenzen der verschiedenen Zonen des Objektivs) auf Null gebracht. Es bleiben aber die der zweiten und höheren Potenzen proportionalen im wesentlichen unkompensiert bestehen. Was nun diese und zunächst die dem Quadrat des Sehfeldes proportionalen Fehler (Astigmatismus, Wölbung) betrifft, so treten diese desto weniger in Erscheinung, je größer die Objektivbrennweite ist. Denn alsdann ist das unter gegebener Gesamtvergrößerung ($V = 1/f'$) und gegebenem Okularsehfeld ($2\,w'$) abgebildete Objektflächenstück $2\,y$ ein entsprechend kleinerer Bruchteil der Objektivbrennweite. Nämlich, wenn

$$f_1' = f'\cdot V_2 \quad \text{so} \quad \frac{y}{f_1'} = \frac{\operatorname{tg} w'}{V_2} \quad , \tag{17}$$

also y/f_1', die angulare Größe des Objekts vom vorderen Knotenpunkt des Objektivs aus gesehen, ein desto kleinerer Bruch, je stärkere Übervergrößerung V_2 — mittels Okular und Tubus — angewendet wird, oder gemäß den oben erörterten Bedingungen angewandt werden darf. Andererseits wird der im Objektivbild verbleibende Zerstreuungskreis direkt proportional der Okularvergrößerung V_2 mit vergrößert. Bei einer in bezug auf die exzentrischen Teile des Sehfeldes fehlerlosen Abbildung durch das Okular, oder bei einer von der Stärke derselben unabhängigen Qualität der von ihm gelieferten Bilder erscheinen daher im letzten Bilde die dem Quadrate des Sehfeldes proportionalen Fehler im umgekehrten Verhältnis zur Objektivbrennweite.

Die lineare Größe des abgebildeten Objekts, die gleich ca. $\frac{2}{3}$ der Brennweite des Gesamtsystems ist, beträgt demnach im zusammengesetzten Mikroskop nur $\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{18}$ der Objektivbrennweite; das Objekt wird daher durch dieses in seinen Randteileilen entsprechend vollkommener zur Abbildung gebracht als in einem einfachen Mikroskop von gleicher Gesamtvergrößerung. Je größer die zulässige Steigerung der Übervergrößerung V_2 ist, in desto stärkerem Maße kommt dieser Vorteil neben den anderen oben angeführten zur Geltung. Dies sind die Gründe, weshalb die möglichste Steigerung der Objektivbrennweite und

entsprechende Steigerung der Übervergrößerung ein Hauptziel der praktischen Optik sein muß und einen Maßstab für ihre Leistungen bildet.

„Angesichts der noch sehr verbreiteten Meinung, daß die Anwendung starker Okulare an sich unvorteilhaft sei — daß diese Lichtmangel herbeiführten und daß man deshalb für höhere Vergrößerungen grundsätzlich Objektive von kurzer Brennweite und schwache Okulare fordern müsse — dürfte es nicht überflüssig sein, darauf hinzuweisen, daß eine solche Ansicht weder optisch sich rechtfertigen läßt, noch einer richtig gedeuteten Erfahrung entspricht, sondern aus einer unberechtigten Verallgemeinerung gewisser Beobachtungen entsprungen ist. Die starken Okulare geben dann „dunkle" Bilder, wenn durch ihre Anwendung überhaupt zu hohe (leere) Vergrößerung herbeigeführt wird, d. h. wenn die Gesamtvergrößerung über diejenige Ziffer hinaus sich steigert, bei welcher der Inhalt des Bildes, wie er durch die Apertur des Objektivs sich bestimmt, für das Auge erschöpft ist; und außerdem dann, wenn die Strahlenvereinigung durch das Objektiv zu unvollkommen ist, um die betreffende Vergrößerung zu vertragen, ohne daß die Fehler sichtbar werden. Wenn weder der eine noch der andere Fall vorliegt, ist es auch für den subjektiven Eindruck der Helligkeit durchaus gleichgültig, ob die betreffende Vergrößerung durch ein starkes Objektiv mit einem schwachen Okular oder durch ein schwächeres Objektiv von gleicher Apertur mit einem stärkeren Okular erzielt worden ist. Die objektive Lichtstärke des Bildes aber hängt in jedem Falle nur von der Apertur und der Gesamtvergrößerung ab, gleichgültig wie die letztere durch Brennweite des Objektivs, Tubuslänge und Brennweite des Okulars sich bestimmt" (ABBE).

Wenn die Vergrößerung, d. h. die Divergenzänderung der abbildenden Büschel durch das Objektiv allein unter ein gewisses Maß herabgeht, so verlieren die voranstehenden Betrachtungen zum Teil ihre Unterlage. Die Bilddistanz ist dann nicht mehr sehr groß gegen die Brennweite des Objektivs und die von ihm austretenden, für das Okular wirksam werdenden Büschel sind nicht mehr sehr eng. Der Vergleich des Objektivs mit einer Lupe für fernsichtige Augen und des Okulartubusteils mit einem ohne weiteres aplanatischen Fernrohr läßt sich daher nicht mehr aufrecht erhalten. Es muß dann vielmehr auch die Fokalwirkung des Okulars berücksichtigt werden, und es ist andererseits in viel höherem Maße als oben hingestellt möglich, die im Objektivbild verbliebenen Fehler durch das Okular zu korrigieren.

Die hauptsächlichsten Konstruktionstypen in ihrer historischen Entwickelung.

1. Einfache Linsen für Objektiv und Okular. Das zusammengesetzte Mikroskop ist — ebenso wie das Fernrohr — wahrscheinlich durch zufällige geeignete Kombination eines starken bikonvexen mit einem noch stärkeren bikonkaven(?) Brillenglase um das Jahr 1590 von Niederländischen Brillenschleifern erfunden oder vielmehr gefunden worden (ZACHARIAS JANSSEN in Middelburg?)[1]. Das erste zusammengesetzte Mikroskop war also ebenso wie das erste Fernrohr ein solches mit negativem (dispansivem) Okular[2]. FONTANA beschrieb 1646 zuerst ein Mikroskop, dessen Okular wie das Objektiv aus je einer Sammellinse bestanden.

---

[1] Über die Geschichte dieser Erfindung und die Prioritätsansprüche der verschiedenen Personen bezw. Nationen berichten ausführlicher: E. WILDE, Gesch. der Optik. Berlin 1838. 1. 138ff. P. HARTING, Das Mikroskop. Deutsche Übers. 2. Aufl. Braunschweig 1866. 3. Teil. J. MAYALL jun., Cantor lectures on the microscope. Soc. for the encouragement of arts etc. (auch separat erschienen) London 1886. p. 6ff. In diesen Werken ist auch die ältere auf den Gegenstand bezügliche Literatur angeführt. Daß die Inanspruchnahme dieser Erfindung (sowie auch der anderer optischer Instrumente) für ein früheres Zeitalter, insbesondere für das klassische Altertum haltlos sei, wies eingehend nach: H. MARTIN, Sur les instrum. d'optique faussement attribués aux anciens etc. Bull. di Bibliogr. e di Storia delle Scienze mat. e fis. (4.) (Mai-Juni) 1871. Für die Priorität GALILEIs trat neuerdings nochmals ein G. GOVI, Atti d. R. Ac. d. Scienze fis. et mat. Napoli. S. dagegen die Ausführungen in Journ. Roy. Micr. Soc. 1889. p. 574. — [2] So beschaffen war es wenigstens auf der ältesten Abbildung eines zusammengesetzten Mikroskops in DESCARTES, Dioptrice 1637 (MAYALL l. c. p. 9). Das angeblich älteste wirklich erhaltene (JANSSENs?) Mikroskop hat zwei konvexe Linsen (vgl. Ber. üb. d. Ausst. wiss. Instr. zu London, herausg. v. A. W. HOFMANN, Braunschweig 1878. p. 50. MAYALL, l. c. p. 7.)

Im Jahre 1665 setzte Hooke zwischen diese beiden Linsen nahe der oberen eine dritte, welche man jetzt als sogen. Kollektivglas (Fieldlens) als zum Okular gehörig rechnet. Seine Absicht war dabei, wie der Name es ausdrückt, nur die, das Sehfeld zu vergrößern, indem die Kollektivlinse einen größeren Teil des Objektivbildes aufnimmt als bei sonst ungeänderter Stellung derselben die eigentliche Okularlinse. Diese Erklärung hält jedoch nicht mehr Stand, wenn man zusammengesetzte und einfache Okulare von gleicher Gesamtbrennweite vergleicht. Maßgebend für die bessere Wirkung der zweifachen Okulare sind vielmehr die Gesichtspunkte, unter welchen Huyghens sie (vor 1659) für den Gebrauch am Teleskop gefunden hatte und auf welche wir teils bereits hingewiesen haben, teils unten zurückkommen werden.

Die weitere Entwickelung des Mikroskops mußte nach dem oben Ausgeführten wesentlich von derjenigen ihrer Objektive abhängen. Die Konstruktion derselben machte keine nennenswerten Fortschritte in den ersten beiden auf die Erfindung des Mikroskops folgenden Jahrhunderten. Man war in diesen vielmehr ausschließlich mit der Anwendung und konstruktiven Durcharbeitung der einfachen Mikroskope beschäftigt. Man versuchte zwar, die Brennweiten der Objektive immer kürzer und ihre Öffnung dennoch relativ groß zu erhalten (man hatte bald erkannt, daß hierauf, wie beim Teleskop, die Lichtstärke beruhe): die sphärischen und chromatischen Fehler einer Einzellinse — und selbst mehrerer solcher zu einem System verbundener (Dublets, Divini 1668) als Objektive von Mikroskopen traten aber schon unter mäßiger Okular- bezw. Gesamtvergrößerung so stark hervor, daß ihnen gegenüber bis in die neuere Zeit (ca. 1830) sogar die mit einem (Konkav-)Spiegel ausgerüsteten Katadioptrischen Mikroskope (vorgeschlagen 1672 von Newton, weiter verfolgt von Barker, R. Smith, B. Martin, D. Brewster und besonders Amici) entschiedene Vorteile zu bieten schienen. Die hierauf gerichteten Bestrebungen wurden jedoch beim Mikroskop — im Gegensatz zum Fernrohr — später gänzlich fallen gelassen, als die Anwendung achromatisierter Kombinationen als Objektive die diesen früher anhaftenden Mängel beseitigte. In der Tat bieten Spiegel als Objektive so ungünstige Bedingungen für die Beleuchtung und die Beobachtung des Objekts dar, daß die katadioptrischen Mikroskope (das Okular war stets dioptrisch) als ein für immer überwundener Standpunkt gelten können und nur noch historisches Interesse beanspruchen dürfen.

2. Die Anwendung des Achromasieprinzips — unter gleichzeitiger Aufhebung der sphärischen Aberration für wenigstens eine Farbe — auf das Mikroskopobjektiv war durch die theoretischen Arbeiten, insbesondere die von Euler schon früher vorbereitet (Ende des 18. Jahrh.), fand aber nach mehreren dahin gerichteten mißlungenen Versuchen von B. Martin (1759) u. a. erst durch die Optiker J. u. H. van Deyl (1807), Fraunhofer (1811), Amici (1816), Tulley (1824) uud Chevalier (1824) allmählich zunehmend sachgemäße und darum wirkungsvolle Realisierung.

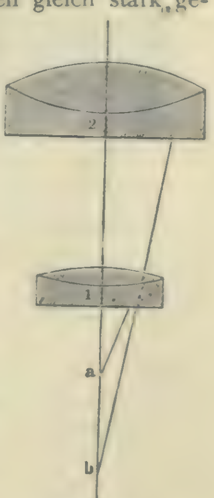
Insbesondere waren es die von V. u. Ch. Chevalier anfänglich nach Angaben von Selligue hergestellten (später selbständig verbesserten) Objektive[1], welche dem zusammengesetzten Mikroskop einen wirklichen Vorsprung vor dem einfachen zu verschaffen begannen. In diesen waren mehrere für sich achromatische Linsen über einander geschraubt, welche zusammen, einzeln, oder in beliebigen Kombinationen benutzt werden konnten und damit war der zweite Schritt auf der Bahn geschehen, in welcher sich alle weiteren Fortschritte auf dem Gebiete der Mikroskopie bewegten.

---

[1] Über dieselben s. Ch. Chevalier, Des Microscopes. Deutsche Übers. v. Kerstein, Quedlinburg u. Leipzig 1843 und den von Fresnel verfaßten Bericht der von der Par. Akad. d. Wiss. zu ihrer Prüfung eingesetzten Kommission. Ann. des sciences nat. **3.** 345. 1824.

Die Zusammensetzung des Objektivs aus mehreren geeignet angeordneten einfachen Linsen hatte allerdings schon EULER (1757) empfohlen behufs Verminderung der sphärischen Aberration in einem System von entsprechend kurzer Brennweite bezw. relativ großer Öffnung. Für den damaligen Zustand der Technik war es außerdem an sich schon ein großer Vorteil, daß die Brechungswirkung auf mehrere Flächen verteilt wurde, deren Dimensionen und Radien nicht allzusehr außerhalb des Bereichs ihres Könnens lagen. Da der Korrektionszustand von den gegenseitigen Entfernungen der Linsen abhängt, so bietet eine Mehrzahl von solchen die — bis in die Gegenwart viel benutzte und nicht zu unterschätzende — Möglichkeit, durch empirische Distanzierung Unvollkommenheiten des ursprünglichen Konstruktionsplanes und der technischen Ausführung bis zu einem gewissen Grade nachträglich wieder auszugleichen. Die von SELLIGUE gewählte Disposition zeugte andererseits von wenig Einsicht in die Bedingungen des Problems, welches er zu lösen unternahm. Denn er wandte wie die meisten seiner Vorgänger „achromatische" Linsenpaare an, welche gewissermaßen schlechthin „achromatisch", nämlich von den chromatischen und sphärischen Aberrationen für einen unendlich fernen Objektpunkt befreit waren, wie das damals bereits genauer studierte Fernrohrobjektiv. SELLIGUE trug nun nicht einmal — wie z. B. FRAUNHOFER — dem Umstande Rechnung, daß bei Mikroskopobjektiven die Bildentfernung (nahezu im Verhältnis der linearen Objektivvergrößerung) größer ist als die Objektentfernung und daß deshalb ein Fernrohrobjektiv von entsprechend kurzer Brennweite leidliche Dienste als Mikroskopobjektiv nur tun kann, wenn man es in umgekehrter Lage wie jenes am Tubus anbringt. Vielmehr waren seine Objektive aus Linsenpaaren zusammengesetzt (bikonvexe Crown- mit plankonkaver Flintlinse, mit den gleich stark gekrümmten Innenflächen an einander gekittet, die Crownlinse nach dem Objekte hin gelegen) die sich in einer Stellung befanden, in welcher sie für den unendlich fernen Achsenpunkt besser als für den wirklichen Objektpunkt korrigiert waren.

Die gebührende Rücksicht auf diesen Punkt nahm erst CHEVALIER, dann LISTER[1]. Letzterer wies darauf hin, daß jedes Linsenpaar nur für zwei Stellen der Achse sphärisch korrigiert „aplanatisch" sein könne und daß man daher die Einzelobjektive so über einander reihen müsse, daß der (virtuelle) aplanatische Bildpunkt, *b*, der einen Objektpunkt für die darauffolgende würde. Alsdann bleibt das Gesamtsystem $(1 + 2 + \cdot\cdot)$ (Figur 119) aplanatisch, man mag von der Objektseite her so viel Teile (1, 2, . . .) entfernen oder daran belassen als man wolle. Die Stärke der einzelnen Linsenpaare nimmt dabei von der Objekt- nach der Bildseite hin ab und die des ganzen Systems mit der Zahl der Linsenpaare zu. Ein Hauptvorteil dieser kombinierten Objektive bestand darin, daß sie einen größeren Öffnungswinkel erhalten konnten als einfache, und daß sie infolgedessen für die ihren Brennweiten entsprechende Vergrößerung annähernd genügende Lichtstärke und Unterscheidungs- oder Auflösungsvermögen erhielten.



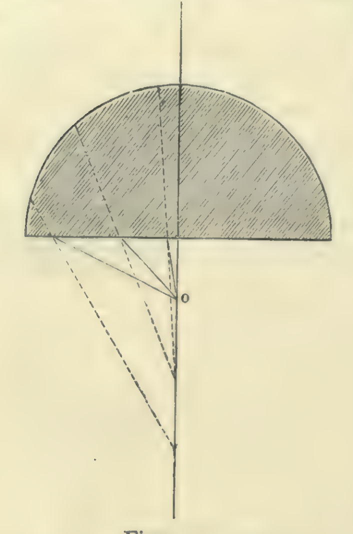
Figur 119.
Die Zusammensetzung eines Mikroskopobjektivs aus achromatischen sphärisch korrigierten Einzellinsen.

Nach diesem Konstruktionsprinzip hat man zwar noch bis in die neueste Zeit Systeme verfertigt; aber dies doch nur zu gewissen speziellen Zwecken. Die Mehrzahl der damaligen Optiker, welche ohnehin weder die rationelle Berechnung

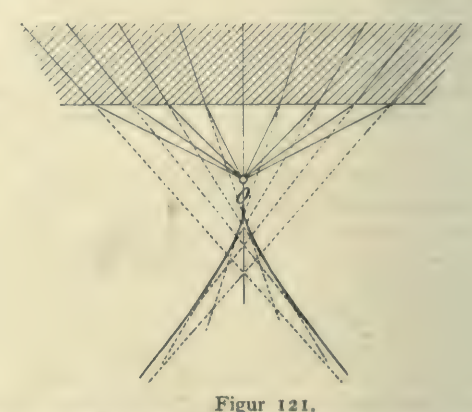
[1] LISTER, On some properties in achrom. objectglasses applic. to the improvement of the microscope. Phil. Trans. 3. 187. 1830.

noch eine der Rechnung genau entsprechende Ausführung zu leisten vermochten, wandten sich einem anderen Verfahren zu, welches an sich zwar komplizierter war, aber eben darum höhere Leistungen ermöglichte und den praktischen Optikern die Möglichkeit bot, ohne besondere Ansprüche an Zusammenwirken von Theorie und Technik zu stellen, durch Geduld und Sorgfalt, auf rein empirischem Wege, die geeigneten Kombinationen zu finden. Lister selbst hatte sich auch in seiner ersten Abhandlung über diesen Gegenstand zum Teil wieder von seinem Prinzip entfernt, indem er angab, daß bei starken Systemen die Gesamtwirkung eine günstigere werde, wenn man in dem einen Partialsystem etwas Unterkorrektion bestehen lasse und diese durch eine gleich große Überkorrektion des darauf folgenden Teiles kompensiere. In der Tat haben nur die unter vollständiger Verfolgung des Prinzips der

3. Gegenseitigen Kompensation absichtlich angehäufter Aberrationen in den verschiedenen Teilen des Objektivs die Möglichkeit dargeboten, die chromatischen und sphärischen Aberrationen höherer Ordnung und die Vergrößerungsanomalien der verschiedenen Zonen des Systems (Abweichungen vom Sinusverhältnis) einigermaßen auszugleichen, welche bei größeren Aperturen über die primären Glieder weit überwogen. Amici gebührt das Verdienst, diesen Schritt getan (auch selber praktisch verwirklicht) zu haben und durch diese und andere Verbesserungen des zusammengesetzten Mikroskops der eigentliche Begründer der modernen Mikroskopoptik geworden zu sein.



Figur 120.
Die Brechung an der Planfläche der Frontlinse.

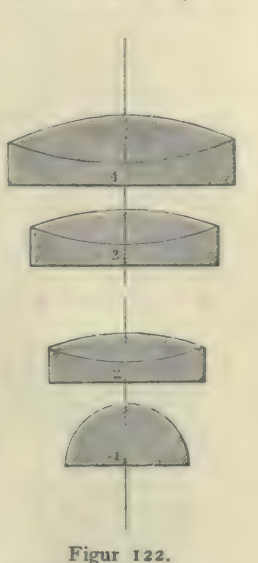


Figur 121.
Die Unterkorrektion eines Büschels in Luft bei der Brechung an einer Planfläche.

Amici ging in Erkenntnis der Bedeutung der großen Öffnungswinkel für die stärkeren Systeme systematisch darauf aus, dieselben zu steigern. Da eine wirkliche Ausnutzung des Öffnungswinkels nur eintreten kann, wenn innerhalb desselben die Aberrationen ausgeglichen sind, so brachte Amici in seinen Objektiven das eben genannte und schon früher von uns besprochene Prinzip zur Anwendung, die verschiedenen Aberrationen in dem einen (Unter-)Teil des Systems absichtlich anzuhäufen bis zu solchen Beträgen, welche in gleicher aber entgegengesetzter Größe und gleichem Zusammenhange (mit den Zonen und unter einander) in dem anderen zum System gehörigen (Ober-)Teil erreichbar sind. Die Zusammensetzung zweier solcher mit entgegengesetzten Aberrationen behafteter Teile ergibt dann ein aplanatisches Gesamtsystem, in welchem die verschiedenen Aberrationen, wie bemerkt, weit besser korrigiert sind, als wenn

man das System aus Teilen zusammensetzte, deren jeder für sich möglichst gute Wirkung oder überhaupt brauchbare Bilder gibt. Der Vorteil, daß die allgemeine dioptrische Wirkung auf mehrere Flächen verteilt ist und infolgedessen mittels Flächen schwächerer Krümmung geleistet wird als bei Anwendung einer einzigen Linse, bleibt dabei immer noch bestehen.

Als eines wesentlichen Mittels zur Erreichung dieses Zieles bediente sich Amici bereits der stark gewölbten plankonvexen Vorder-(Front-)Linse, die für alle anderen modernen stärkeren Objektive wesentlich und eigentümlich ist. Wir haben wiederholt (p. 66, 92, 131) auf die Eigenschaft der Kugel hingewiesen, außer dem im Mittel- und dem im Scheitelpunkte koinzidierenden noch ein weiteres im strengen Sinne aplanatisches Punktepaar zu besitzen. Die vom Punkte L' (Figur 22, p. 65) innerhalb des stärker brechenden Mediums n' auf die konkave Seite der Kugel fallenden Strahlen $L'P$ u. s. w. werden in jeder Neigung und jedem Azimut nach dem virtuellen Bildpunkte L hin gebrochen, wenn $CP = r$, $CL' = n/n'\,r$ und $CL = n'\,n\,r$ ist. Dabei stehen die Sinus der Winkel $PL'C$ und PLC in dem konstanten Verhältnis $n' : n$. Fallen die Strahlen von einem Punkte O erst auf die ebene untere Grenzfläche einer nahezu halbkugeligen Linse, so bleibt an dieser zwar das Sinusverhältnis konstant, aber es erfährt das Büschel an ihr eine gewisse sphärische Unterkorrektion (Figur 120 u. 121). Ist der virtuelle Vereinigungspunkt des Büschels nach der Brechung an dieser Planfläche der eine aplanatische Punkt L' der darauf folgenden Kugelfläche, so wird das Büschel nunmehr aplanatisch in den ihm konjugierten Punkt L übergeführt. Es findet auf diese Weise also eine sehr erhebliche Brechungswirkung mit relativ geringen Aberrationen statt. In dem auf die Frontlinse folgenden Teile des Systems findet dann die weitere Brechung und Korrektion des Büschels gemäß dem oben gewährten Prinzip statt.



Figur 122.

Die Amicische Grundform stärkster Mikroskopobjektive.

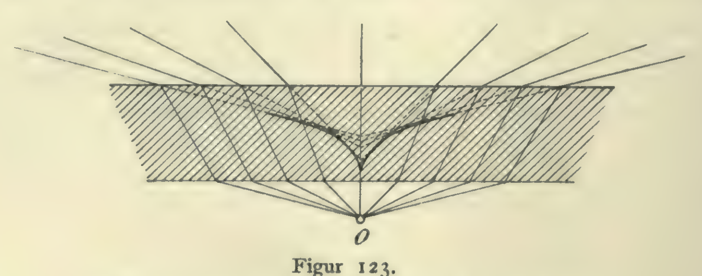
Amici verwandte auch bereits eine größere Auswahl von Glasarten — wohl alle damals zur Verfügung stehenden (etwa 6) — um möglichsten Spielraum in der Verteilung von Brechungs- und Aberrationswirkung auf die verschiedenen Flächen zu haben. Die auf die Frontlinse folgenden waren bei ihm — und auch später meistens — solche, welche aus einer nahezu plankonkaven Flintlinse (diese nach der Objektseite gewandt) und einer in sie gepaßten bikonvexen Crownlinse zusammengesetzt (verkittet) waren (Figur 122).

Amici erreichte auf diese Weise Öffnungswinkel, welche fast bis an die Grenze des geometrisch möglichen gingen, nämlich bis 120^0 ja 135^0. Endlich erkannte er auch zuerst die beiden anderen Momente, welche einer guten Wirkung der Systeme entgegenstanden, und die zur Erzielung einer solchen mehr berücksichtigt werden mußten.

Der Einfluß des Deckglases. Die Korrektionsfassung.

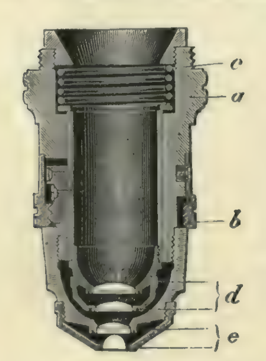
Die große Mehrzahl der Objekte, welche der mikroskopischen Beobachtung und Untersuchung, zumal bei starken Vergrößerungen, unterworfen werden, pflegt mit Glasplättchen bedeckt zu werden — den sogen. Deckgläsern — deren Dicke früher oft bis zu einigen Millimetern ging, jetzt meist nur wenige Zehntel-Millimeter beträgt. Bei den großen Öffnungswinkeln, die Amici seinen Objektiven zu geben und nicht minder bei der vollkommenen Strahlenvereinigung, die er

innerhalb dieser Öffnungswinkel zu erzielen wußte, wurde ihm der Einfluß bemerklich, den auch sehr dünne Deckgläser auf die Bildqualität ausüben. Ein Büschel, dessen Spitze z. B. in der Unterfläche des Deckglases liegt (von der Oberfläche des mit ihm bedeckten Präparates ausgeht), erfährt an der anderen Fläche, beim Übergang in Luft, eine erhebliche sphärische Überkorrektion (vgl. die Untersuchungen der Brennfläche in diesem Falle von Tait, Meisel u. s. w.).



Figur 123.
Die Überkorrektion als Gesamtwirkung des Deckglases.

Büschel, die von tiefergelegenen Punkten O des Präparates ausgehen, erfahren an der ersten Fläche des Deckglases, beim Übergang in Glas, allerdings eine gewisse sphärische Unterkorrektion (vgl. Figur 121); wegen der geringeren Entfernung des Objektpunktes von dieser Fläche als von anderen überwiegt aber jedenfalls die Überkorrektion an jener (Figur 123). (Betreffs der Kennzeichen für den Charakter der Korrektion, ob Über- oder Unterkorrektion, vgl. p. 112.) Aus dem gleichen Grunde — wegen der größeren Entfernung des Strahlungspunktes — ist dann aber wieder die Aberration, welche an der ebenen Unterfläche der Frontlinse des Objektivs eintritt (Figur 121), größer als die durch das ganze Deckglas hervorgebrachte und zwar in desto höherem Grade, je größer die Entfernung zwischen Deckglas und Frontlinse, d. i. der freie Objektabstand ist. Dieser letztere Umstand ist zu berücksichtigen für die Wahl der Lage des Strahlungspunktes zur Hinterfläche der Frontlinse bezw. zu deren aplanatischen Punkten.



Figur 124.
Ein Objektiv mit Korrektionsfassung.
Durch den Korrektionsring *b* wird die Entfernung zwischen dem oberen Teil *d* des Systems und dem unteren, mit der festen Fassung *a* verbundenen Teil *e* in angemessenen Grenzen variiert. Die Wurmfeder *c* hält beide Teile aus einander.

Dem ganzen Objektiv gegenüber wirkt also das Deckglas im überkorrigierenden Sinne und zwar in desto höherem Grade, je dicker das Deckglas ist. Das Objektiv muß daher für sich entsprechend unterkorrigiert sein, und es kann dasselbe genau genommen nur von Präparaten, die mit Deckgläsern von ganz bestimmter Dicke versehen sind, gute, möglichst aberrationsfreie Bilder geben.

Dies ist nun in der Tat der Fall. Die Empfindlichkeit gegen Abweichungen von derjenigen Deckglasdicke, für welche das Objektiv ursprünglich bezw. am besten korrigiert ist, wächst natürlich einerseits mit dem Öffnungswinkel (genauer mit der numerischen Apertur) des Objektivs Bei den größten Öffnungswinkeln, welche man den Strahlenbüscheln geben kann, ohne daß der praktische Nachteil weiterer Vergrößerung derselben in entsprechender Verminderung des freien Objektabstandes zu sehr hervortritt, nämlich bei Winkeln von 130—140° (numerische Apertur 0,90—0,95) werden an empfindlichen Objekten schon Abweichungen von der richtigen Deckglasdicke bemerklich, welche nur 0,01 bis 0,02 mm be-

tragen; bei geringerer Apertur (0,5) ist kaum noch eine Abweichung von 0,05 mm zu erkennen; noch kleinere Aperturen sind noch weniger empfindlich.

Amici trug diesem Umstand dadurch Rechnung, daß er seinen Mikroskopen mehrere Objektive gleicher Apertur beigab, von denen jedes auf eine andere Deckglasdicke korrigiert war. Andrew Ross in London berücksichtigte denselben (1837) auf einfachere, wenn auch weniger vollkommene, Weise, indem er den Abstand des Oberteils vom Unterteil des Objektivs variabel machte (sogen. „Korrektionsfassung"). Durch Veränderung dieses Abstandes schon innerhalb ziemlich enger Grenzen wird, wie wir früher sahen, eine genügende Veränderung des Korrektionszustandes des Systems herbeigeführt, wiewohl natürlich nur bei einer Stellung, also für Deckgläser von einer gewissen Dicke, die Korrektion der Abweichung eine möglichst vollkommene sein kann. Die Brennweite und Apertur des Systems braucht bei geeigneter Konstruktion derselben durch jene Distanzänderung nur sehr wenig beeinflußt zu werden. Zeiss und Wenham (1857) haben diesen Mechanismus noch verbessert, indem sie nicht das Unterteil gegen das Oberteil, sondern umgekehrt dieses gegen jenes verschiebbar machten, so daß einerseits das Präparat während der Variation ihrer Entfernung nahezu im Fokus des Systems bleibt und infolgedessen das beste Bild eines Präparates, dessen Deckglasdicke nicht bekannt ist, empirisch besser aufgesucht werden kann, andererseits die Gefahr beseitigt wird, daß durch Ändern der Korrektion das Präparat mit dem Objektiv in Berührung komme und das eine oder andere Schaden erfahre. Figur 124 stellt eine solche moderne Korrektionsfassung im Querschnitt dar.

Die Immersionssysteme.

Der zweite Faktor für die Größe der Aberration, welche das Strahlenbüschel beim Austritt aus dem Deckglase — und ebenso beim Eintritt in die Frontlinse — erfährt, ist offenbar die Differenz der Brechungsexponenten zu beiden Seiten der brechenden Fläche. Der Einfluß des Deckglases, sowohl gemäß seiner Gesamtdicke als in bezug auf die zu gewärtigenden Variationen dieser wird daher vermindert, wenn der Unterschied der Brechungsexponenten zwischen Deckglas bezw. Frontlinse und dem Medium zwischen beiden verringert wird, z. B. indem man zwischen Deckglas und Frontlinse des Objektivs eine Flüssigkeitsschicht einfügt. Systeme dieser Art — Immersionssysteme genannt — hat ebenfalls Amici zum erstenmal und zwar in einer praktisch ziemlich vollkommenen Weise realisiert. Er war es auch, der auf die weiteren Vorteile, die teils ohne weiteres mit einer solchen Einrichtung verknüpft sind, teils mit ihr verbunden werden können, hinwies und von ihnen Gebrauch machte:

1. Die Verminderung der Aberrationen durch das Deckglas macht das Objektiv nicht nur unempfindlicher gegen Variationen von dessen Dicke, sondern sie ermöglicht überhaupt einen vollkommeneren Korrektionszustand desselben, indem die Aberrationen, welche das Deckglas einführt, wegen ihres besonderen Charakters (Größe der Glieder höherer Ordnung) im darauffolgenden System immer schwer genügend vollständig aufhebbar sind. Immersionssysteme sind also unter sonst gleichen Umständen (gleiche numerische Apertur und Brennweite) optisch vollkommener herzustellen, als Systeme mit Luft zwischen Deckglas und Frontlinse (zum Unterschied als „Trockensysteme" bezeichnet).

2. Entsprechend der geringeren Brechung an den Planflächen des Deckglases und der Frontlinse ist auch der Lichtverlust durch partielle Reflexion an diesen Flächen vermindert, an welchen diese Reflexion gerade unter den maximalen überhaupt im System vorkommenden Inzidenzwinkeln erfolgt, jener Verlust daher auch sonst relativ beträchtlich ist. Immersionssysteme

liefern infolgedessen bei gleicher Apertur und Vergrößerung hellere Bilder als Trockensysteme.

Neben dem Lichtverlust an sich, und vielleicht in noch höherem Grade als er, machen sich bei Trockensystemen die Reflexe gerader Ordnung (vgl. das bei den photographischen Systemen auf p. 303 Gesagte) bemerklich, indem sie das Bild bis zu einem gewissen Grade verschleiern. Diese Reflexe fallen also bei den Immersionssystemen ganz oder fast ganz weg.

Endlich lehrt eine bekannte Erfahrung, daß große Schärfe im Bilde, d. h. möglichst vollkommene Konzentration des Lichtes auf die den Objektpunkten entsprechenden Bildpunkte infolge einer unwillkürlichen Täuschung des Urteils ebenfalls als Helligkeitsvermehrung empfunden wird. Also wirkt auch die ad 1 genannte Verbesserung der Bildqualität in demselben Sinne als eine, wenn auch nur scheinbare, Helligkeitsvermehrung.

3. Die numerische Apertur ist bei Trockensystemen theoretisch, für einen Divergenzwinkel des Büschels von 180°, auf die Größe 1,0 — praktisch, wie früher schon erwähnt, auf höchstens 0,95 — beschränkt. Ein Büschel, welches selbst innerhalb des Deckglases oder im Einbettungsmedium des Objekts größere Apertur (z. B. gleiche angulare Öffnung) hätte, würde durch Totalreflexion des überschießenden Teiles an der Oberfläche des Deckglases in jedem Falle auf die Apertur 1,0 reduziert werden[1]. Die Einfügung einer Flüssigkeitsschicht von höherem Brechungsexponenten als 1,0 mm schiebt die Grenze der Totalreflexion entsprechend hinaus, bis zu der durch den Brechungsexponenten dieser Zwischenschicht selbst gegebenen Grenze; sie gestattet also, daß die Apertur des in das Objektiv eintretenden Büschels — Apertur in dem von uns stets festgehaltenen Sinne als Produkt aus Brechungsexponent und Sinus des halben Öffnungswinkels — eine bis zu dem gleichen Betrage höhere wird. Die äußerste Grenze der auf diese Weise erreichbaren Apertur ist gegeben durch den niedrigsten Brechungsexponenten, welcher zwischen Objekt, Medium und Frontlinse (diese beiden einschließlich) an irgend einer Stelle in paralleler Schichtung vorhanden ist. (Es würde also z. B. eine Erhöhung des Brechungsexponenten der Zwischenschicht — Immersionsflüssigkeit — ohne gleichzeitige Erhöhung derjenigen aller anderen Medien zwischen Objekt und Frontlinse in dieser Beziehung ohne Vorteil sein.)

Mit dieser Erhöhung der Apertur sind dann — wofern innerhalb derselben entsprechend vollkommene Strahlenvereinigung erzielt wird — alle Vorteile verbunden, die wir p. 347 nochmals genannt haben, also insbesondere die Erhöhung der Lichtstärke und des Unterscheidungsvermögens des Objektivs und des ganzen Mikroskops.

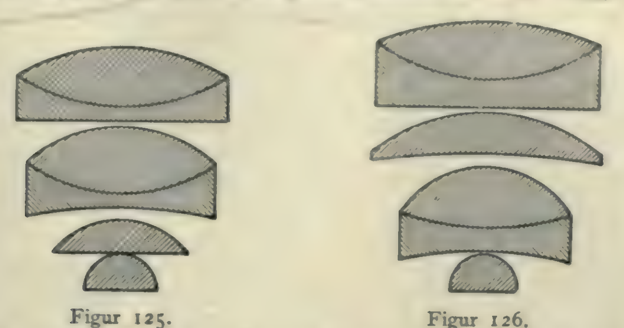
Die homogene Immersion.

Die hier gegebenen Hinweise auf die Vorteile der Immersionssysteme lassen ohne weiteres erkennen, daß dieselben am meisten zur Geltung kommen müssen, wenn eine Brechung an der Oberfläche des Objektivs überhaupt nicht stattfinden kann, d. h. wenn Deckglas, Immersionsflüssigkeit und Frontlinse des Objektivs gleiche Brechungsexponenten besitzen, eine optisch homogene Schicht bilden. Es sind daher, nachdem Immersionssysteme anderer Art, insbesondere solche mit Wasser als Immersionsflüssigkeit von Amici 1840 eingeführt und von E. Hartnack 1855 verbessert und beim wissenschaftlichen Publikum eingeführt waren, solche Systeme mit homogener Immersion im Jahre 1878 von Abbe unter Mitwirkung der Zeissschen Werkstätte auf eine An-

[1] Eine ausführliche Darstellung dieses Falles, bei dem sich eine unendlich entfernte, unter dem Winkel der Totalreflexion erscheinende E.-P. ergibt, s. in L. Dippels unten angeführten Lehrbuch p. 64; seine Benutzung zur Brennweitenbestimmung von Systemen mit größerer Apertur als 1,0, s. unten im Kapitel über die Konstantenbestimmung optischer Systeme.

regung von J. W. STEPHENSON[1] hin konstruiert worden, in denen die genannten Momente praktisch zur Geltung gebracht wurden[2]. Das bei diesen Systemen verwandte Zedernholzöl ($n_D = 1{,}515$) ist auch jetzt noch die am häufigsten benutzte Immersionsflüssigkeit.

Die Apertur, die bei den älteren Immersionssystemen selten den Wert 1,0 überstieg, beträgt in den modernen Systemen bei Wasser als Immersionsflüssigkeit gewöhnlich 1,15—1,20, bei homogener Immersion 1,25—1,35.



Figur 125. Figur 126.

Zwei achromatische Objektive von 2 mm Brennweite, $a = 1{,}30$ (Maßstab 5:1).

Die Figuren 125 und 126 veranschaulichen den allgemeinen Aufbau von Systemen für homogene Immersion. Beide stellen Systeme von 2 mm Brennweite und einer Apertur von 1,30 dar (in 5-fachem Maßstabe). Figur 125 enthält die sogen. „Duplex front"-Linse, eine manchmal plankonvexe, manchmal konkavkonvexe Linse über der halbkugeligen eigentlichen Frontlinse. Figur 126 enthält diese einfache Linse zwischen den beiden (teilweise) achromatisierten Doppellinsen.

Die Apochromate.

Endlich ist innerhalb des Rahmens der vorstehend gekennzeichneten Konstruktionstypen eine Verbesserung nach der qualitativen Seite hin noch erfolgt durch die Einführung der sogen. Apochromate von ABBE, ausgeführt ebenfalls von der ZEISSschen Werkstätte im Jahre 1886. In diesen sind, worauf wir bereits mehrmals Gelegenheit hatten hinzuweisen, mehrere erhebliche Defekte der Strahlenvereinigung beseitigt, die den bisherigen Systemen anhafteten und deren Leistungsfähigkeit merklich unterhalb des durch die numerische Apertur theoretisch gegebenen Maßes hielten. Es ist nämlich in ihnen[3]

1. das sekundäre Spektrum auf etwa den zehnten Teil des bei den früheren Systemen (vgl. p. 176) verbleibenden Betrages vermindert und damit praktisch ganz unmerklich gemacht.

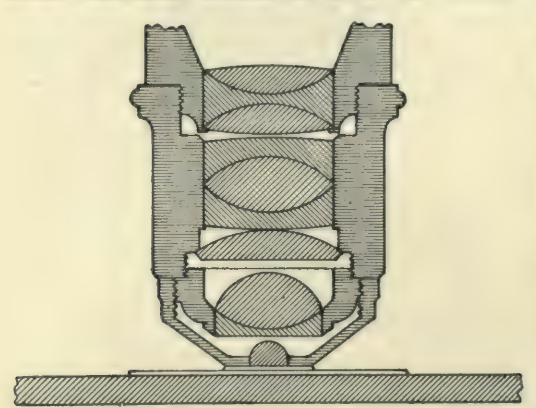
2. die chromatische Differenz der sphärischen Aberration beseitigt; d. h die sphärische Aberration ist nicht nur für eine, sondern vollkommen für drei und damit praktisch für alle Farben des sichtbaren Spektrums aufgehoben. Wie wir früher nachwiesen, ist infolge des Zusammentreffens dieses und des unter 1 erwähnten Momentes auch das sekundäre Spektrum für alle Zonen des Systems aufgehoben.

---

[1] Die Prioritätsansprüche, welche MAYALL für den amerikanischen Optiker TOLLES erhebt (Cantor lectures p. 95) erweisen sich bei näherer Prüfung der von ihm selbst angeführten Quelle als gänzlich unhaltbar. — [2] Siehe die erste Mitteilung über dieses System von J. W. STEPHENSON, Journ. Roy. Micr. Soc. **1.** 51. 1878. E. ABBE, Sitzber. Jen. Ges. f. Med. u. Naturw. 1879, Sitzg. v. 10. Jan. — [3] Vgl. E. ABBE, über Verbesserungen des Mikroskops mit Hilfe neuer Arten optischen Glases. Sitzber. Jen. Ges. f. Med. u. Naturw. 1887. p. 107. Sitzg. v. 9. Juli 1886. (Mehrfach in anderen Zeitschriften wiedergegeben. Auch zahlreiche Besprechungen dieser Systeme von anderen an verschiedenen Stellen.)

Der Vorteil dieser Systeme besteht einerseits, wie erwähnt, in der vollständigeren Ausnützbarkeit ihrer Apertur und zweitens darin, daß sie gemäß dem auf p. 355 ff. Ausgeführten die Anwendung starker Okulare, d. h. die Ausführung in größeren Brennweiten, erlauben.

Sie gestatten gleichzeitig eine Verbesserung der Bildqualität außerhalb der Achse. Denn während bei den Systemen gewöhnlicher Art jeder Zone des Objektivs, wie sie eine andere Vereinigungsweite und andere chromatische Korrektur besitzt, so auch eine andere Vergrößerungsdifferenz für die verschiedenen Farben zukommt, so ist hier, infolge der Herstellung konstanten Sinusverhältnisses für mehrere Farben, jene Vergrößerungsdifferenz zwar als solche nicht aufgehoben, aber doch für alle Zonen die gleiche. Sie läßt sich daher im Okular durch eine entgegengesetzt gleiche in diesem stattfindende Vergrößerungsdifferenz völlig aufheben, kompensieren. Die betreffenden Okulare sind darum „Kompensationsokulare" genannt worden.



Figur 127.
Ein Apochromat, $f = 2$ mm, $a = 140$.
(Dreifach vergrößert.)

Figur 127 stellt ein Apochromatsystem von 2 mm Äquivalentbrennweite und einer numerischen Apertur von 1,40, sowie dessen Metallfassung in dreifacher natürlicher Größe im Querschnitt dar. Es hat über der ersten binären Linse dieselbe einfache nahezu plankonvexe Linse wie das in Figur 125 dargestellte achromatische System. Hier folgen jedoch auf sie nach oben hin noch zwei ternäre Kombinationen.

Betreffs der weiteren Versuche, die bei den Systemen der homogenen Immersion erreichte Grenze der Apertur (von höchstens 1,40) zu überschreiten, — und dies womöglich unter Wahrung der Vorzüge, welche die Apochromate besitzen — und betreffs der Aussichten, welche die hierauf gerichteten Bestrebungen nach dem gegenwärtigen Stande unserer Erkenntnis überhaupt haben, verweist der Verfasser auf seine Darlegungen an anderer Stelle[1].

Die Okulare.

Über die zum Mikroskop gehörigen Okulare und deren häufigste Konstruktionstypen wollen wir im Zusammenhang mit den beim Fernrohr angewendeten handeln, verweisen daher auf die dort gegebene Darlegung.

Die **Beleuchtungsvorrichtungen** des Mikroskops werden unten besonders besprochen werden (XIV. Kapitel).

Die mechanische Einrichtung des Mikroskopstativs ist in den zahlreichen, zum Teil im folgenden angeführten Spezialwerken und in den Katalogen der

---

[1] Betreffs der ersteren S. Czapski, Über ein System von der Apertur 1,60 (Monobromnaphtalinimmersion), hergestellt nach Rechnungen von Prof. Abbe in der optischen Werkstätte von Carl Zeiss in Jena. Ztschr. f. wissensch. Mikroskopie. **6**. 417. 1889. Journ. Roy. Micr. Soc. p. 11. 1890, s. auch van Heurck, La nouvelle combinaison optique de Mr. Zeiss etc. Anvers 1890. Betreffs des zweiten Gegenstandes S. Czapski, „Die voraussichtlichen Grenzen der Leistungsfähigkeit des Mikroskops" (Brief an Herrn van Heurck, abgedruckt in 4. Aufl. von dessen „Le microscope". Anvers 1891. p. 306). In erweiterter Form Ztschr. f. wissensch. Mikroskopie. **8**. 145. 1891, und Biol. Centralblatt. **9**. 609. 1891.

größeren Firmen auseinandergesetzt, die sich mit der Herstellung von Mikroskopen befassen; ebenso die Konstruktion, Wirkungsweise und Anwendung der zahlreichen zum Mikroskop gehörigen Nebenapparate — zum Bewegen, Zeichnen, Messen, zur Erwärmung, Kühlung, elektrischen Reizung der Objekte, zum Beobachten im spektral zerlegten oder polarisierten Lichte, zur Erzeugung aufrechter, stereoskopischer oder reeller Bilder (auf Schirmen), zum Anbringen und schnellen Wechseln der Objektive u. s. w.

Die binokularen Mikroskope.

1. Zwei Mikroskope. Es werden entweder zwei vollständige Mikroskope auf dasselbe Objekt gerichtet, was natürlich große Objektabstände voraussetzt, die einfachste und älteste[1] Konstruktion, neuerdings in dem ZEISS-GREENOUGHschen Binokular wieder aufgenommen, s. w. u.

2. Geometrische Teilung der Öffnung. Oder es werden die aus dem Objektiv tretenden Strahlenbüschel geteilt und die eine Hälfte einem, die andere einem anderen Okulare zugeführt. (Wir machen hier keinen Unterschied, ob die mechanische Anordnung aus zwei verschiedenen Tuben besteht, oder ob nur ein Tubus und ein Doppelokular vorhanden ist.) Diese Teilung geschieht, indem die eine Hälfte seitlich abgelenkt wird, oder indem beide nach verschiedenen Seiten abgelenkt werden; und die Ablenkung wird entweder durch Reflexion an geneigten Flächen vollzogen (RIDDELL; später NACHET, WENHAM; man benutzt natürlich die Totalreflexion in Prismen; auch ist es meistens nötig, noch weitere Reflexionen folgen zu lassen, um die bereits abgetrennten Büschel in passende Richtungen zu bringen); oder sie geschieht durch die Brechung in achromatisierten Prismen (WENHAM). Man findet diese Anordnungen (sowie die im folgenden beschriebenen) in den meisten der unten angeführten Spezialwerke, z. B. bei HARTING[2] und DIPPEL[3].

Bei allen den hier zusammengefaßten Anordnungen ist eine Kante zwischen zwei gegen einander geneigten Flächen die Grenze der beiden zu trennenden Büschelgruppen; sie bildet also für jedes der beiden Mikroskope, die aus dem einen ursprünglichen entstanden gedacht werden können, einen Teil der Aperturbegrenzung. Um keine sekundäre Abblendung eintreten zu lassen (p. 215), durch die die Büschel seitlicher Objektpunkte ungleich geteilt werden würden, wäre also zu fordern, daß diese Kante mit der Aperturblende oder einem ihrer Bilder zusammenfällt (die Teilung der Büschel muß an einer Stelle ausgeführt werden, „wo alle von den verschiedenen Punkten des Objektfeldes ausgehenden Strahlenkegel einen gemeinsamen Querschnitt besitzen“ [ABBE[4]]). Man sucht bei stärkeren Objektiven dieser Forderung dadurch zu entsprechen, daß man die Prismen dem Objektiv so nahe als möglich bringt (WENHAM, STEPHENSON), wobei die mechanische Anordnung freilich kompliziert wird; oder indem man sie, wie beim Doppelokular von TOLLES, das nach Art eines terrestrischen Okulars (s. das XV. Kapitel) konstruiert ist, am Orte eines reellen Bildes der Aperturblende anbringt, das noch vor der A.-P. erzeugt wird und größer als jene ist. — Alle Anordnungen zur Teilung der Aperturblende stellen an die Korrektion des Objektivs hohe Anforderungen.

3. Optische Teilung. Endlich kann eine andere Art der Teilung der Strahlenbüschel herbeigeführt werden, indem jeder Strahl durch partielle Reflexion und Brechung in zwei zerlegt wird, von denen der eine (etwa geradeaus) zu einem

[1] Chérubin d'Orléans, La dioptrique oculaire, Paris 1671, z. B. p. 148 ff.; La vision parfaite Paris 1677 u. 1681, div. loc., z. B. 4. Partie, Sect. I, 1. Kap. u. Sect. III. — [2] P. HARTING, Das Mikroskop. Übers. von THEILE. 2. Aufl. Braunschweig 1866. **1.** 193—215. — [3] L. DIPPEL, Das Mikroskop. 2. Aufl. Braunschweig 1882. 1. Teil. p. 553—561 (Doppeltuben) und p. 591 bis 599 (Doppelokulare). — [4] E. ABBE, Ztschr. f. Mikrosk. **2.** 207. 1880; CARLS Rep. f. Exp.-Phys. **17.** 207. 1881; Ges. Abhandl. **1.** 254. Jena 1904.

Okular verläuft, der andere (gewöhnlich durch eine weitere Reflexion) in das zweite Okular geleitet wird. Da hierbei keine neue Strahlenbegrenzung eingeführt wird, so kann diese partielle Reflexion an einer beliebigen Stelle stattfinden. Dies ist z. B. die Einrichtung eines binokularen Mikroskops von Powell und Lealand, wo die partielle Reflexion an der einen Fläche einer planparallelen Platte stattfindet. Dagegen verwandte Abbe[1] in seinem stereoskopischen Okular zum gleichen Zwecke eine zwischen zwei Glaskörper eingefügte Luftschicht, die beliebig dünn gemacht werden kann, um Doppelbilder zu vermeiden, und bei der dem im Glase reflektierten Strahle leicht große Intensitäten gegeben werden können. — Auch die Doppelbrechung in Kalkspatprismen ist in ähnlicher Weise verwandt worden.

Das stereoskopische Mikroskop.

1a. Die oben zuerst genannte Einrichtung zweier gegen einander geneigter Mikroskope entspricht offenbar vollständig dem Schema eines stereoskopischen Instruments. Derartige stereoskopische Mikroskope wurden auf Anregung von H. S. Greenough 1897 von C. Zeiss[2] konstruiert. Der Winkel der Tuben ist gleich dem Winkel der Blicklinien beim Nahesehen (14^0); der Objektabstand groß; die Vergrößerung (bis 72-fach) kann daher keine hohen Werte erreichen, die aber auch nicht der Zweck solcher Konstruktionen sind, bei denen große Tiefe der Schärfe notwendig ist (s. u.). Die Benutzung Porroscher Prismen zur Bildumkehrung (s. das Kapitel über das Fernrohr) ermöglichte hierbei eine starke Verkürzung der beiden Tuben und leichte Anpassung an den Augenabstand. Diese Instrumente sind in der von M. v. Rohr gegebenen Theorie (Kap. VIII A) des Sehens beprochen worden. Ihre Wirkung ist danach durch die Lagen ihrer beiden E.-P. und A.-P., der beiden E.-E. und M.-E. und das zwischen dem einen und dem anderen bestehende Vergrößerungsverhältnis bestimmt.

2a. Prinzipiell völlig gleichartig[3] ist die stereoskopische Wirkung der binokularen Mikroskope der zweiten Art. Auch hier haben wir zwei Eintrittspupillen, jedoch von halbkreisförmiger Gestalt, als deren Mittelpunkte man etwa die Schwerpunkte der Halbkreise wird auffassen können. Da wir die Perspektive und damit das stereoskopische Sehen auf einen reinen Projektionsvorgang zurückgeführt haben, so macht es hierfür keinen Unterschied, ob die bloße dioptrische Wirkung wie oben durch zwei Objektive oder wie hier durch eins vermittelt wird. Nur wird hier stets der Spezialfall eintreten, daß beide E.-E. zusammenfallen und schief gegen alle abbildenden Büschel stehen. Die Anordnung ist also einer Stereoskopkamera vergleichbar, deren Objektivachsen parallel stehen, die aber für nahe Objekte gebraucht wird.

3a. Die Schwierigkeit, die Trennung der Strahlenbüschel an der Stelle eines Aperturblendenbildes vorzunehmen, ohne zu komplizierten Konstruktionen zu gelangen, führte Abbe[4] dazu, die dritte Art des binokularen Mikroskops stereoskopischen Zwecken anzupassen. Zunächst liefert diese (und nur diese) identische Abbilder des Objektraums (vgl. p. 250) in beiden Okularen (die zweite Art liefert natürlich auch identische Bilder der gemeinsamen E.-E.). Abbe bringt nun in den beiden A.-P. halbkreisförmige Blenden (Okulardeckel) an, die die Hälfte jeder A.-P. verdecken; so macht er für jedes Auge nur eine Hälfte der A.-P. wirksam, wodurch diese Konstruktion sich auf die oben genannten vollständig reduziert. Zwar haftet gegenüber jenen seinem „stereoskopischen Okular" der Nachteil an, daß die Hälfte des auf jedes Okular auffallenden Lichtes verloren geht; aber dieser Nachteil kann praktisch so gut wie unschädlich gemacht werden. Weil nämlich

---

[1] E. Abbe, l. c. — [2] S. Czapski u. W. Gebhardt, Ztschr. f. wiss. Mikr. **14.** 293. 1897 u. H. Harting, ibid. **15.** 299. 1899. — [3] Es verdient dies gegenüber der meistens üblichen Darstellung hervorgehoben zu werden. — [4] E. Abbe, l. c.

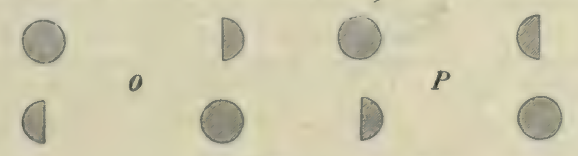
die beiden Augen der meisten Menschen verschiedene Lichtempfindlichkeit besitzen, ist es schon für das gewöhnliche binokulare Sehen vorteilhaft, die Intensität der durch partielle Reflexion getrennten Strahlen ungleich zu machen. In dem ABBEschen Okulare verhalten diese sich wie 3 : 1. Nun genügt es aber meistens, wenn bloß eine A.-P. halb abgeblendet wird. Dann wird der Abstand der beiden E.-P. freilich auf die Hälfte reduziert, ist aber fast immer für die stereoskopische Wirkung ausreichend. Blendet man also die dunklere A.-P. auf die Hälfte ab, so beträgt der Lichtverlust im ganzen nur ein $^1/_6$, kommt also praktisch nicht in Betracht.

„Orthoskopie" und „Pseudoskopie". Wenn man ein binokulares Mikroskop als stereoskopisches benutzt oder in ein solches verwandelt, so ist stets zu fragen, ob es die Tiefendimensionen gleichsinnig oder verkehrt wiedergibt (erhabene Gegenstände erhaben oder vertieft erscheinen läßt, „ortho"- oder „pseudoskopisch" wirkt). So würden zwei gewöhnliche, bildumkehrende Mikroskope, neben einander auf dasselbe Objekt gerichtet, die pseudoskopische Wirkung ergeben; man muß



Figur 128.
ABBEs Kriterium der Orthostereoskopie.

also die Bilder aufrichten oder wenigstens rechts-links-spiegelverkehrt machen (vgl. p. 295). Dasselbe gilt von einigen Konstruktionen der zweiten Art; bei anderen ist die richtige Wirkung dadurch erreicht, daß man die über dem Objektiv getrennten Büschel einander durchkreuzen läßt, um dem rechten Auge die linke, dem linken die rechte E.-P. zuzuordnen; denn auch die Vertauschung der beiden Augen dargebotenen Bilder verwandelt nach p. 293 die orthoskopische in die pseudoskopische Wirkung und umgekehrt. Auch kann man bei manchen



Figur 129.
ABBEs Kriterium der Orthostereoskopie.

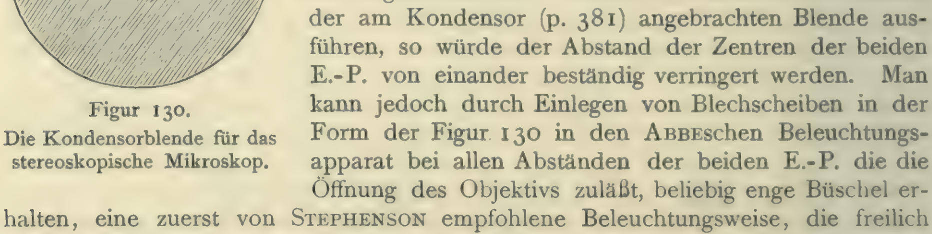
Instrumenten beide Wirkungen nach Belieben erreichen, z. B. beim ABBEschen Okular, indem man die beiden Okulardeckel um 180° dreht. ABBE[1] hat ein einfaches Mittel angegeben, um beliebige Instrumente von vornherein in bezug auf Orthoskopie und Pseudoskopie zu beurteilen. Bestehen die beiden A.-P. aus zwei Halbkreisen vom Schema *O* der Figur 128, so ist die Wirkung orthoskopisch, zeigen sie das Aussehen des Schemas *P*, so ist sie pseudoskopisch. Zum Beweise geht ABBE vom monokularen Mikroskop aus. Denken wir uns das räumliche Objekt des Mikroskops in ein räumliches Bild verwandelt, das von der A.-P. aus auf die der E.-E. konjugierte M.-E. (p. 249) projiziert wird, so liefert die rechte Hälfte der A.-P., für sich allein benutzt, rechtsäugige Perspektive[2] in bezug auf jenes räumliche Bild. Infolge der stets rechtläufigen Abbildung (p. 38, das Objekt des Mikroskops wird niemals durch die Brennebene geschnitten) liegt das räumliche Bild aber, mag es auch lateral umgekehrt sein, in der Tiefenerstreckung wie das räumliche Objekt. Also liefert die rechte

[1] E. ABBE, l. c. u. Journ. Roy. Micr. Soc. (2) **1.** 203. 1881 und Ges. Abhandl. **1.** 313. Jena 1904. — [2] Rechtsäugige Perspektive soll eine solche Projektion heißen, bei welcher Punkte, die näher am Zentrum sind als die M.-E. (oder E.-E.), nach links verschoben erscheinen.

Hälfte der A.-P. auch in bezug auf das Objekt rechtsäugige Perspektive. Bei der Trennung der beiden Hälften der A.-P., auf welche Weise diese auch ausgeführt sein mag, muß also die rechte Hälfte der A.-P. eines monokularen Mikroskops ins rechte Auge treffen, um Orthoskopie zu ergeben; und dies ist beim Schema *O* der Fall; beim Schema *P* das Umgekehrte. Wird aber, wie es beim Abbeschen Okulare möglich ist, dem einen Auge die ganze A.-P. und nur dem anderen die halbe zugänglich gemacht, so geben nach dem Gesagten die Blendenanordnungen *O* der Figur 129 orthoskopische, die Anordnungen *P* pseudoskopische Wirkung.

Die Verhältnisse des stereoskopischen Raumbildes (Homöomorphie oder Heteromorphien) sind aus den allgemeinen auf p. 281 ff. von M. v. Rohr aufgestellten Sätzen sofort abzuleiten. Für den ersten Fall der beiden getrennten Mikroskope ist diese Frage an der zitierten Stelle bereits behandelt und die Greenoughsche Bedingung der Homöomorphie abgeleitet worden.

Die zweite und dritte Art des stereoskopischen Mikroskops macht den Abstand der Mittelpunkte der beiden E.-P. vom Öffnungswinkel des Objektivs abhängig. Auch ist die Angabe der „Mittelpunkte“, dieser halbkreisförmigen Öffnungen unsicher; man müßte wohl die Schwerpunkte der Halbkreise als Mittelpunkte der Pupillen einführen.



Figur 130.
Die Kondensorblende für das stereoskopische Mikroskop.

Nun untersucht man aber vielfach gerade zur stereoskopischen Betrachtung geeignete Objekte gern mit engen Büscheln. Wollte man dies durch Zuziehen der am Kondensor (p. 381) angebrachten Blende ausführen, so würde der Abstand der Zentren der beiden E.-P. von einander beständig verringert werden. Man kann jedoch durch Einlegen von Blechscheiben in der Form der Figur 130 in den Abbeschen Beleuchtungsapparat bei allen Abständen der beiden E.-P. die die Öffnung des Objektivs zuläßt, beliebig enge Büschel erhalten, eine zuerst von Stephenson empfohlene Beleuchtungsweise, die freilich große Anforderungen an die Güte der Objektive stellt, aber nach Abbe an geeigneten Präparaten äußerst frappante stereoskopische Effekte selbst mit den stärksten Objektiven gestattet.

Bei ihrer Benutzung sind nun die Mitten der beiden E.-P., und ihr Abstand von einander leicht anzugeben. Wir können so z. B. den Konvergenzwinkel der von einem mittleren Objektpunkte nach jenen Zentren ausgehenden Visierlinien leicht gleich dem halben Öffnungswinkel (dem Winkel u) des Objektivs machen, wenn wir beiden Augen die halbe, oder gleich $\frac{1}{2}u$, wenn wir einem Auge die ganze Öffnung des Objektivs zugänglich machen. Mit Hilfe dieser Daten ist aber die Theorie M. v. Rohrs ohne weiteres auch auf die Instrumente der zweiten und dritten Gattung anzuwenden. Sie ergibt, daß nach den Bezeichnungen des Autors (p. 282) die von ihnen erzeugten Raumbilder fast stets heteromorph sein werden; denn gewöhnlich ist die halbe Öffnung des Objektivs nicht gleich der Konvergenz der Augen (oder der beiden Okulartuben); und ferner werden diese Mikroskope stets mit Okularen angewandt, die die bildseitigen Gesichtsfeldwinkel gegen die objektseitigen vergrößern. Bei der Wahl eines Objektivs von passender Öffnung oder im Falle größerer Öffnung bei Anwendung passender Blendscheiben nach Figur 130, so daß die Konvergenz der objektseitigen Hauptvisierlinien etwa 14^0 beträgt, und bei Anwendung eines Okulars, dessen im Sinne von p. 350 bestimmte (aus Tubuslänge und eigentlicher Okularvergrößerung zusammengesetzte, sogen. Fernrohr-)Vergrößerung gleich 1 ist, würde sich auch hier Homöomorphie einstellen.

Der Bereich des stereoskopischen Sehens ist durch die Tiefe der Schärfe

angegeben. Dieser Tiefenraum nimmt, wie auf p. 260 nachgewiesen wurde, bei hohen Vergrößerungen zuerst rasch, dann langsamer auf sehr geringe Werte ab. „Dem Gesagten zufolge wird eine einigermaßen ausgiebige stereoskopische Beobachtung in keinem Falle über solche Objekte des mikroskopischen Studiums hinausreichen können, die sich schon mit mäßigen Vergrößerungen erforschen lassen, selbst dann nicht, wenn der optische Apparat, wie bei dem in Rede stehenden Doppelokular[1], noch unter hohen Vergrößerungen gleichmäßig fort funktioniert. Sobald solche nötig werden, beschränkt sich die stereoskopische Wahrnehmung auf Gebilde von so geringer Tiefe, daß deren plastische Anschauung kaum mehr einen wissenschaftlichen Gewinn abwerfen kann, obwohl sehr effektvolle Bilder an geeigneten Objekten auch noch unter diesen Umständen möglich sind[2].“

Spezialwerke über das Mikroskop.

Von diesen nennen wir vornehmlich solche, die einen Fortschritt in der Darstellung der optischen Theorien enthalten, sehen aber von derjenigen Literatur ab, die allein die physikalische Theorie der mikroskopischen Bilderzeugung behandelt.

Aus älterer Zeit: C. R. Goring and A. Pritchard, Micrographia etc. London 1837. — D. Brewster, Treatise on the microscope. Edinburg 1837. — A. Chevalier, Des microscopes. Paris 1839. Deutsche Übers. v. Kersten. Quedlinburg 1842. — H. v. Mohl, Mikrographie. Tubingen 1846. — P. Harting, Das Mikroskop u. s. w. Deutsche Ausgabe v. Theile. 1. Aufl. Braunschweig 1859. 2. Aufl. ibid. 1866. (Von Wert ist insbesondere der historische Teil dieses Werkes.) — Von neueren Werken: C. Nägeli u. S. Schwendener, Das Mikroskop. 2. Aufl. Leipzig 1877. (Engl. Übers. des optischen Teiles von Crisp u. Mayall. London 1887.) — L. Dippel. Das Mikroskop. 1. Bd. Handb. d. allgem. Mikroskopie. Zweite (unter Mitwirkung von Abbe bearbeitete) Aufl. Braunschweig 1882. Auszug hieraus: L Dippel, Grundz. d. allgem. Mikroskopie. ibid. 1885. — W. Carpenter, The microscope and its revelations, insbesondere die neueste (8.) von H. W. Dallinger besorgte Auflage dieses Werkes. London 1901. — H. van Heurck, Le Microscope. 4. ed. Anvers 1891. Engl. Übers. London und New York 1893. Als sehr brauchbare kurzere Darstellung ist empfehlenswert E. Giltay, Inleiding tot het gebruik van den Microscoop. Leiden 1885. — A. Zimmermann, Das Mikroskop. Ein Leitfaden der wissenschaftlichen Mikroskopie. Wien 1894. — R. J. Petri, Das Mikroskop. Von seinen Anfängen bis zur jetzigen Vervollkommnung für alle Freunde dieses Instruments. Berlin 1896. — K. Strehl, Theorie des Mikroskops auf Grund der Formeln für die Theorie des Fernrohrs. Ztschr. f. Instrumentenk. **18.** 301. 1898. — St. v. Apathy, Die Mikrotechnik der tierischen Morphologie. 1. Abt. Braunschweig 1896. 2. Abt. Leipzig 1901. — E. Abbe, Gesammelte Abhandl. **1.** Jena 1904.

XIII. Die vergrößernden Projektionssysteme

(für die sogen. Makro- und Mikroprojektion).

Die Makroprojektion. Für die Projektion mit schwächeren Vergrößerungen werden, wie bereits oben erwähnt, photographische Objektive gebraucht, natürlich dem Objekt mit der Seite zugekehrt, die sie sonst der Mattscheibe zuwenden. Dann ist meist ein ähnlicher Strahlengang erreicht wie bei der gewöhnlichen Benutzung. Die Elemente der Abbildung sind durch die auf p. 297 gegebenen Formeln bestimmt.

Eine allgemeine Regel über die Bildfehler eines Systems bei Vertauschung von Objekt und Bild ohne Änderung der Lagebeziehungen zwischen diesen beiden Ebenen und dem System läßt sich aus dem Straubelschen Satze auf p. 161 herleiten. Wenn man dort df' als den auf der Bildseite entstehenden

[1] Gemeint ist das Abbesche stereoskopische Okular. — [2] E. Abbe, l. c. (Ges. Abhandl. **1.** 262).

Zerstreuungskreis auffaßt, der durch Büschel eines Objektpunktes mit der Öffnung $d\omega$ hervorgebracht wird; df als einen Zerstreuungskreis bei umgekehrter Benutzung des Systems, durch ein Büschel von der Öffnung $d\omega'$ erzeugt, das längs desselben Hauptstrahles verläuft, so ist

$$\frac{df'}{df} = \frac{n^2\, d\omega \cos\vartheta}{n'^2\, d\omega' \cos\vartheta'} .$$

Vernachlässigen wir die Aberrationen, nehmen wir also an, daß das System die betrachteten Flächenstücke auf einander abbildet und betrachten wir $d\omega$ und $d\omega'$ als durch konjugierte Strahlen gebildete Raumwinkel, so ist nach dem Satze von Clausius, p. 162, der rechtsstehende Bruch gleich der Flächenvergrößerung, die in den konjugierten Elementen besteht $= \beta^2$. Dieser Beweis bedürfte, um streng zu sein, wesentlicher Ergänzungen. Hier sollte nur für praktische Zwecke die folgende Überschlagsrechnung abgeleitet werden:

Es wird bei der Anwendung des Objektivs als Projektionssystem der Radius des Zerstreuungskreises soviel mal größer sein, als bei der umgekehrten Anwendung, als der Maßstab der Vergrößerung beträgt.

Wir haben früher den Zerstreuungskreis im Bilde „auf das Objekt zurückbezogen", d. h. durch das aberrationsfrei gedachte System (durch die Paraxialstrahlen) zurück ins Objekt abgebildet. Aus dem soeben gewonnenen Resultate folgt, daß der so entstehende objektseitige Zerstreuungskreis derselbe ist, den ein im früheren Bildort befindliches Objekt erzeugen würde, ein für gewisse Fälle auch aus der Anschauung zu folgerndes Ergebnis, von dem wir schon auf p. 331 Gebrauch gemacht haben.

Für die photographische Vergrößerung ergeben sich hiernach sehr hohe Anforderungen an die Güte der Strahlenvereinigung, wenn man die Bilder nicht aus einem der Vergrößerung entsprechenden entfernteren Standpunkt betrachten, sondern Einzelheiten erkennen will. Es sind daher die besten Systeme für diesen Zweck zu wählen. In anderen Fällen und besonders bei der Projektion sollte man dafür sorgen, daß der Beschauer die Gegenstände des Bildes etwa unter dem richtigen Gesichtswinkel sieht; dann ist die Anforderung an die Schärfe natürlich bei beiden Arten des Gebrauchs des Systems die nämliche, die im Kapitel über die photographischen Objektive erörtert worden ist.

Die Tiefenwirkung bei den vergrößernden Projektionssystemen ist in den allgemeinen Erörterungen von Kapitel VIIB enthalten.

Die Beleuchtungsvorrichtungen der Projektionsapparate und die Beleuchtungsstärke der Bilder werden im folgenden Kapitel (XIV) behandelt.

Die Mikroprojektion und Mikrophotographie.

Um bei beschränktem Abstande zwischen Objekt und Bild stärkere Vergrößerungen zu erreichen, werden zunächst immer kürzere Brennweiten notwendig. Man bedient sich bis zu etwa 100-fachen Vergrößerungen schwächerer Mikroskop- und neuerdings auch photographischer Objektive bis zu etwa 20 mm Brennweite herunter, die nach dem oben Gesagten, wenn sie zu photographischen Aufnahmen benutzt werden, den am besten korrigierten Typen angehören müssen; darüber hinaus wendet man Mikroskopobjektive an. Deren Aufgabe unterscheidet sich hierbei in geometrischer und physikalischer Beziehung in nichts von der bei subjektivem Gebrauche, so daß bezüglich der Bedeutung der Apertur und wegen der Korrektion auf das früher Gesagte verwiesen werden muß; nur die chromatische Korrektion muß für photographische Zwecke natürlich eine andere sein. Daher sind hier die Apochromate (vgl. p. 367), die innerhalb des ganzen Spektrums äußerst geringe Abweichungen besitzen und gewissermaßen rein aktinische und optische Korrektion (vgl. p. 178) vereinigen, nicht nur den gewöhnlichen optisch

korrigierten achromatischen Objektiven überlegen, sondern auch denjenigen Achromaten, die die sogen. photographische Korrektion besitzen, d. h. etwa die Linien D und G' vereinigen.

Es muß nun natürlich auf die oft erwähnte Eigenschaft aller einigermaßen starken Mikroskopobjektive Rücksicht genommen werden, nur für eine bestimmte Objektentfernung (Tubuslänge) korrigiert zu sein. Bringt man die photographische Platte an die Stelle, wo bei den zu subjektivem Gebrauche bestimmten Objektiven das reelle Bild entsteht, so erhält man gewöhnlich zu geringe Vergrößerungen. Man kann zwar die Objektive auch für andere Tubuslängen korrigieren, aber es treten bei einer Arbeitsteilung zwischen zwei Systemen die eigentümlichen Vorteile, die wir oben ausführlich auseinandergesetzt haben, zum größten Teile hier ebenfalls in Erscheinung. Es wurden daher lange Zeit die gewöhnlichen Okulare der Mikroskope, außerdem nach WOODWARD eine Negativlinse (der Amplifier) verwendet, um beim Gebrauch des Objektivs mit richtigem Objektabstand dessen Bild nochmals zu vergrößern[1]; die letztere Einrichtung stellte ein mikroskopisches Teleobjektiv vor (s. p. 313). Während die Verteilung der dioptrischen Wirkung auf Objektiv und „Okular" im wesentlichen die früher auseinandergesetzte sein muß, gleichgültig, ob reelle oder virtuelle Bilder erzeugt werden, und dieser Unterschied nur geringe Änderungen im Okular[2] nötig machen würde, so wird doch speziell für mikrophotographische Zwecke wiederum die Aufgabe des Okulars durch den mehrfach erwähnten Umstand modifiziert, daß Photogramme einer Untersuchung aus viel geringerem Abstande standhalten müssen, als vom Orte der A.-P. aus, wie die virtuellen Bilder, die das gewöhnliche Okular entwirft. Diese Aufgabe wurde zuerst durch die Projektionsokulare von ABBE gelöst, die C. ZEISS zugleich mit den Apochromaten einführte (1886). Diese bestehen aus einer Kollektivlinse und einem sphärisch und chromatisch korrigierten Objektiv, an dessen A.-P. eine reelle Blende angebracht wird, um bei der Photographie störendes Nebenlicht zu beseitigen. Die bei den stärkeren Mikroskopobjektiven auftretende Vergrößerungsdifferenz der verschiedenen Farben wurde in den Projektionsokularen in gleicher Weise wie in den Kompensationsokularen aufgehoben.

Die Beleuchtungsvorrichtungen für die Mikroprojektion und -photographie s. im folgenden Kapitel. In der Literatur nehmen die verwickelten praktischen Fragen der Mikrophotographie natürlich einen weit größeren Raum als die rein optischen ein:

G. MARKTANNER-TURNERETSCHER, Die Mikrophotographie u. s. w. Halle 1890. — R. NEUHAUSS, Lehrb. der Mikrophotographie. Braunschweig 1897. — ST. V. APATHY, Die Mikrotechnik u. s. w. Leipzig 1901. p. 325—425 (ausführliche historisch-kritische Übersicht).

XIV. Die Beleuchtungssysteme.

Die den optischen Instrumenten dargebotenen Objekte machen oft eine besondere Vorrichtung zu ihrer Beleuchtung notwendig. Dies gilt immer für Gegenstände, die mittels durchfallenden Lichtes sichtbar gemacht werden sollen, also für die gewöhnlichen Objekte des Mikroskops und des Projektionsapparates und für die Spalten der Spektroskope und der optischen Registrierapparate. Wir betrachten daher

[1] Vgl. die Darstellung bei R. NEUHAUSS, Lehrb. der Mikrophotographie, 2. Aufl., Braunschweig 1898. p. 53—62; s. a. ST. V. APATHY, Die Mikrotechnik u. s. w., 2 Abt., Leipzig 1901, p. 370. 371. 399. — [2] Vgl. R. NEUHAUSS, Ztschr. f. wissensch. Mikroskopie. 5. 328. 1888.

1. Die Beleuchtung mit durchfallendem Lichte

und sehen zunächst von der Beugung des Lichtes an den Objekten und von der bei manchen Anordnungen eintretenden diffusen Reflexion an ihrer Oberfläche ab, indem wir uns auf das Gebiet der geometrischen Optik beschränken. Dann haben wir von einer vollkommenen Beleuchtungsvorrichtung zu fordern, daß sie alle Strahlen zur Verfügung stellt, mit denen das gegebene Objekt durch das gegebene optische Instrument abgebildet werden soll. Die Strahlen im Bildraume des Beleuchtungssystems müssen also alle Objektstrahlen des abbildenden Systems enthalten. Wir dürfen ein ebenes begrenztes Objekt voraussetzen, das also selbst die E.-L. bildet oder mit ihr zusammenfällt. Dann ist die vierfach unendliche Mannigfaltigkeit der geforderten Objektstrahlen durch die Begrenzung des Objekts oder die E.-L., und durch die E.-P. des abbildenden Systems bestimmt. Können wir auf die Abbildung der Lichtquelle durch das Beleuchtungssystem dieselben Betrachtungen und Begriffe anwenden, wie auf die des Objekts, was stets annähernd möglich sein wird, so haben wir die zur Beleuchtung dargebotenen Strahlen in entsprechender Weise durch die A.-L. und die A.-P. des Beleuchtungssystems bestimmt zu denken. Für die bloße Beleuchtung spielen aber A.-L. und A.-P., wie wir auf p. 241 hervorgehoben haben, dieselbe Rolle: Wenn unter Wahrung der geometrischen Verhältnisse die Pupillen des Beleuchtungssystems mit den Luken vertauscht werden (wenn man z. B. im Falle einer hinter einer Flamme aufgestellten einfachen Beleuchtungslinse die Fläche der Linse als Lichtquelle leuchtend und die Begrenzung der Lichtquelle als Blende denkt), so wird die Beleuchtungswirkung im Bildraume nicht geändert.

1. Wenn daher die beiden Bildraumblenden des Beleuchtungssystems mit den beiden Objektraumblenden des abbildenden Systems der Lage und Größe nach zusammenfallen, wobei sowohl Pupille auf Pupille und Luke auf Luke, als auch je die Pupille des einen Systems auf die Luke des anderen fallen kann, so stellt das Beleuchtungssystem dem abbildenden alle und nur die Strahlen zur Verfügung, die zur Abbildung gebraucht werden können.

Nach den Gleichungen (5) und (6) von p. 238/39 wissen wir bereits, daß die Leuchtkraft (die Lichtmenge pro Flächeneinheit und Raumwinkeleinheit) an der Stelle des Objekts und des Bildes, von den dort genannten Verlusten abgesehen, gleich der der Lichtquelle ist, gleichgültig ob diese zu ihnen konjugiert ist oder nicht. Wenn das abbildende System, wie das z. B. bei der obigen Anordnung erreicht wird, mit seiner vollen Öffnung arbeitet und sein Gesichtsfeld voll ausgenutzt wird, so ist auch die Beleuchtungsstärke und, bei subjektivem Gebrauche, die Helligkeit seines Bildes die höchste bei der gegebenen Leuchtkraft und Vergrößerung erreichbare[1].

Für die Leuchtkraft verschiedener Lichtquellen haben wir auf p. 236 Zahlenwerte angegeben.

2. Da die beschriebene Anordnung vielfach nicht zu erreichen ist, so läßt man meistens wenigstens zwei Blenden der Lage und der Größe nach zusammenfallen. Nun müssen wir berücksichtigen, daß, wie wir früher gesehen haben, bei jedem der in Betracht kommenden Instrumente stets eines der beiden Blendenbilder des Objektraumes oder des Bildraumes klein gegen das andere ist. Derselbe Satz gilt für die Beleuchtungssysteme annähernd ebenfalls.[2]

Wenn wir in der Figur 67 die Unterscheidung der beiden Blendenbilder

[1] Dieser, wie schon bemerkt, für durch das Objekt ungebeugt durchfallendes Licht abgeleitete Satz wird praktisch für alle durchsichtigen Stellen des Objekts genaue Gültigkeit besitzen. — [2] Wir bedienen uns auch hier dieser bereits früher (p. 232) gebrauchten kurzen Ausdrucksweise. Wie dort erwähnt, handelt es sich in Wirklichkeit um das Größenverhältnis der Winkel (u und w, oder u' und w'), unter denen die Luke von der Pupille und die Pupille von der Luke erscheint. Die oben gebrauchte Ausdrucksweise ist also nur dann wörtlich richtig, wenn beide Blendenbilder im Endlichen liegen. — Natürlich können auch beide Winkel klein sein.

durch verschiedene Bezeichnungen fortlassen, uns also nicht entscheiden, welche der beiden die A.-P., welche die A.-L. ist, und uns ebenso die Möglichkeit offen lassen, daß es die entsprechenden objektseitigen Blendenbilder sind, so stellt sie uns den typischen Verlauf der ein optisches Instrument durchsetzenden Lichtröhre vor oder hinter dem Instrument dar. Wir erkennen leicht aus der bloßen Betrachtung dieser jetzt doppelt zu denkenden Figur, daß wir den Lichtstrom eines beleuchtenden Systems in den eines abbildenden bei der Koinzidenz nur zweier Blendenbilder dann mit der geringsten Lichtverschwendung durch Abblendung überleiten werden, wenn wir die engeren Blendenbilder der beiden Systeme zusammenfallen lassen. Denn denken wir uns diese Blendenbilder unendlich klein, so wird bei ihrer Deckung, wenn die beiden anderen Blendenbilder gleich groß erscheinen, überhaupt keine Lichtverschwendung stattfinden (die Figur 67 verwandelt sich in einen Kegel und die beiden Kegel der beiden Systeme fallen zusammen, wenn die Systeme zentriert werden). Die Lichtverschwendung wächst offenbar, je größer die zusammenfallenden Blenden im Verhältnis zu den anderen werden; wenn aber dieser Lichtverlust dadurch verringert wird, daß man das nicht koinzidierende Blendenbild des Beleuchtungssystems verkleinert, so entsteht ein Mangel der Beleuchtung, indem zunächst für die Randteile des Objekts oder Bildes die Apertur verringert wird; und diese Randzone des Objekts oder Bildes wird unter sonst gleichen Verhältnissen mit der Größe der zusammenfallenden Blendenbilder wachsen. (Diese Art der Abblendung ist dieselbe, die wir auf p. 215 in einem besonderen Falle kennen gelernt haben, wo wir eine E.-L. außerhalb der Objektebene annahmen. Deren aperturbeschränkende Wirkung wuchs mit der E.-P. des Systems; es ergeben sich aber ganz ähnliche Verhältnisse, wenn wir die zusammenfallenden Blendenbilder nicht als E.-P., sondern als E.-L. des abbildenden Systems auffassen.)

3. Wird eine solche Einrichtung des Beleuchtungsapparates nicht erreicht, so werden im allgemeinsten Falle die beiden Bildraumblendenbilder des beleuchtenden und die Objektraumblendenbilder des abbildenden Systems ganz getrennt liegen, so daß im Objektraume des letzteren nun vier Blenden wirksam sind. In jedem einzelnen Falle wird auch dann für jeden Punkt des Bildes das zur Abbildung beitragende Büschel bekannt sein; und da die Leuchtkraft stets dieselbe oder durch die bekannten Verluste bedingt ist, wird auch die Beleuchtungsstärke im Bilde bekannt sein; ebenso ist dessen Helligkeit bei subjektiver Beobachtung leicht zu ermitteln, da die A.-P. mittels dieser vier Blenden sofort zu konstruieren und mit der Augenpupille zu vergleichen ist[1]. Man erkennt aber auch allgemein sofort, daß bei genügender Größe der beiden Bildraumblenden des Beleuchtungssystems auch im allgemeinsten Falle alle geforderten Strahlen, die maximale Beleuchtungsstärke und die maximale Helligkeit zur Verfügung stehen, daß dagegen stets eine Verschwendung der zur Verfügung gestellten Lichtmenge stattfinden muß, die aber z. B. bei Verwendung des Wolkenhimmels als Lichtquelle außer Betracht fällt.

Bei den abbildenden Systemen ist, wie wir bereits wissen, entweder die E.-P. eng und die E.-L. weit; oder die E.-P. weit und die E.-L. eng. Wir behandeln diese Fälle getrennt.

I. Das Beleuchtungssystem des Projektionsapparates

(für Makroprojektion und photographische Reproduktion in verkleinertem, gleichem oder wenig vergrößertem Maßstabe).

Ist die E.-P. des abbildenden Systems kleiner als die E.-L., wie dies bei den gewöhnlichen Projektionen von Diapositiven der Fall ist, zu denen, wie auf

[1] Die A.-P. kann für die Punkte des Bildrandes durch mehrere dieser vier Blenden bestimmt werden.

p. 373 auseinandergesetzt wurde, photographische Objektive verwendet werden, so muß man also die E.-P. mit einem Blendenbilde des Beleuchtungsapparates zusammenfallen lassen. Als solches benutzt man die A.-L., d. i. das Bild der Lichtquelle, da dieselbe leicht mit einfachen Mitteln in gleicher Größe wie jene E.-P. herzustellen ist. (Die Lichtquelle selbst ist gewöhnlich von der Größenordnung der E.-P.) Als E.-L. des Projektionssystems wollen wir hier stets die gegebene Begrenzung des Objekts auffassen. Mit dieser wird man die A.-P. des Beleuchtungssystems etwa zusammenfallen lassen, wenn man die oben mit **1** bezeichnete wünschenswerteste Anordnung verwirklichen will. Oft ist dies nicht vollkommen zu erreichen; man hat dann die mit **2** bezeichnete Anordnung.

Es ergeben sich also für unser Beleuchtungssystem die folgenden Anforderungen: das Bild einer begrenzten Lichtquelle ist in die Öffnung des Projektionssystems zu werfen und zwar:

a) In solcher Größe, daß es diese Öffnung ausfüllt.

b) In einer Entfernung vom Beleuchtungssystem, die größer ist als die des Objekts vom Projektionssystem;

c) Mit einem Öffnungswinkel der bildseitigen Büschel, der gleich dem Gesichtsfeldwinkel des Projektionssystems ist, den man benutzen will.

Die A.-P. des Beleuchtungssystems, meist die Fassung der hintersten Linse, muß also mindestens gleich der Größe des Objekts sein (im Falle **1** wird sie ihr nur gleich zu sein brauchen).

Das Beleuchtungssystem spielt hier eine ähnliche Rolle, wie das Kollektiv eines Okulars, das dazu dient, die Hauptstrahlen der das Objekt abbildenden Büschel konvergent zu machen, d. h. ein reelles Bild der Pupille, wie hier der Lichtquelle, zu entwerfen.

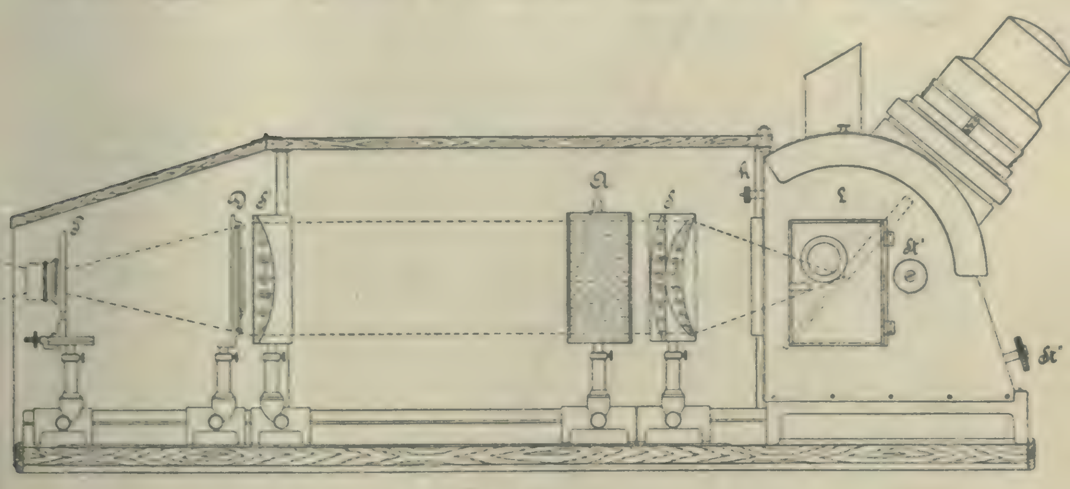
Die Abbildung der Lichtquelle kann unvollkommen sein. Es genügt, wenn die Zerstreuungskreise klein gegen die E.-P. oder klein gegen das Bild der Lichtquelle sind; eine chromatische Korrektion wird nicht ausgeführt. Es werden aber sehr große relative Öffnungen verlangt: Wenn die Lichtquelle in annähernd gleicher Größe abgebildet wird und wenn der halbe Gesichtsfeldwinkel des Projektionssystems 34^0 beträgt, so ist der tang des halben Aperturwinkels für das Beleuchtungssystems $= {}^2/_3$; also die relative Öffnung $= {}^4/_3$. Daher müssen Linsenformen gewählt werden, die bei möglichst einfacher Zusammensetzung möglichst geringe sphärische Aberration aufweisen.

Der erste von ATHANASIUS KIRCHER[1] konstruierte Projektionsapparat besaß eine einfache Linse. Wenn es sich um die sphärische Aberration von Achsenpunkten bei Abbildung in gleicher Größe handelt, so kann man eine gleichseitige Linse in zwei plankonvexe Teile zerlegt denken, zwischen denen die Strahlen parallel verlaufen. Diese beiden Teile werden nach der Tabelle[2] auf p. 118 besser umgekehrt; so entsteht der gewöhnliche Kondensor aus zwei plankonvexen Linsen, die einander die konvexen Flächen zukehren. Ein noch größeres Öffnungsverhältnis erreicht man mit einem dreilinsigen Kondensor; gewöhnlich wird eine meniskenförmige Linse, mit der hohlen Seite nach der Lichtquelle, vor die beiden plankonvexen Linsen gesetzt und der parallele Strahlenverlauf zwischen diesen

[1] ATH. KIRCHERI Ars magna lucis et umbrae. Ed. altera etc. Amstelodami 1671. Bereits in der ersten Auflage (Rom 1646) sind einige Anordnungen zur Projektion mit Sonnen- und künstlichem Lichte beschrieben. Die auf p. 915 der ersten, 795 der zweiten unter dem Titel Alter modus beschriebene Anordnung ist ein Projektionsapparat mit zwei Linsen, die Bilder werden auf die Hinterseite der Beleuchtungslinse gemalt. In der zweiten Auflage wird ein verbesserter Apparat (mit auswechselbaren Bildern) nach THOMAS WALGENSTEIN, einem dänischen Mathematiker, auf p. 760 (eigentümlicherweise ohne ausdrückliche Erwähnung der Projektionslinse) beschrieben. — [2] Diese Tabelle ist nur für Glieder dritter Ordnung berechnet, kann also in diesem Falle nur als ein Fingerzeig gelten.

beibehalten. Genaueres über die verschiedenen Typen und ihre Eigenschaften s. bei H. Krüss[1] und bei R. Neuhauss[2].

Da häufig eine Absorption der Wärmestrahlen notwendig wird, die in einer mit planparallelen Glaswänden versehenen Wasserkammer geschieht, so wird man diese gern von parallelen Büscheln durchsetzen lassen. Es ist daher zweckmäßig, die beiden Bestandteile des dreifachen Kondensors in ein Zweilinsenteil und ein Einlinsenteil zu trennen, um die Wasserkammer zwischen beide setzen oder auch weglassen zu können, ohne daß die Güte der Strahlenvereinigung sich ändert.



Figur 131.

Die Einrichtung eines Projektionsapparates.

Unter *L* der elektrische Lichtbogen, *S* das Zweilinsenteil, *S'* das Einlinsenteil des Kondensors, *A* das Absorptionsgefäß (die Wasserkammer), *D* das Objekt (Diapositiv), *P* das Projektionssystem.

Bei der Anwendung der allgemeinen Sätze über die Beleuchtungsstärke des projizierten Bildes, die auf p. 235 ff. angegeben sind, ist die starke Absorption in den dicken Kondensorlinsen, die aus gewöhnlichem Glase gefertigt werden, zu beachten (etwa 6 % auf das Zentimeter Glasdicke). Krüss[3] berechnet den gesamten Lichtverlust in einem dreilinsigen Kondensor auf etwa 50 %; damit und bei Benutzung einer Wasserkammer, eines Glasdiapositivs und eines Projektionssystems mit vier freien Flächen wird man von der Leuchtkraft der Lichtquelle an der Stelle des projizierten Bildes kaum mehr als ein Viertel wiederfinden. Im übrigen ist die Beleuchtungsstärke durch Gleichung (7) oder (8) (p. 241) bestimmt; in dem gewöhnlichen Falle der Vergrößerung durch Gleichung (9) (p. 243), also z. B. der Fläche der wirksamen A.-P. des Projektionssystems direkt, dem Quadrat des Schirmabstands umgekehrt proportional.

Über die Beleuchtung mit reflektiertem Wolkenlicht durch Spiegel oder diffus reflektierende Flächen s. die unten folgenden Bemerkungen.

Elementare Darstellungen der Projektion existieren in größerer Anzahl: ein sehr vollständiges Lehrbuch lieferte R. Neuhauss (s. o.); s. ferner Trutat, Traité gén. des projections, Paris, Mendel.

---

[1] H. Krüss, Über die Konstruktion von Kondensoren für Vergrößerungs- und Projektionsapparate. Eders Jahrb. f. Phot. u. Rep.-Techn. **13**. 66. 1899; s. a. Ztschr. f. Instrumentenk. **20**. 88. 1900. — [2] R. Neuhauss, Lehrb. d. Projektion. Halle 1901. p. 7 ff. 13–18. 44 ff. — [3] H. Krüss, Der Lichtverlust in Kondensoren. Phot. Rundschau. 1901. p. 154.

II. Die Beleuchtungsvorrichtungen des Mikroskops[1]

(der Apparate für Mikroprojektionen und Mikrophotographie).

Der andere Fall, daß die E.-L. oder das Objekt des abbildenden Systems kleiner ist als die E.-P., liegt in dem Mikroskop[2] bei seiner gewöhnlichen Benutzung vor, sowie bei der Projektion und Photographie mikroskopischer Objekte (und bei der Beleuchtung von Spalten, auf die wir noch weiter unten zu sprechen kommen). Für diese Systeme ist nicht nur das Größenverhältnis der E.-L. und E.-P., sondern auch die absolut geringe Größe auch der Aperturblende charakteristisch und für das Folgende wesentlich.

A. Der Planspiegel.

Kann man eine genügend ausgedehnte Fläche, z. B. einen größeren Teil des Wolkenhimmels, als Lichtquelle benutzen, so genügt meist ein einfacher Planspiegel. Dieser wirkt so, als ob die Lichtquelle in natürlicher Größe und in ihrer wirklichen (meist sehr großen) Entfernung in der Mikroskopachse liegend, durch eine Blende von der Größe und (schiefen) Lage der Spiegelfassung das Objekt erhellte. Wir haben also im allgemeinen den Fall **3** der vier Blenden. Denkt man aber die Lichtquelle genügend groß, so kann man den Spiegel als Lichtquelle auffassen, da er in allen in Betracht kommenden Richtungen und mit fast derselben Leuchtkraft wie die Lichtquelle selbst strahlt. Seine Fassung muß vom Objekt aus in mindestens derselben Größe wie die E.-P. erscheinen, wenn die Apertur für die Mitte ausgenutzt werden soll, bei nicht sehr kleinen Objekten wird sie merklich größer erscheinen müssen, um nicht für die Randteile des Objekts aperturbeschränkend zu wirken. Dann wird in allen Teilen des Bildes die maximale Beleuchtungsstärke und Helligkeit erreicht werden.

Häufig wird auch in Wirklichkeit statt des Spiegels eine gleich große, diffus reflektierende oder durchlassende, also im Sinne der geometrischen Optik selbstleuchtende Fläche angewendet.

Beide Beleuchtungsarten werden auch gelegentlich für den oben besprochenen Fall des Projektionsapparates benutzt.

B. Sammelnde Systeme.

Ist die Lichtquelle nicht von genügender scheinbarer Größe, so muß man nach dem oben Gesagten dafür sorgen, daß wenigstens die beiden engen Blendenbilder zusammenfallen (der mit **2** bezeichnete Fall). Am einfachsten verlegt man das Bild der Lichtquelle in die Objektebene. Dann tritt seine Größe in Konkurrenz mit der E.-L. des abbildenden Systems und muß diese mindestens erreichen, wenn das Gesichtsfeld ausgenutzt werden soll. Das Bild der Lichtquelle kann gewönlich stark verkleinert sein, wobei eine entsprechende Apertur der von ihm ausgehenden Büschel gewonnen wird. Dies geschieht am einfachsten

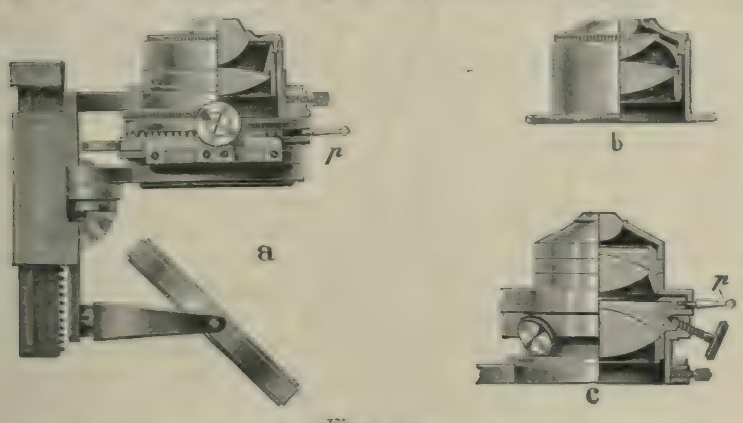
α) durch einen Konkavspiegel, in dessen Brennpunkt etwa das Objekt sich befindet, und dessen vom Objekt gesehene scheinbare Größe die der E.-P. mindestens erreichen muß. Diese scheinbare Größe kann aber bei der unvermeidlichen, nicht unbeträchtlichen Entfernung des Spiegels vom Objekt nicht leicht über eine gewisse Grenze gesteigert werden; man benutzt daher für größere Aperturen

[1] Eine große historisch-kritische Zusammenstellung, die gleichzeitig auch auf die physikalischen Fragen eingeht und die Abbesche Theorie der mikroskopischen Bilderzeugung bestreitet, lieferte St. v. Apathy, Die Mikrotechnik. 2. Abt. Leipzig 1901. p. 425—595. — [2] Um so mehr, je stärker die Vergrößerungen sind. Die schwächeren nähern sich mehr dem Falle, daß E.-P. und A.-P. „klein" sind (vgl. das in der Anm. auf p. 376 Gesagte), der als einfacherer Spezialfall des hier behandelten gelten kann.

β) ein hinter einem Spiegel eingeschaltetes Linsensystem (den Kondensor des Mikroskops), das im wesentlichen dieselbe Aufgabe hat wie ein Mikroskopobjektiv, nur mit Vertauschung von Objekt und Bild, und mit viel geringeren qualitativen Ansprüchen: nämlich die Abbildung der Lichtquelle in die Objektebene unter großen Konvergenzwinkeln, die desto größer sein müssen, je größer die Apertur des benutzten Mikroskopobjektivs selbst ist.

Die A.-P. des Kondensors tritt also in Konkurrenz mit der E.-P. des Mikroskops. Trotzdem ist es hier auch für den Achsenpunkt nicht gleichgültig, welche dieser beiden Blenden wirksam wird. Bei den hier in Betracht kommenden Objekten sind nämlich oft die abgebeugten Strahlen, wenn sie auch geringe Lichtstärke besitzen, für die Abbildung wichtig, was in der physikalischen Theorie genauer auseinandergesetzt wird. Auch bei der Beleuchtung des Objekts mit geringerer Apertur wird also in vielen Fällen die E.-P. von jenen Strahlen zum Teil ausgefüllt werden und das Auflösungsvermögen des Objektivs ausgenutzt werden können. Trotzdem können wir die Forderung der mindestens gleichen Apertur der Beleuchtungsvorrichtung aufrecht erhalten. Denn der Mikroskopiker wünscht eben wegen der Verschiedenheit der Objekte die Apertur des Beleuchtungskegels in weiten Grenzen regulieren zu können, da man z. B. Objekte, welche durch die Verschiedenheit des Brechungsexponenten sichtbar werden, mit engeren, Objekte, welche durch die Verschiedenheit der Absorptionswirkung hervortreten (gefärbte Objekte) mit möglichst weiten Büscheln zu beleuchten pflegt; auch will er engere, aber schiefe Büschel anwenden können, für die man am bequemsten einen weiten Beleuchtungskegel benutzt, aus dem man sie durch eine exzentrische Blende heraushebt.[1]

Auch die Entwickelung der Mikroskopkondensoren ist außer in den beim Mikroskop erwähnten Werken u. a. von R. NEUHAUSS[2] dargestellt worden. Bei



Figur 132.
a Der ABBEsche Beleuchtungsapparat mit dem Kondensor von der numerischen Apertur 1,20.
b Der ABBEsche Kondensor mit der numerischen Apertur 1,40.
c Der ABBEsche achromatische Kondensor mit der numerischen Apertur 1,30.
p die Aperturblende der Kondensoren.

den geringen Aperturen genügten als Kondensoren zunächst einfache Linsen, die bei den schwächsten Objektiven noch heute angewandt werden. Ein auch für die stärksten Objektive ausreichendes Beleuchtungssystem wurde von ABBE im Jahre 1872 eingeführt; sein Kondensor stellt dem oben Gesagten entsprechend ein umgekehrtes Mikroskopobjektiv vor, das mit Immersion benutzt, die numerische

[1] Die mechanische Einrichtung eines solchen „ABBEschen Beleuchtungsapparates" s. in den Lehrbüchern der Mikroskopie und den Prospekten der Firmen, die diese Apparate herstellen. — [2] R. NEUHAUSS, Lehrb. d. Mikrophotographie. p. 114.

Apertur 1,40 besitzt. Hat die Lichtquelle eine geringe Ausdehnung, so muß ein achromatischer Kondensor verwendet werden.

Da ein Kondensor vom Objekt stets mindestens um die Dicke des Objektträgers absteht, so muß die Stelle seiner höchsten Apertur, die Brennebene, weiter von der Frontlinse abstehen oder er muß eine größere Brennweite haben, als ein Mikroskopobjektiv gleicher Apertur. (Mit besonders dünnen Objektträgern kann man auch Mikroskopobjektive selbst als Kondensoren verwenden.) Gleichzeitig wird dadurch das beleuchtete Sehfeld größer, so daß der Kondensor auch für schwächere Objektive geeignet ist, die ein größeres Gesichtsfeld besitzen. Das letztere erreicht man auch durch Nähern der Lichtquelle, deren Bild dann zwar mit kleinerer Apertur, aber in größeren Dimensionen entworfen wird. Bei schwächeren Objektiven und kleinen Lichtquellen aber wäre eine Annäherung notwendig, die aus praktischen Gründen (wegen der Wärmeentwickelung) vermieden werden muß. Dann entwirft man durch den Hohlspiegel oder eine Hilfslinse (Kollektor; oder ein System solcher) ein reelles oder virtuelles vergrößertes Bild der leuchtenden Fläche, das dem Kondensor gegenüber an die Stelle der Lichtquelle tritt. (Der Gebrauch des Planspiegels mit dem Kondensor ist nur durch die äußere Anordnung veranlaßt, um den Strahlengang zu knicken, und soll keine Begrenzung einführen.)

C. Das Beleuchtungsverfahren nach Köhler.

Bei der Abbildung der Lichtquelle in die Objektebene macht sich jede Verschiedenheit der Leuchtkraft in den verschiedenen Punkten der Lichtquelle im Bilde bemerkbar; man sieht z. B. die Maschen eines Glühstrumpfs gleichzeitig mit dem Bilde; aber auch bei anderen Lichtquellen treten Unterschiede der Leuchtkraft, besonders bei der Projektion und noch mehr auf der photographischen Platte störend hervor. Nun wird, wie schon mehrfach betont wurde, die Leistung einer Beleuchtungsvorrichtung in geometrisch-optischer Hinsicht — und auf die physikalische Theorie wollen wir hier nicht eingehen — nicht berührt durch Vertauschung der Rollen seiner beiden Bildraumblenden, wenn diese ihre Größe und Lage behalten. Die kleine Bildraumblende des Beleuchtungssystems, die ins Objekt fallen sollte, kann also auch die A.-P. dieses Systems sein, das dann eine kleine A.-P. und eine relativ große A.-L., ein relativ großes Bild der Lichtquelle besitzen muß, das nun mit der E.-P. des Mikroskopobjektivs in Konkurrenz tritt. Eine solche Beleuchtungseinrichtung erreichte A. Köhler[1], indem er die Lichtquelle, bevor ihre Strahlen in den Kondensor eintreten, noch einmal so abbildete, daß die bei dieser Abbildung wirksame Aperturblende oder A.-P. durch den Kondensor auf das Objekt abgebildet wurde, also das Gesichtsfeld des Mikroskops begrenzte. Die Stelle, an der man das Bild der Lichtquelle entwirft, ist nicht immer dieselbe. Sie kann sowohl in die E.-P. des Mikroskopobjektivs abgebildet werden, wodurch bei ganz geöffneter Kondensorblende der theoretisch vollkommenste Fall **1** erreicht wird. Jedoch ist bei der Kleinheit des „kleinen Blendenbildes" des Mikroskops ein Zusammenfallen der beiden „großen Blendenbilder" kein merklicher Vorteil; man wird also am bequemsten die Lichtquelle dort abbilden, wo eine regulierbare Blendvorrichtung praktisch bereits vorhanden ist, nämlich auf der Blende des Kondensors; nur wenn ein Kondensor, speziell für starke Objektive konstruiert, diese Blende zu nahe an die Objektebene abbildet, so wird man bei Benutzung schwächerer Objektive die Lichtquelle nicht auf diese Blende abbilden.[2]

Die besprochene Abbildung der Lichtquelle verlangt nur einfache Linsen;

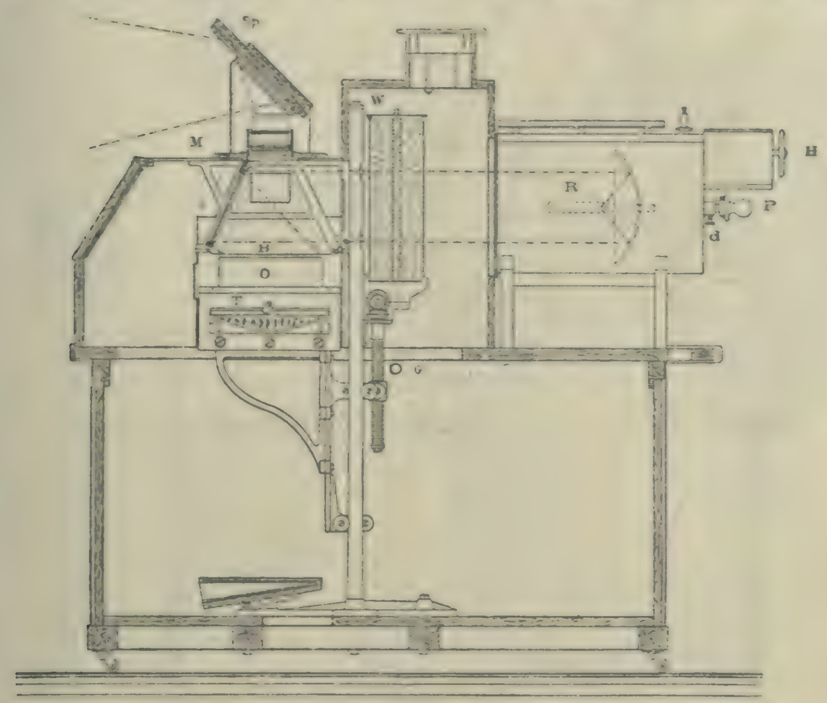
---

[1] A. Köhler, Ztschr. f. wissenschaftl. Mikroskopie. **10**. 433. 1893. Eine Anpassung dieses Verfahrens an monochromatische Beleuchtung, ibid. **16**. 1. 1899. — [2] Genaueres ergeben die Gebrauchsanweisungen der Firmen, die derartige Einrichtungen herstellen.

man hat dazu vielfach dieselben benutzt wie zur Makroprojektion, um von einer Projektionsart leicht zur anderen übergehen zu können. Neuerdings[1] hat A. KÖHLER dazu dünne Linsen von geeigneter Form angegeben, deren Absorption also zu vernachlässigen ist, wodurch es ihm ermöglicht wurde, gerade bei den stärksten Vergrößerungen die Leuchtkraft im Bilde etwa auf das doppelte der früher meist vorhandenen zu erhöhen ($^2/_5$ statt $^1/_5$), was bei hohen Vergrößerungen deshalb wichtig ist, weil dabei nach Gleichung (7) oder (8) p. 241 oder Gleichung (9) p. 243 die Beleuchtungsstärke aus geometrischen Gründen sehr herabgesetzt wird.

III. Die Spaltbeleuchtung mit schmalen Lichtquellen.

Die Durchleuchtung kleiner Objekte kann in einem Falle noch größere dioptrische Schwierigkeiten bieten, nämlich bei sehr kleinen Lichtquellen. Schon oben deuteten wir die Notwendigkeit an, die Kondensoren bei kleinen Lichtquellen zu achromatisieren und sphärisch besser zu korrigieren. In der Spektro-



Figur 133.

Das Epidiaskop von C. ZEISS.

R Scheinwerfer mit verstellbarem Reflektor, *W* Wasserkammer, I Spiegel, *O* das zu beleuchtende undurchsichtige Objekt auf dem Tische *T*, *B* (Gesichtsfeld-)Blende, *M* Projektionssystem, *Sp* neigbarer Spiegel. Zwei Hauptstrahlen sind durch Linien angedeutet.

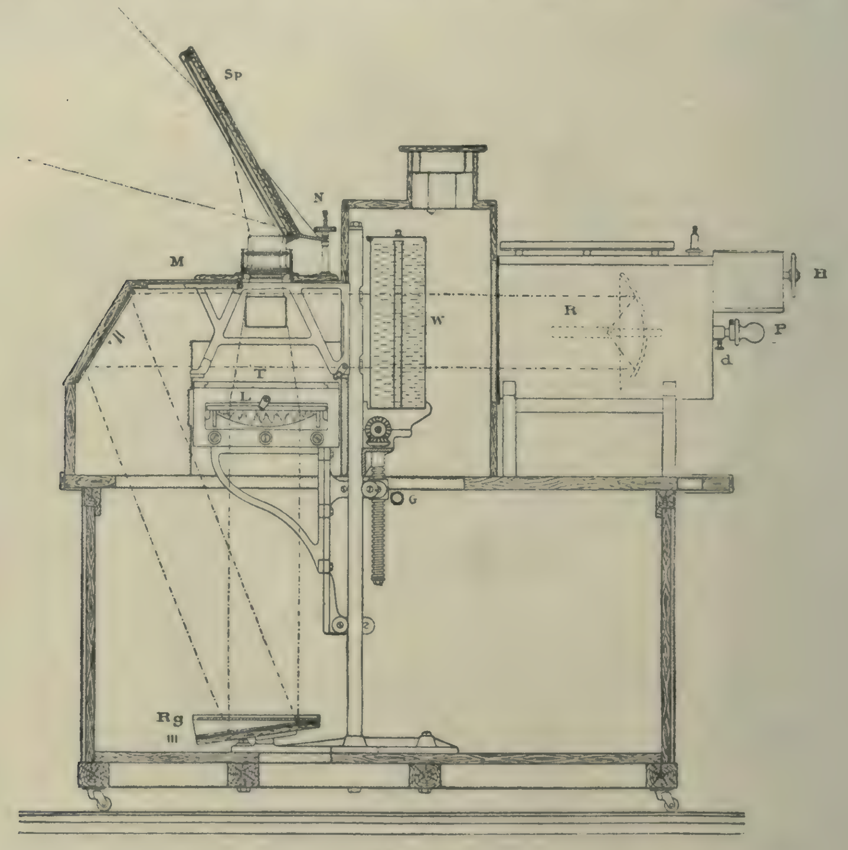
skopie und besonders auch bei der Beleuchtung photographisch registrierender Apparate handelt es sich um die Beleuchtung von Spalten, in die man ein Bild der Lichtquelle zu werfen pflegt. Die Schwierigkeit entsteht dadurch, daß man häufig den Spalt sehr verengert und dabei eine sehr kleine Lichtquelle (Kapillare einer GEISSLERschen Röhre, Glühfaden einer elektrischen Lampe) benutzt. Zonenfehler im Beleuchtungssystem werden dann je nach der Fokussierung des

[1] A. KÖHLER, Ztschr. f. wissenschaftl. Mikroskopie. 19. 417. 1902.

Spaltes die eine oder die andere Zone hinter dem Spalte dunkel erscheinen lassen. Da gleichzeitig fast stets eine vergrößerte Abbildung der Lichtquelle auf dem Spalte erfordert wird, und wenigstens im Falle der Registrierapparate die Apertur im Spalte nicht unbeträchtliche Werte haben muß, so gelangt man zu großen Öffnungsverhältnissen der Beleuchtungssysteme. In solchen Fällen müssen also auch Beleuchtungssysteme entgegen den früheren Bestimmungen chromatisch (insbesondere für spektroskopische Zwecke) und sphärisch bis zu einer großen Öffnung sehr gut korrigiert, und es muß die Sinusbedingung bei ihnen befriedigt sein.[1]

2. Die Beleuchtung mit auffallendem Lichte.

Werden Gegenstände durch diffus reflektiertes Licht sichtbar gemacht, so reicht oft die Leuchtkraft der von ihnen ausgehenden Büschel nicht aus, um sie



Figur 134.

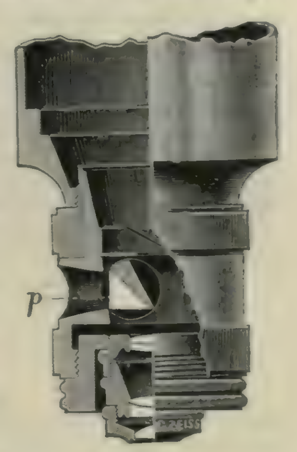
Das Epidiaskop von C. ZEISS bei Beleuchtung durchsichtiger Gegenstände. Der Spiegel I der vorigen Figur ist zurückgeklappt, wodurch die Spiegel II und III und die Beleuchtungslinse *L* wirksam werden.

als Objekte optischer Instrumente zu benutzen, wenn man nicht eine besondere Einrichtung zu ihrer Beleuchtung herstellt. Deren Aufgabe ist es im allgemeinen, im Gegensatz zu den früheren Einrichtungen, eine möglichst hohe Beleuchtungsstärke an der Stelle jener Objekte zu erzeugen. Die diffuse Reflexion, deren

[1] Vgl. R. STRAUBEL, Beleuchtungsprinzipien u. s. w., Beitr. zur Geophys., Ergänzungsbd. I 1902 (Verhandl. d. 1. internationalen seismol. Konferenz). p. 299.

Besprechung nicht in das Gebiet der geometrischen Optik fällt, ergibt stets eine viel geringere Leuchtkraft als die Lichtquelle. Werden objektive Bilder, z. B. auf dem Projektionsschirm, erzeugt, so kann man deren stets geringe Beleuchtungsstärke nur durch die Lichtstärke der abbildenden Systeme verbessern. Der Strahlengang dieser Systeme ist hier natürlich von der Beleuchtungseinrichtung unabhängig. Für die Makroprojektion verwendet man die besten photographischen Objektive, um sie mit den größten relativen Öffnungen benutzen zu können. Die Einrichtungen dazu, die sogen. Episkope, sowie die Einrichtungen zur abwechselnden Benutzung auffallenden und durchfallenden Lichtes, die Epidiaskope, findet man in dem oben erwähnten Lehrbuch der Projektion von NEUHAUSS und in den Prospekten der Fabrikanten genauer beschrieben: die Figur 133 zeigt eine noch für sehr hohe (bis 40-fache) Vergrößerungen ausreichende episkopische Beleuchtungsvorrichtung, die durch einen einfachen Handgriff in eine diaskopische (Figur 134) verwandelt werden kann.

Die Einrichtungen für auffallendes Licht, die bei der Mikrophotographie benutzt werden, findet man in den früher genannten Lehrbüchern der Mikroskopie und den Lehrbüchern der Mikrophotographie von NEUHAUSS und MARKTANNER-TURNERETSCHER. Bei den meisten wird dem opaken Objekte durch Spiegel oder Linsen seitlich Licht zugeführt. Dazu fehlt es bei kurzbrennweitigen Objektiven an Platz. Die Aufgabe wird hier dieselbe, wie die der Beleuchtung und Beobachtung der aus anderen Gründen unzugänglichen Netzhaut des Auges, die HELMHOLTZ durch die Erfindung des Augenspiegels löste. Die abbildenden Büschel müssen hinter dem Objektiv geteilt werden. Der eine Teil geht den gewöhnlichen Weg weiter, in die Pupille des Beobachters oder auf die photographische Platte, der andere wird durch eine Reflexion abgelenkt und zu einer Lichtquelle geführt; die Strahlen der Lichtquelle legen dann den umgekehrten Weg von der Lichtquelle durch das Mikroskopobjektiv auf das Objekt zurück. Die Teilung findet entweder wie in dem HELMHOLTZschen Augenspiegel optisch, d. h. durch die partielle Reflexion an einer geneigten, das ganze Objektiv bedeckenden, durchsichtigen Glasplatte oder geometrisch, d. h. mehr dem RUETEschen Augenspiegel vergleichbar, dadurch statt, daß die Hälfte des Objektivs[1] von einem totalreflektierenden Prisma bedeckt ist. Das Bild der Lichtquelle oder, mit Benutzung des KÖHLERschen Verfahrens, der Öffnung einer Linse, die die Lichtquelle in das Objektiv hinein abbildet, wird auf das Präparat geworfen (Vertikalilluminator).



Figur 135.
Der Vertikalilluminator.
p das Reflexionsprisma.

3. Die Dunkelfeldbeleuchtung.

Werden durchsichtige Objekte so beleuchtet, daß kein Strahl aus dem beleuchtenden System geradlinig verfolgt in das Mikroskop einzutreten vermag, sondern im wesentlichen die abgebeugten Strahlen die Abbildung bewirken, so daß das freie Sehfeld dunkel bleibt, so spricht man von Dunkelfeldbeleuchtung (WENHAM 1856). Die dazu dienenden Vorrichtungen sind ebenfalls in den oben genannten Lehrbüchern aufgeführt[2]. H. SIEDENTOPF und R. ZSIGMONDY[3] ist es vor kurzem ge-

[1] Genauer der Aperturblende oder eines ihrer Bilder, wie auf p. 360. — [2] Vgl. auch W. GEBHARDT, Ztschr. f. wissenschaftl. Mikroskopie. **15.** 289. 1899 und GOUY, C. R. **147.** 626. 1893. — [3] H. SIEDENTOPF u. R. ZSIGMONDY, DRUDEs Ann. **10.** 1. 1903. H. SIEDENTOPF, Journ. Roy. Micr. Soc. 1903. p. 573.

lungen, durch exaktesten Ausschluß aller nicht abgebeugter Strahlen, auch der katodioptrisch das System durchsetzenden, Körperchen sichtbar zu machen, die weit unter der Grenze der Erkennbarkeit liegen, d. h. von denen geometrisch ähnliche Bilder nicht mehr erzeugt werden können. Auch für die Sichtbarmachung besteht eine, allerdings nicht nur durch geometrische Verhältnisse bestimmte Grenze (H. Siedentopf, a. a. O.).

Die mehr oder weniger vollständig, gewöhnlich durch Verdecken eines Öffnungsbildes oder eines Bildes der Lichtquelle durchgeführte Dunkelfeldbeleuchtung, bei verschiedener Anordnung des optischen Beobachtungsapparates auf Körper angewandt, die durch ihr von der Umgebung abweichendes Brechungsvermögen sichtbar werden (bei den kleinsten Körperelementen verliert die Unterscheidung zwischen Ablenkung durch Absorptions- und Ablenkung durch Refraktionsverschiedenheit natürlich ihren Sinn, da man auf Elementarwellen diese Begriffe nicht anwenden kann), ist das Prinzip der von Töpler[1] angegebenen **Schlierenmethode**. Diese ist von Töpler[2], Mach und Salcher[3] und Wood[4] auf die Untersuchung von Luftwellen, von Abbe zur technischen Untersuchung von Gläsern[5] angewandt, ebenfalls von Töpler[6], Exner[7] und Wood[8] für mikroskopische Beobachtungen und zum Teil zur Messung von Brechungsexponenten ausgebildet worden (Exners Mikrorefraktometer, vgl. zum letzteren u. a. die Arbeiten von Ch. Christiansen[9] und H. Ambronn[10]).

Die Methode ist fast identisch mit einem der Foucaultschen Verfahren (Kapitel XII) zur Untersuchung von solchen Störungen in der Abbildung einer Lichtquelle, die nicht von Inhomogenitäten des Mediums, sondern von Fehlern der Flächen des Systems herrühren. — Eine andere einfache Anordnung zur Demonstration von Schlieren s. bei Dvorak[11].

XV. Das Fernrohr.

Als Zweck des Fernrohres, auch in seiner einfachsten Gestalt, kann man nicht wohl, wie beim Mikroskop, den bezeichnen, einem mangelnden Vermögen des Auges zu Hilfe zu kommen; denn das gesunde, emmetropische Auge sieht beliebig weit entfernte Gegenstände in voller, durch kein Mittel zu steigernder Schärfe und Deutlichkeit und das unnormale, ametropische Auge würde zu dem gleichen Zweck nur der Unterstützung durch eine passende Brille bedürfen. Der Zweck des Fernrohres ist vielmehr von vornherein der, eine räumliche Annäherung an die zu beobachtenden Gegenstände in bezug auf die von diesen ausgehende Lichtwirkung zu ersetzen, diese Gegenstände „heranzuzaubern“. Die Einzelheiten an den Gegenständen bieten sich dann dem

[1] A. Töpler, Beobachtungen nach einer neuen opt. Methode, Bonn 1864; s. a. Pogg. Ann. **131.** 33. 1867. — [2] A. Töpler, l. c. und Pogg. Ann. **128.** 126. 1866; **131.** 180. 1867; **134.** 194. 1868. — [3] E. Mach u. P. Salcher, Wied. Ann. **32.** 277. 1887; **41.** 144. 1890; s. a. E. u. L. Mach, ibid. p. 140. — [4] R. W. Wood, Phil. Mag. **48.** 218. 1899; Proc. Roy. Soc. **66.** 283. 1900. — [5] S. Czapski, Ztschr. f. Instrumentenk. **5.** 117. 1885; s. auch O. Lummer, Müller-Pouillets Lehrb. d. Phys. **2.** 878. Braunschweig 1897. — [6] A. Töpler, Pogg. Ann. **127.** 557. 1866. — [7] S Exner, Rep. d. Phys. **21.** 555. 1885; Ztschr. f. Instrumentenk. **6.** 139. 1886. — [8] R. W. Wood, Phil. Mag. (5) **50.** 347. 1900; Proc. Phys. Soc. **17.** 338. 1901. — [9] Chr. Christiansen, Wied. Ann. **23.** 298. 1884; **24.** 439. 1885. — [10] H. Ambronn, Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss.; math.-phys. Kl. 1896. — [11] V. Dvorak, Wied. Ann. **9.** 502. 1880.

Auge unter größerem Gesichtswinkel dar und werden entsprechend besser erkannt und unterschieden. Es ist daher genau ebenso berechtigt, von einem „Annäherungs“- als von einem „Vergrößerungs“vermögen der Fernrohre zu sprechen; beide werden durch die gleiche Ziffer angegeben.

Da es für die Sichtbarkeit von Einzelheiten an einem Gegenstand — oder seinem Bilde — *caet. par.* nur auf den Gesichtswinkel ankommt, unter dem er dem Auge dargeboten wird, so vergleicht man die Wirkung eines Fernsehinstruments mit der des unbewaffneten Auges im allgemeinen unter der Voraussetzung, daß auch das vom Instrument gelieferte Bild sehr fern, d. h. daß das optische System ein „teleskopisches“ sei in dem p. 37 u. 51 erläuterten Sinne. Unvermögen des beobachtenden Auges, solche ferne Bilder scharf aufzufassen, kann entweder durch Zuhilfenahme einer Brille behoben werden oder durch eine meist geringe Änderung in dem Abstand der Teile des Instruments, die meist auch entsprechend wenig an der Wirkung und dem Charakter desselben ändert. Wir wollen im folgenden der Einfachheit wegen die Fernrohre stets als teleskopische Systeme im strengeren Sinne voraussetzen[1].

Damit ist nach dem früher Gesagten die Zusammensetzung aus zwei Systemen gegeben, die mit ihren zugewandten Brennpunkten koinzidieren[2] [3]. Die Vorteile, welche die Zusammensetzung aus zwei Partialsystemen mit sich bringt, sind daher dem Teleskop im Gegensatz zu dem Schwesterinstrument, dem Mikroskop, von vornherein und sozusagen unwillkürlich zu Teil geworden.

Die auch für den praktischen Gebrauch im Vordergrund des Interesses stehende Fundamentalwirkung eines teleskopischen Systems ist die angulare Vergrößerung Γ. Sie ist, wie wir früher (p. 52/53) festgestellt haben, für alle Punkte der Achse konstant und gleich dem Verhältnis der ersten Brennweite des vorderen zur zweiten Brennweite des hinteren Partialsystems

$$(1) \qquad \gamma = \frac{f_1}{f_2'}\,.$$

Bei den bisherigen Fernrohrkonstruktionen ist stets das zweite Partialsystem ein dioptrisches, das beiderseits an Luft grenzt, wo also $f_2 = -f_2'$ ist; wir haben daher auch

[1] Der Zweck des Instruments kann auch mit einer Anordnung erreicht werden, die sich erheblich von der „teleskopischen“ entfernt: man kann Bilder sehr entfernter Gegenstände mittels eines Projektionssystems entweder reell auf einen Schirm (photographische Platte) projizieren oder auch das von dem System entworfene Luftbild betrachten — letzteres allerdings in einiger Ausdehnung nur unter Zuhilfenahme einer in seiner Nähe angebrachten Sammel-(„Kollektiv“)linse zur Herbeiführung passenden Strahlengangs (s. weiter unten). In beiden Fällen kann sehr wohl eine merkliche Vergrößerung erzielt werden; doch bedürfen sie keiner näheren Betrachtung, weil sich ihre Eigentümlichkeiten aus der Erörterung des allgemeinen Falles und aus dem bei den Projektionssystemen angeführten von selbst ergeben. — [2] Ein teleskopisches und zugleich vergrößerndes System kann man, wie wir früher schon bemerkten (p. 196), auch ohne alle Linsen und gekrümmte Spiegel mittels Prismen erhalten. G. B. AMICI (Memoria sulla costruzione di un cannocchiale acromatico senza lenti eseguito con un sol mezzo refringente. Soc. Ital. delle Science (Modena) Mem. di Mathem. **19.** 121. 1821) hat, wie es scheint, zuerst darauf hingewiesen, daß man mit einem System gekreuzter Prismenpaare gleichzeitig Achromasie und eine in beiden Hauptschnitten gleiche Verzerrung, d. h. Vergrößerung erreichen könne. Die Benennung solcher Prismensätze nach BREWSTER scheint daher ungerechtfertigt, da BREWSTER seine diesbezügliche Arbeit (Optics, London 1833, § 217. Deutsche Übersetzung von HARTMANN, Quedlinburg und Leipzig 1835, p. 136) erst über zehn Jahre später veröffentlichte. Übrigens haben diese Prismenfernrohre niemals ernstliche Verwendung gefunden. — [3] Durch Zusammensetzung aus zwei einfachen Dioptern, d. h. aus einer einzigen entsprechend dicken Linse von passenden Krümmungen läßt sich zwar auch ein teleskopisches System herstellen; ein derartiges würde aber offenbar solche Bedingungen für die Erzielung weiterer besonderer Eigenschaften mit sich bringen, daß es wohl mehr der Kuriosität halber in früherer Zeit von DESCARTES vorgeschlagen worden ist, aber weder damals noch später Beachtung gefunden hat und zu finden verdiente.

(1a) $$\gamma = -\frac{f_1}{f_2} \quad .$$

Wenn das Fernrohr für seinen Gebrauchszweck korrigiert ist, d. h. wenn es das (unendlich) ferne Objekt in ein (unendlich) fernes Bild scharf abbildet, also für die unendlich fernen Punkte „aplanatisch" ist, so lautet der Ausdruck der Sinusbedingung $h'/h = \text{const.}$, wo h' die Höhe über der Achse ist, in der ein Strahl das System verläßt, der in der Höhe h parallel zur Achse eingetreten ist (vgl. p. 132). Wir haben daraus gefolgert, daß auch für die Pupillen des Fernrohres

(2) $$\frac{p'}{p} = B = \text{const.}$$

ist, wo

$$B = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{\Gamma}, \quad \text{praktisch also stets} = \frac{1}{\Gamma}$$

ist. Daher ist

(2a) $$\frac{p}{p'} = \Gamma = \gamma = -\frac{f_1}{f_2} \quad .$$

Diese Gleichung bietet ein Mittel, aus den der Messung relativ bequem zugänglichen Werten p und p' die Vergrößerung Γ abzuleiten.

Das vom Objektiv entworfene Bild dient als Objekt für das Okular; der Öffnungswinkel u_1' der das erstere formierenden Büschel ist dabei identisch mit dem Öffnungswinkel u_2 der von ihm zum Okular weitergehenden: $u_1' = u_2$. Daher folgt aus Gleichung (2a), daß das Öffnungsverhältnis, mit dem das Okular von den Büscheln in Anspruch genommen wird, für welche es also korrigiert sein muß, p'/f_2, gleich ist demjenigen für das Objektiv, p/f_1', also

(2b) $$\frac{p'}{f_2} = \frac{p}{f_1'} \quad .$$

Es ist ferner das vordere Partialsystem, das Objektivsystem, stets kollektiv, es hat also f_1 positives Vorzeichen. Rein schematisch bieten sich daher zwei Gruppen von teleskopischen Systemen der näheren Betrachtung dar, nämlich solche mit kollektivem Objektiv und a) kollektivem, b) dispansivem Okular. Für den Charakter, die Wirkung, insbesondere Strahlengang und Strahlenbegrenzung ist jedoch von viel größerer Bedeutung als das Vorzeichen des Okulars sein Aufbau. Beim Objektiv ist bisher nie ein anderer Typus zur Anwendung gekommen, als ein solcher, wo der erste Brennpunkt F_1 auf der Seite des einfallenden Lichtes liegt und der zweite Brennpunkt F_2 auf der Bildseite. In bezug auf die Okulare aber haben wir zu unterscheiden als die beiden Grundtypen

A. Okulare dispansiven Charakters und vom Typus der einfachen Zerstreuungslinse, d. i. der zweite Brennpunkt dem ersten im Sinne der Lichtbewegung auf der Achse voranstehend — **holländisches (Galileisches) Fernrohr,**

B. Okulare kollektiven und dispansiven Charakters, im wesentlichen aus Sammellinsen zusammengesetzt, bei denen der erste Brennpunkt dem zweiten auf der Achse voransteht — **Keplersches oder astronomisches Fernrohr** und dessen weitere Entwickelungsformen.

Des näheren kommt der Unterschied zwischen diesen beiden Haupttypen von Fernrohren, wie bald gezeigt werden soll, darauf hinaus, ob das Bild der Objektivöffnung im Sinne der Lichtbewegung vor oder hinter der letzten Okularfläche liegt.

Wir betrachten zuerst das historisch ältere Instrument

A. Das holländische (Galileische) Fernrohr.

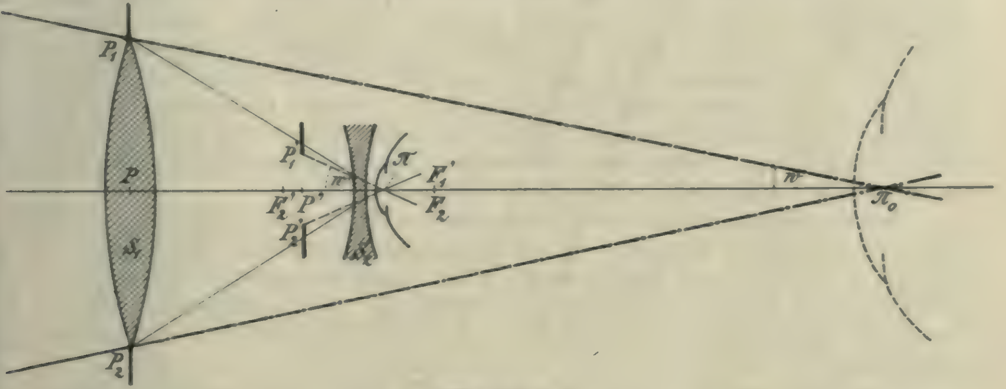
Die maßgebenden Abbildungsfaktoren.

Da hier f_2' positiv ist, so hat die Angularvergrößerung $\Gamma = f_1/f_2'$ selbst positives Vorzeichen, d. h. das holländische Fernrohr bildet stets aufrecht ab.

Strahlenbegrenzung und Strahlengang.

Die Lage der Brennpunkte ist bei diesem Instrument die in Figur 136 angedeutete. Der mit dem zweiten Brennpunkt F_1' des Objektivs S_1 zusammenfallende erste Brennpunkt F_2 des Okulars S_2 liegt außerhalb des Instruments, nach dem Beobachter hin, der zweite Brennpunkt des Okulars F_2' befiindet sich zwischen diesem und dem Objektiv.

Die Begrenzung des Objektivsystems S_1 ist gewöhnlich durch den Rand der Fassung von dessen Vorderlinse gegeben; manchmal allerdings auch durch



Figur 136.

Gang der Hauptstrahlen im holländischen Fernrohr (vierfache Vergrößerung; das Bild π_0 der Pupille ist um die Hälfte zu nahe am Okular gezeichnet).

eine dahinter eigens angebrachte Blende. Von dieser oder jener wird durch das ganze System, praktisch also durch das Okular S_2 allein, ein Bild in P' entworfen, welches vom zweiten Brennpunkt F_2' des Okulars um $F_2'P' = \xi'$ entfernt ist. Da F_1 und F_2' einander konjugiert sind in bezug auf das ganze System, so ergibt sich gemäß der bezüglichen Gleichung p. 56, $F_1 P = \xi$ gesetzt,

$$\xi' = \frac{\xi}{\Gamma^2} \quad .$$

Da ξ etwa $= f_1$ und Γ, die Vergrößerung des Fernrohres, $= -f_1/f_2$ ist, ist auch

$$\xi' = + \frac{f_1}{\Gamma^2} = - \frac{f_2}{\Gamma} \quad . \tag{3}$$

Wenn die Okularlinse nach dem Typus der einfachen dünnen Linse konstruiert ist, so steht sie um $-f_2$ von F_2' ab; dann besagt Gleichung (3), daß bei holländischen Fernrohren mit einer die Zahl 1 übersteigenden Vergrößerungsziffer Γ das Objektivbild immer innerhalb des Instruments liegt, zwischen Objektiv und Okular; und dies ist, wie bemerkt, das unterscheidende Kennzeichen für diese Gattung von Instrumenten in bezug auf den Strahlengang.

Dieses Bild der Objektivöffnung hat eine Größe (Halbmesser $P'P_1' = p'$), welche zu der des Objektivs selber (Halbmesser $PP_1 = p$) in dem für das System geltenden konstanten Vergrößerungsverhältnis B steht.

Wir müssen hier, wie bei der Abbildung durch das einfache Mikroskop (die Lupe, vgl. p. 329), die beiden Fälle unterscheiden, daß die so bestimmte Austrittsöffnung p' größer oder kleiner ist als diejenige, π, der Pupille des Beobachters. Nehmen wir den Durchmesser der Pupille z. B. gleich 4 mm, so egt der eine oder der andere Fall vor, je nachdem der Durchmesser des Objektivs (in Millimetern) größer oder kleiner ist als das vierfache der mit dem Instrument erzielten Vergrößerungsziffer.

Das Bild der Objektivöffnung, $P_1' P_2'$, ist nun in jedem Falle die eine der beiden Begrenzungen, welche für die durch das Instrument tretenden Strahlen vorhanden sind. Ist dieses Bild größer als die Pupille des beobachtenden Auges, so stellt es die Gesichtsfeldblende vor, und die Pupille des Auges ist dann die Aperturblende (vgl. die analogen Betrachtungen p. 330, Figur 107); wenn aber das Objektivbild kleiner ist als die Augenpupille, so wird diese die Gesichtsfeldblende und jenes Bild wird die Aperturblende (vgl. Figur 108). In beiden Fällen liegt die Gesichtsfeldblende außerhalb, sogar erheblich außerhalb des Bildes selbst, läßt also in diesem dieselben drei Zonen unterscheiden, welche wir p. 329 namhaft gemacht haben, nämlich einen zentralen kreisförmigen Teil, a b, unter dem halben Gesichtswinkel ω' erscheinend, von konstanter und maximaler Helligkeit, in welchem die volle Apertur der Büschel wirksam ist; um diesen herum einen Ring bis AB (halber Gesichtswinkel ω'), in welchem die Helligkeit abnimmt bis nur noch die Achsen der Büschel in das Auge gelangen und endlich eine äußerste Zone, bis $\alpha\beta$ (halber Gesichtswinkel ω'), in welcher die Helligkeit auf den Wert Null herabsinkt.

Die Bestimmung dieser drei Gebiete und der für die Mitte wirksamen Apertur hat ganz ebenso zu erfolgen, wie bei den Lupen mittels der Gleichungen (2) und (3) p. 329/30, wenn man dort für p die gemäß unserer Gleichung (2a) bestimmte Größe p', für π ebenfalls den Halbmesser der Augenpupille setzt und für d die Entfernung der Augenpupille vom Objektivbild $P' \Pi$, die wir hier mit d' bezeichnen wollen.

Das Sehfeld wird unter sonst gleichen Umständen desto größer, je kleiner diese Entfernung ist. Da nun, wie bemerkt, das Objektivbild bei dem holländischen Fernrohr stets im Innern des Instruments liegt, so ist der Annäherung des Auges die Grenze gesetzt, daß dieselbe höchstens bis an die Okularlinse erfolgen kann. Praktisch wird die Pupille immer um mindestens 10 mm von der Okularlinse abstehen; dazu kommt dann noch die auch immer einige Millimeter betragende Entfernung des Linsenscheitels vom zugehörigen Hauptpunkt; man kann daher 15 mm als Mindestabstand der Pupille von diesem Hauptpunkt annehmen.

Nennen wir den Abstand der Augenpupille von (dem zweiten Hauptpunkte) der Okularlinse a, so berechnet sich ihr Abstand vom Objektivbild p' zu

$$d' = a - f_2 - \frac{f_1}{\Gamma^2} = a + f_1 \frac{\Gamma - 1}{\Gamma^2} \quad ; \tag{4}$$

also ist die Tangente des halben Sehwinkels der drei Gebiete im Bildraum in dem hauptsächlich interesierenden Falle ($p' > \pi$)

$$\operatorname{tg} w' = \frac{p' - \pi}{d'} = \frac{\left(\frac{p}{\Gamma} - \pi\right)\Gamma^2}{a \cdot \Gamma^2 + f_1(\Gamma - 1)} = \frac{(p - \pi\Gamma)\Gamma}{a \cdot \Gamma^2 + f_1(\Gamma - 1)} \quad , \tag{4a}$$

$$\operatorname{tg} W' = \frac{p'}{d'} = \frac{p \cdot \Gamma}{a\Gamma^2 + f_1(\Gamma - 1)} \quad , \tag{4b}$$

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{p' + \pi}{d'} = \frac{(p + \pi\Gamma)\Gamma}{a\Gamma^2 + f_1(\Gamma - 1)} \quad . \tag{4c}$$

Ganz entsprechende Gleichungen erhält man in dem anderen Falle ($p' < \pi$) gemäß Gleichung (3) p. 330.

Die Tangenten der diesen Bildwinkeln entsprechenden Winkel im Objektraum, w, W, ω sind einfach je der Γte Teil der oben angegebenen, werden also erhalten, indem man in den obigen drei Gleichungen rechts den Faktor Γ jedesmal wegläßt. Diese Gleichungen kann man auch direkt erhalten, indem man die Bedeutung der im Bildraum stattfindenden Strahlenbegrenzung für den Objektraum feststellt. Dieselbe Funktion, welche das Bild der Objektivöffnung im ersteren hat, kommt hier der Objektivöffnung selber zu, und diejenige Funktion, welche im Bildraum die Pupille des Auges hat, wird hier ausgeübt durch das vom ganzen System nach der Objektseite hin entworfene Bild dieser Pupille, Π_0 (vgl. Figur 136).

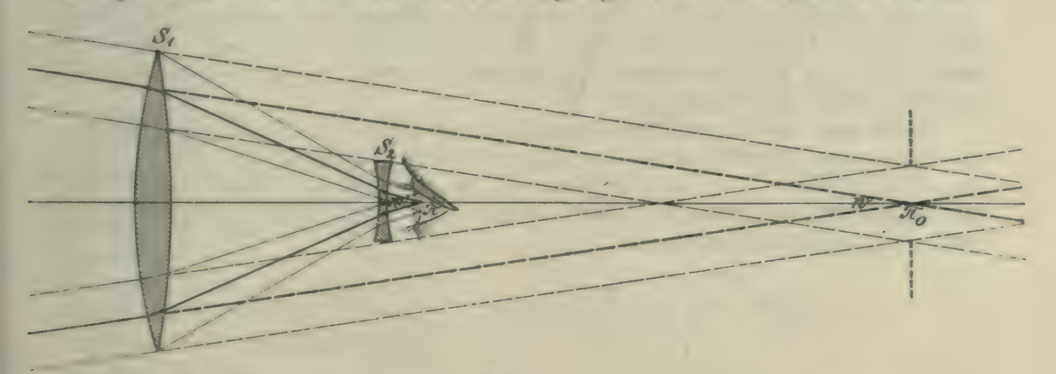
Der Abstand b dieses Bildes von der Objektivöffnung wird durch den im Nenner der Gleichungen (3a bis 3c) stehenden Ausdruck $a\Gamma^2 + f_1(\Gamma - 1)$ angegeben; denn der Abstand des Auges selbst von dem Objektivbild ergibt sich nach dem früheren zu

$$a - \left(f_2 + \frac{f_1}{\Gamma^2}\right) = a - \left(\frac{f_1}{\Gamma^2} - \frac{f_1}{\Gamma}\right) \quad .$$

Daher ist b nach der allgemeinen Gleichung $\xi' = \xi\,\Gamma^2$, in der aber hier wegen der Vertauschung von Objekt und Bildseite Γ durch $1/\Gamma$ zu ersetzen ist

$$b = a\Gamma^2 + f_1(\Gamma - 1) \quad .$$

Denken wir uns dieses Bild der Pupille rechnerisch oder graphisch ermittelt, so ergibt sich ohne weiteres der Strahlengang für das holländische Fern-



Figur 137.
Verlauf zweier seitlichen Büschel im holländischen Fernrohr (vierfache Vergrößerung; das Bild π_0 der Pupille liegt in Wirklichkeit doppelt so weit vom Okular S_2).

rohr. Ist die Objektivöffnung größer als das Γ-fache der Augenpupille (die Vergrößerung kleiner als der πte Teil des Objektivdurchmessers), $p > \pi\,\Gamma$, $\Gamma < p/\pi$, so resultiert ein Strahlengang wie der in Figur 137 dargestellte: ist das umgekehrte der Fall, so wird der Strahlengang entsprechend demjenigen, welcher in Figur 117 p. 341 für das Chevaliersche (Präparier-)Mikroskop dargestellt ist. Nach unserer früheren Bezeichnung ist also im ersteren, uns hier vornehmlich interessierenden Falle das objektseitige vergrößerte Bild der Augenpupille, Π_0, die wahre Eintrittspupille des Instruments, die Augenpupille selbst Austrittspupille. Die Objektivöffnung bildet die Gesichtsfeldblende im Objektraum, das vom ganzen System entworfene Bild P' derselben (vgl. Figur 136) die entsprechende Blende im Bildraum. Im anderen Falle, $p' < \pi$, vertauschen P und Π_0, P' und Π einfach ihre Funktionen.

Insoweit also nicht etwa die Okularlinse ihrerseits eine Beschränkung herbeiführt, ist beim holländischen Fernrohr, in welchem $p' > \pi$, $p > \pi_0$ ist, und

welches dann oft als „Opernglas", „Perspektiv" oder „Krimstecher" bezeichnet wird, die **Helligkeit** in der Mitte des Sehfeldes immer gleich der des Sehens mit bloßem Auge — abgesehen von den durch partielle Reflexionen an und Absorptionen in den Linsen verursachten Lichtverlusten. Bei dem verhältnismäßig einfachen Bau des holländischen Fernrohres — gewöhnlich nur zwei getrennte Linsensysteme, also nur vier Glas-Luftreflexionen — sind auch jene Verluste entsprechend gering. In bezug auf Lichtstärke überragt das holländische Fernrohr bei geringer Vergrößerung (2—5) und genügend großem Objektiv alle anderen Arten von Fernrohren. In dem Maße, als die Pupille des Beobachters sich erweitert oder zusammenzieht tritt ein größerer oder kleinerer Teil der Objektivöffnung für die Bildformierung in der Mitte des Gesichtfeldes — gewissermaßen automatisch — in Funktion, während der übrige Teil der Objektivöffnung der Ausdehnung des Sehfeldes dient.

Ein anderer Vorzug des holländischen Fernrohres ist sein geringes Gewicht als Folge der erwähnten einfachen Zusammensetzung; ein dritter seine Kürze. Denn da seine Länge annähernd gleich der Differenz der Brennweiten von Objektiv und Okular, so ist es darin offenbar im Vorteile vor dem astronomischen Fernrohr, bei dem die Länge etwa gleich der Summe jener beiden Brennweiten ist. Eine leichte Überlegung zeigt aber[1], daß alle diese Vorzüge nur bei sehr geringen Vergrößerungen ins Gewicht fallen, bei etwas stärkeren (größer als etwa viermaliger) aber durch die Kleinheit des Gesichtsfeldes mehr als aufgewogen werden (s. unten).

Die Größe des von den Hauptstrahlen begrenzten objektseitigen Sehfeldes ist proportional dem Durchmesser des Objektivs; es ist desto kleiner, je weiter das Auge vom Instrument absteht und je größer für gleiche Vergrößerung die Brennweite des Objektivs ist.

Hält man den Konstruktionstypus fest und ändert den Ausführungsmaßstab des Instruments im Verhältnis von $1:m$, so ist in Gleichung (4b) für $p \ldots mp$ zu setzen und für $f_1 \ldots mf_1$, während a, der Abstand des Auges vom Okular, als ungeändert angenommen werden kann. Man erhält dann für das Gesichtsfeld des geänderten Instruments

$$\operatorname{tg} W_m' = \frac{mp\Gamma}{a\Gamma^2 + mf_1(\Gamma - 1)} = \frac{p\Gamma}{\frac{a}{m}\Gamma^2 + f_1(\Gamma - 1)},$$

d. h. dieses Gesichtsfeld ist gleich dem des ursprünglichen Instruments für einen Augenabstand a/m statt a. Das bedeutet für $m > 1$ Vergrößerung, für $m < 1$ Verkleinerung des Gesichtsfeldes.

Bei binokularen Instrumenten ist der Vergrößerung von p aber bald eine Grenze gesetzt durch das Aneinanderstoßen der Objektivfassungen. Über $p = 30$ mm kann hier kaum hinausgegangen werden; gewöhnlich ist $p < 25$ mm.

Wenn Objektiv- und Okularlinse als verschwindend dünn angenommen werden können, so ist $f_1 + f_2 = l$ die Länge des Instruments und $f_1(\Gamma - 1) = \Gamma(f_1 + f_2) = \Gamma l$, daher z. B.

$$\operatorname{tg} W' = \frac{p}{a\Gamma + l}. \qquad (3\,b^*)$$

Daraus folgt, daß unter sonst gleichen Umständen, insbesondere bei gegebener Öffnung und Vergrößerung das Gesichtsfeld des Perspektivs desto größer ist, je kürzer das Instrument ist.

[1] s. S. Czapski, Über neue Arten von Handfernrohren. Verh. d. V. z. Bef. d. Gewerbfl. v. 7. Jan. 1895.

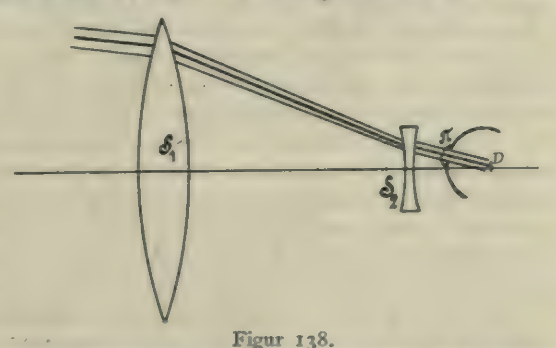
Der Strahlengang im holländischen Fernrohr wird fast stets falsch dargestellt, nämlich so, wie er nur bei einer den Γten Teil der Objektivöffnung übersteigenden Vergrößerung ist, also analog Figur 117. Die erste richtige Darstellung habe ich in F. MOSSOTTIs Nuova teoria degli stromenti ottici, Pisa 1859, p. 55 u. 87 gefunden. Offenbar unabhängig von diesem kam auf die Fehlerhaftigkeit der üblichen Auffassung N. LUBIMOFF (CARLs Repert. **8.** 336. 1873 und POGG. Ann. **148.** 405. 1873). An seine Publikation knüpften sich wiederholt Diskussionen; zuerst zwischen ihm, BREDICHIN u. BOHN (CARLs Repert. **9.** 97. 108. 381. 1873), zehn Jahre später noch einmal zwischen PSCHEIDL (CARLs Repert. **18.** 686. 1882) und BOHN (EXNERs Repert. **19.** 243. 1883), s. auch CZAPSKI (Ztschr. f. Instrumentenk. **7.** 409. 1887; **8.** 102. 1888).

Das Gesichtsfeld für das ruhende Auge ist nach der üblichen Darstellung stets — und bei den stark vergrößernden holländischen Fernrohren in der Tat — gleich dem Sehwinkel, unter welchem die Augenpupille vom Objektiv aus erscheint, nach dem hier vorgetragenen ist dies nur für starke Vergrößerungen (A.-P. kleiner als die Augenpupille) der Fall, bei schwächeren Vergrößerungen aber ist das Sehfeld gleich demjenigen, unter welchem das Objektivbild vom Auge aus erscheint.

Wegen der Modifikationen, die die oben abgeleiteten Gleichungen für das Gesichtsfeld in den Fällen erfahren, daß das beobachtende Auge nicht normalsichtig ist oder das zu beobachtende Objekt in einer Entfernung sich befindet, die nicht mehr praktisch $= \infty$ gesetzt werden kann s. M. G. QUESNEVILLE, Nouvelle dioptrique des rayons visuels. Théorie nouvelle de la lunette de Galilée. Moniteur Scientifique 705. livr. Sept. 1900 und Paris, Hermann, 1902.

Wird ein holländisches Fernrohr als Ganzes benutzt, um nach einer geringen Distanzänderung von Objektiv und Okular reelle Bilder auf einem Schirm zu entwerfen (Teleobjektiv für Photographie, s. oben p. 313ff.), so ist der Strahlengang natürlich nicht mehr von der Augenpupille, sondern von den etwa sonst vorgesehenen Blenden abhängig.

Bis hierher ist angenommen worden, daß das **Auge ruhig** in zentraler Stellung sich vor dem Instrument befinde, so daß die Pupille des Auges mit der des Fernrohres zusammenfällt und die Achse des Fernrohres mit der Richtung des deutlichsten Sehens. Wie früher bereits wiederholt hervorgehoben, wird dann auch bei vollkommener Leistung des Instruments aus physischen wie physiologischen Gründen nur ein sehr kleiner Teil des Gesichtsfeldes vom Auge auf dessen Netzhaut scharf abgebildet und uns deutlich zum Bewußtsein gebracht. Unwillkürlich lenkt sich daher auch die Aufmerksamkeit vorwiegend auf diesen zentralen Teil; der exzentrische Teil des Sehfeldes dient nicht zur Betrachtung selbst, sondern vorwiegend dazu, durch seinen, wenn auch weniger deutlich wahrgenommenen, Inhalt einen Anhalt für den Wechsel der Beobachtungsrichtung zu gewähren. Sobald die Aufmerksamkeit auf eine andere Richtung gelenkt wird, folgt das Auge des unbefangenen Beobachters durch eine Gesamtdrehung des Auges innerhalb seines Kugellagers, bis seine Visierlinie die betreffende Richtung hat. Diese Drehung erfolgt aus dem Augenmittelpunkt D, der etwa 10,5 mm hinter der Pupille liegt. Die Pupille selbst bewegt sich bei der Drehung des Auges auf einer Kugelfläche vom Radius $D\Pi$ mit D als Mittelpunkt (Figur 138). Die Achse des zentralen abbildenden Büschels schneidet die Achse des Fernrohres in D, die Achsen der anderen abbildenden Büschel kreuzen sich in dem nunmehr außerhalb der Instrumentachse gelegenen Pupillenmittelpunkt Π'. Die Konstruktion dieser Büschel hat im übrigen ganz ebenso zu erfolgen wie in dem früher betrachteten Falle. P. LANDSBERG[1] vergleicht ganz treffend das Sehen durch ein holländisches Fernrohr mit dem des staroperierten (aphakischen und



Figur 138.
Der Strahlengang im holländischen Fernrohr bei seitlich gewendetem Auge.

[1] P. LANDSBERG, Klin. Monatsbl. f. Augenheilkunde, Juni 1892; s. auch V. FUKALA, SCHWEIGGER-KNAPPs Archiv **24.** 2. 1892.

dadurch stark hypermetropisch gemachten) Auges durch die zu seiner Korrektion nötige starke Konvexbrille (Starbrille). In der Tat kann man das annähernd normal vorausgesetzte Auge mit der Okularlinse des holländischen Fernrohres zusammen wie ein stark hypermetropisches Auge ansehen und es würden auf das Sehen durch das Objektiv die früher (p. 328) entwickelten Grundsätze für das Sehen durch Brillen Anwendung finden.

Die Größe des sich so ergebenden Gesichtsfeldes im engeren Sinne wird ohne weiteres durch die Gleichung (3b) geliefert, wenn man darin für den Abstand a der Augenpupille vom Okular den Abstand d des Augendrehungspunktes einführt. Da $d > a$, so ergeben sich kleinere Werte des Gesichtsfeldes der direkt gesehenen Gegenstände für das bewegte Auge als der indirekt gesehenen für das ruhende.

Da die Aufmerksamkeit wesentlich auf den jeweilig zentralen Teil des Bildfeldes gerichtet ist und dieser Teil wie bemerkt physisch und physiologisch weitaus die deutlichsten Bilder liefert, so ergibt sich als **Anforderung für die Korrektion des holländischen Fernrohres** allgemein die, daß die Bildqualität derjenigen Büschel die vollkommenste sein muß, deren A.-P. im Drehungspunkt des Auges — etwa 25 mm von der letzten Linsenfläche — liegt und einen Durchmesser gleich dem der Augenpupille hat.

Es sind auch die Achsen dieser Büschel, die der Bedingung der Orthoskopie genügen müssen, damit das Auge bei seiner Wanderung durch das Bildfeld in diesem keine Verzerrung wahrnehme. Damit endlich das Auge das Bildfeld ohne Änderung der Einstellung des Instruments durchwandern könne, müssen die virtuellen Bildpunkte der zur A.-P. D gehörigen Büschel innerhalb der Akkommodationsgrenzen liegen, und insoweit der Bedingung der Bildebenung genügen.

Nun ist aber zu bedenken, daß in diesen Instrumenten die Lage des Auges weder in der Richtung der noch senkrecht zur Achse wirklich genau fixiert ist, sondern der gewöhnliche Gebrauch ziemliche Schwankungen in beiden Richtungen von selbst mit sich bringt. Wenn daher ein Instrument für eine bestimmte Lage des Auges vollkommen den namhaft gemachten Bedingungen genügte, eine Abweichung des Auges von der betreffenden Lage aber erhebliche Änderungen in der Bildqualität nach irgend einer Seite hin herbeiführte, so würde dasselbe im gewöhnlichen Gebrauch immer als ein sehr mangelhaftes erscheinen. Es muß daher, ganz ähnlich wie bei den Lupen, als eine besondere Bedingung beim Perspektiv in guten Instrumenten die erfüllt sein, daß die Bildqualität in keiner Beziehung durch Änderung der Augenlage erheblich beeinflußt wird. Eine genauere Diskussion dieser letzteren Anforderung zeigt, daß infolge derselben die oben genannten Bedingungen nicht nur innerhalb derjenigen Öffnung des Objektivs erfüllt sein müssen, welche gemäß der Größe der Austrittspupille bei einer Lage derselben von den Strahlenbüscheln in Anspruch genommen wird, sondern für die ganze Objektivöffnung.

Das holländische Fernrohr darf für schwache Vergrößerungen, als Perspektiv, nicht als ein zusammengesetztes Instrument aufgefaßt werden, unter den Gesichtspunkten, welche wir für die starken Mikroskope geltend machen konnten und welche ebenso für die starken Fernrohre bestehen. Bei einer zwei- bis fünffachen Vergrößerung, wie sie in diesen Instrumenten gewöhnlich erreicht ist, sind die Aberrationen im Okular zwar unter sonst gleichen Umständen auch zwei- bis fünfmal geringer als diejenigen im Objektiv, aber mit eben diesem Maßstab doch vergleichbar mit jenen. Die wünschenswerten Bildeigenschaften sind daher im Perspektiv ebenso zu erreichen, wie in den zusammengesetzten Projektionssystemen (telephotographischen Objektiven) oder wie in den Objektiven der Mikroskope selbst, indem man entweder jeden Teil in bezug auf diejenigen Eigenschaften und mit demjenigen Strahlengang, mit welchem er in Anspruch genommen wird, für sich korrigiert (aberrationsfrei macht), oder indem man die

entsprechenden Fehler im Objektiv und Okular nach dem Prinzip der gegenseitigen Kompensation ausgleicht. Was die erwähnten Bildfehler des näheren betrifft, so werden wir bei der Erörterung des astronomischen Fernrohrs zeigen, daß die sphärische und chromatische Aberration auf der Achse der zur A.-P. gehörigen Büschel wegen der Kleinheit der mit dem ganzen Instrument erhältlichen Vergrößerung nur eine geringe Rolle spielt. Wichtiger ist neben den Bedingungen der Freiheit von Bildwölbung und von Verzerrungen die, daß die chromatische Differenz der Vergrößerung mindestens für zwei Farben des sichtbaren Spektrums aufgehoben sei, weil ein merklicher Betrag dieser als einseitigfarbige Ränder der Bildteile in Erscheinung treten würde — der häufigste Fehler der Perspektive. Es muß mit anderen Worten Verzerrungsfreiheit in gleichem Maße für zwei Wellenlängen herbeigeführt sein.

Die Konstruktionsformen des holländischen Fernrohres.

Das holländische Fernrohr (Kijker) wurde in den letzten Jahren des 16 oder (wahrscheinlicher) in den ersten des 17. Jahrhunderts in Holland erfunden oder vielleicht — ebenso wie das zusammengesetzte Mikroskop — mehr gefunden. Die nächsten Ansprüche auf diese Erfindung kommen dem Brillenschleifer Johan Lipperhey in Middelburg zu, der am 2. Oktober 1608 um ein Patent dafür nachsuchte[1]. Daß Galileo Galilei es 1609 auf die bloße Kunde von seiner Existenz hin nach den Gesetzen der Dioptrik selbständig konstruiert, d. h. neu erfunden habe, wird neuerdings anscheinend mit Recht bestritten[2].

Bis zur Entdeckung der Achromasie war das holländische Fernrohr natürlich ebenso wie das Mikroskop aus zwei einfachen Linsen — einer bikonvexen und einer bikonkaven — zusammengesetzt. Bei schwachen Vergrößerungen, wo die Brennweite des Okulars eine im Verhältnis zu der des Objektivs merkliche Größe hat, war dieser gegensätzliche Charakter der beiden Bestandteile des Fernrohres zweifellos günstig für die Qualität der Bilder, indem unwillkürlich eine teilweise Kompensation der Fehler eintrat. Daneben war für die Einführung des Instruments und für seinen Gebrauch im gewöhnlichen Leben die aufrechte Abbildung offenbar ein großer Vorteil. Dieser und die anderen früher erwähnten Vorzüge des holländischen Fernrohres (sein relativ geringes Gewicht, seine Kürze, seine Helligkeit) traten praktisch immer mehr zurück und wurden desto bedeutungsloser, zu je stärkeren Vergrößerungen man überging und namentlich für den wissenschaftlichen Gebrauch. Dagegen macht sich das mit steigender Vergrößerung (mehr als proportional) abnehmende Gesichtsfeld und dazu dessen ungleichmäßige Helligkeit dann im ungünstigen Sinne immer mehr geltend.

Nach Erfindung der Achromasie ist man natürlich bald daran gegangen, Objektiv wie Okular je aus Linsen entgegengesetzen Charakters zusammenzusetzen und so die Schärfe und Farbenreinheit des Bildes in wie außer der Achse zu verbessern. Man kann nicht sagen, daß darin sehr Bedeutendes geleistet worden sei und seit fast einem halben Jahrhundert ist so ziemlich kein Fortschritt mehr gemacht worden. Die besten Fabrikate bestehen (s. Figur 139) aus einem dreifachen verkitteten Objektiv und einem ebenfalls dreifachen verkitteten[3] Okular. Da das holländische Fernrohr fast nur mehr als Handinstrument, für den binokularen

---

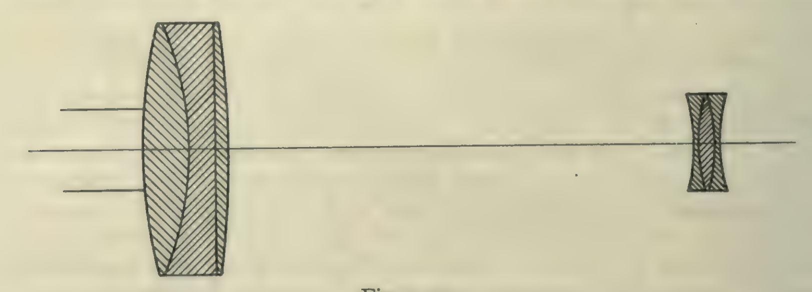
[1] Über die Erfindungsgeschichte dieses wie des Keplerschen Fernrohres siehe die bekannten Werke über Geschichte der Physik bezw. Optik von Priestley, Wilde, Poggendorff, E. Gerland, Histor. Apparate p. 44 ff.; vgl. auch H. Frederiks, Joh. Lipperhey van Wesel, burger van Middelburg en Uitvinder der Verrekykers. Amsterdam 1885. R. Wolf, Handb. d. Astronomie. Zürich 1890, p. 321—325. — [2] J. A. C. Oudemans u. J. Bosscha, Arch. Néerl. (2) **8.** 115. 1902. — [3] A. Steinheil wandte 1885 ein aus zwei getrennt stehenden Linsen bestehendes sogenanntes „panorthisches" Okular an, s. P. Zschokke, Centr.-Ztg. f. Opt. u. Mech. **7.** 1. 1886.

Gebrauch eingerichtet, hergestellt wird, so sind der Vergrößerung und auch der Größe der Objektivöffnung natürliche Grenzen gesetzt; jene wird selten über eine sechsfache, diese kaum über 60 mm hinausgehen dürfen.

Wie weit man im Gesichtsfeld gelangen könne, darf etwa aus den Bedingungen für die Lieferung von solchen Instrumenten entnommen werden, die die amerikanische Marine aufgestellt hat. Diese[1] beansprucht bei

einer Vergrößerung gleich	3 ×	$3^1/_2$ ×	$5^1/_2$ ×	$6^1/_2$ ×
ein objektives Gesichtsfeld von . .	6° 24′	5° 5′	2° 35′	2° 1′
also ein scheinbares Gesichtsfeld von	19° 12′	17° 47′	14° 12′	13° 6′

Das letztere nimmt also in dem angegebenen Spielraum schon um volle 50 % ab. Diese Anforderungen stimmen ganz überein mit dem, was man auf rechne-



Figur 139.
Ein modernes holländisches Fernrohr von $3^1/_2$-facher Vergrößerung auf $^4/_5$ verkleinert.

rischem Wege erhält, wenn man z. B. für das Verhältnis der Objektivbrennweite zur Objektivöffnung die Zahl 3 zugrunde legt. Erwägt man, daß mit einem astronomischen Okular ein scheinbares Gesichtsfeld von 40° unschwer zu erreichen ist, so wird das Verhältnis der Gesichtsfelder beim holländischen und beim astronomischen Fernrohre für die oben genannten Vergrößerungen jeweils

$$\text{gleich } 1:2{,}08, \quad 1:2{,}25, \quad 1:2{,}93, \quad 1:3{,}05 \,.$$

Die Verbindung zweier Instrumente zu binokularer Benutzung wurde schon von J. LIPPERHEY ausgeführt, dem gegenüber die Generalstaaten seine Erfindung nicht eher als eine wirklich praktisch brauchbare anerkennen und mit einem Preise belohnen wollten, bis ihm dies gelungen sei. CHÉRUBIN D'ORLÉANS beschreibt auch bereits 1686 in seinem Werke „La Vision parfaite" eine Vorrichtung zur Anpassung an den Augenabstand des Beobachters. (Ein im Conservatoire des Arts et Métiers in Paris befindliches derartiges Instrument ist abgebildet in L'Astronomie **7.** 69. 1888.)

Die Literatur über das holländische Fernrohr ist äußerst gering. Neben den oben genannten Abhandlungen und Werken von F. MOSSOTTI, N. LUBIMOW, BREDICHIN, C. BOHN, PSCHEIDL und QUESNEVILLE ist nur noch bemerkenswert A. DAUBRESSE, Étude théorique sur les jumelles et en particulier sur une combinaison permettant d'en augmenter le champ et la puissance. Revue d'Artillerie 24. année t. 47. Oct. 95. p. 1—35.

Neben der Kleinheit und ungleichförmigen Helligkeit des Gesichtsfeldes war für zahlreiche Anwendungen ein Hauptmangel des holländischen Fernrohres der, daß es die Anbringung von Markier- und Meßvorrichtungen nicht gestattete, die gleichzeitig mit dem vom Objektiv entworfenen Bild durch das Okular scharf gesehen werden. Erst in ganz neuer Zeit hat H. SCHRÖDER[2] gezeigt, daß auch beim holländischen Fernrohre solche Vorrichtungen sich anbringen lassen, aber nur auf eine ziemlich gekünstelte Art und Weise und zum Teil auf Kosten der

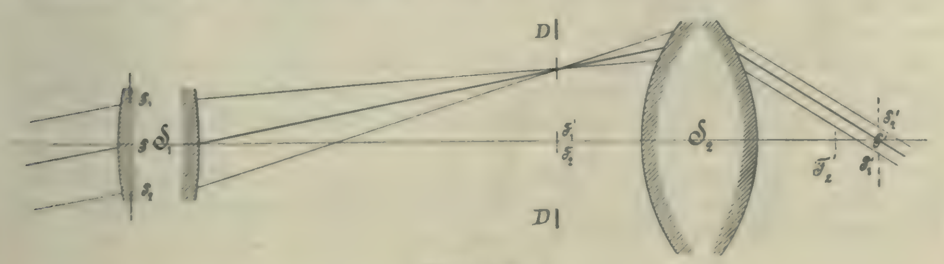
[1] Specifications for Binocular Glasses, Navy Department, April 25, 1894. — [2] H. SCHRÖDER, Ztschr. f. Instrumentenk. **10.** 134—135. 1890.

Sichtbarkeit des Hauptbildes. Das KEPLERsche Fernrohr erwarb sich seinen Vorrang als wissenschaftliches, insbesondere astronomisches, Beobachtungs- und Meßinstrument infolge seiner Überlegenheit in den genannten beiden Punkten: dem größeren — stets nur im umgekehrten Verhältnis zur Vergrößerung stehenden — Gesichtsfeld und der bequemen Anbringbarkeit von Markier- und Meßvorrichtungen in der gemeinsamen Brennebene des Objektivs und Okulars.

B. Das astronomische Fernrohr.

Strahlenbegrenzung und Strahlengang.

Das Unterscheidende für das astronomische Fernrohr gegenüber dem holländischen liegt in bezug auf Strahlengang und Strahlenbegrenzung, wie wiederholt hervorgehoben, sowohl bei Anwendung eines in einer einfachen Sammellinse bestehenden wie bei der Benutzung eines zusammengesetzten Okulars darin, daß



Figur 140.
Das astronomische (KEPLERsche) Fernrohr (schematisch).

durch dieses das Bild der Objektivöffnung jenseits seiner letzten Fläche, im zugänglichen Teile des Raumes, entworfen wird. In der Tat liegt ja schon der zweite Brennpunkt F_2' des Okulars selber bei einer einfachen Sammellinse und ebenso bei geeignet angeordneten Kombinationen von solchen jenseits der Linse, also ist dies mit dem Bilde der Objektivöffnung um so mehr der Fall. Dasselbe liegt (Figur 140) wie beim holländischen Fernrohr um die Strecke

$$F_2' P' = \xi' = \frac{f_1}{\Gamma^2} \tag{1}$$

hinter dem zweiten Brennpunkt F_2' des Okulars, und sein Halbmesser p' steht zu dem des Objektivs p wiederum in dem konstanten Verhältnis der teleskopischen Vergrößerung

$$\frac{p'}{p} = B = \frac{1}{\Gamma} \tag{1 a}$$

Das Auge kann daher jedenfalls mit dem Objektivbild in Koinzidenz gebracht werden. Nur in dem Falle, daß $p' > \pi$, d. h. $p > \pi\,\Gamma$ wirkt seine Pupille als Aperturblende, die Öffnung der abbildenden Büschel beschränkend; keinesfalls als Gesichtsfeldblende. Im Falle $p' < \pi$ ist das Bild der Objektivöffnung nach Lage und Größe Austrittspupille, das Objektiv selber Aperturblende und Eintrittspupille. Der Strahlengang, welcher sich demgemäß für das astronomische Fernrohr mit positivem Okular ergibt, ist in Figur 140 rein schematisch veranschaulicht.

Das Gesichtsfeld. Der Einfluß der Gesamtvergrößerung auf die Bildqualität außer der Achse.

Das Gesichtsfeld würde, wenn es durch eine der Okularlinsen eingeschränkt würde, in gleicher Weise wie beim holländischen Fernrohr drei Gebiete von verschiedener Helligkeit unterscheiden lassen. Es wird aber allgemein an derjenigen Stelle, an welcher das Objektiv oder dieses in Verbindung mit einem Teile des Okulars ein reelles Bild des Objekts entwirft, durch eine besondere Blende D scharf begrenzt. Die Größe dieses Diaphragmas wird unter dem Gesichtspunkt gewählt, daß einmal innerhalb desselben die Helligkeit eine ganz oder doch nahezu gleichmäßige, also der diesbezügliche Einfluß der Okularlinsen ausgeschlossen sein soll, und ferner das Sehfeld nur so weit reicht, als sei es das Objektiv sei es das Okular für sich oder beide zusammen genügend scharfe Abbildung geben.

Der bildseitige Gesichtsfeldwinkel ist also derjenige, unter welchem jene Blende durch den hinter ihr befindlichen Teil des Okulars hindurch von der A.-P. aus erscheint, der objektseitige Gesichtsfeldwinkel ist der Γte Teil von jenem.

Nehmen wir einen Objektivtypus und einen Okulartypus als gegeben an, so daß verschiedene Vergrößerungen durch proportionale Änderungen des Objektivs oder Okulars in allen ihren Dimensionen erzielt werden. Dann bleibt bei dieser Änderung das Verhältnis der das Gesichtsfeld begrenzenden Blende im Okular vom Halbmesser y' zu dessen Brennweite, und damit der bildseitige Gesichtsfeldwinkel w' unverändert, $\operatorname{tg} w' = y'/f_2'$. In der allgemeinen Gleichung für die Vergrößerung eines Fernrohres

$$\frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = \Gamma$$

können wir also bei Teleskopen mit positivem Okular w' als gegeben ansehen und es folgt, daß der objektseitige Gesichtsfeldwinkel w — also auch das angulare Gesichtsfeld des Objektivs selbst — einfach umgekehrt proportional zur Gesamtvergrößerung ist. Das objektseitige Sehfeld ist demnach darstellbar durch

$$\operatorname{tg} w = \frac{\operatorname{tg} w'}{\Gamma} = \frac{y'}{f_1} \quad . \tag{4}$$

Diese Gleichung besagt, daß, ganz gleich, ob eine Vergrößerung Γ durch entsprechende Verlängerung der Objektivbrennweite oder Verkürzung der Okularbrennweite erreicht wird, das lineare Sehfeld y' des Objektivs bei derselben Gesamtvergrößerung auch immer derselbe Bruchteil von dessen Brennweite ist und ein desto kleinerer Bruchteil davon, je stärker jene Gesamtvergrößerung ist. Je stärkere Gesamtvergrößerungen man also mit dem Fernrohr erzielt, desto geringer sind die Ansprüche, welche man an die Bildqualität (Aufhebung der Aberrationen) des Objektivs außer der Achse zu stellen braucht. Selbst bei ziemlich schwachen Vergrößerungen (10- bis 20-fachen) genügt meist die Erfüllung der Sinusbedingung, um eine hinreichende Schärfe der Abbildung innerhalb des ganzen, vom Okular in Anspruch genommenen Sehfeldes zu erzielen. Bei den größeren Refraktoren ist die Abbildung in deren kleinem Sehfeld ohne weiteres immer genügend vollkommen, d. h. von gleicher Güte wie diejenige in der Achse.

Es ist z. B. bei einer 100-fachen Vergrößerung und einem scheinbaren (bildseitigen) Gesichtsfeld von 40^0 $w' = 20^0$ und w, das objektseitige Gesichtsfeld, bloß gleich $12'$. Dagegen bei einer zehnfachen Vergrößerung unter denselben Umständen $w = 2^0 5'$, bei einer fünffachen $w = 4^0 10'$ beiderseits der Achse — also hier schon Spielraum gebend für das Bemerklichwerden der außeraxialen Bildfehler.

Bei Objektiven längerer Brennweite ist es daher meist das Okular, welches eine scharfe Abbildung über einen gewissen Winkel hinaus nicht mehr zuläßt, bei solchen kurzer Brennweite, zumal wenn deren Öffnungsverhältnis ein großes ist, wird der Einfluß der Krümmung und der sonstigen peripheren Fehler der Strahlenvereinigung (Astigmatismus, Koma) in dem vom Objektiv entworfenen Bilde mehr und mehr merklich. Hier nützt also die Verbesserung des Okulars allein nichts; es muß Kompensation seiner Fehler durch die des Objektivs erstrebt werden.

Wird das Objektiv eines Fernrohres ohne Okular, für sich, zur Projektion reeller Bilder auf Schirmen, z. B. zur Photographie der Gestirne, angewandt, dann sind natürlich darauf ganz die gleichen Gesichtspunkte anzuwenden, wie bei anderen Projektionssystemen (s. oben p. 295 ff.).

Einfluß der Aberrationen auf das Bild des Achsenpunktes.

Den Einfluß der sphärischen Aberration im allgemeinen hatten wir schon p. 106/7 vom Standpunkt der Beugungstheorie auf Grund der Arbeiten von Lord RAYLEIGH, R. STRAUBEL und K. STREHL kurz skizziert. Im großen und ganzen wird aber auch die geometrisch-optische Aberrationstheorie einen Anhalt für die Bedeutung der sphärischen wie chromatischen Aberration geben in bezug auf die Qualität der Bilder und für die Bewertung der Faktoren, welche darauf Einfluß haben.

Wir hatten früher diese Aberrationen bereits in Winkelmaß, bezogen auf die Objektseite, ausgedrückt und hatten gefunden (p. 115) den Durchmesser des durch das erste Glied der sphärischen Aberration verursachten Zerstreuungskreises

$$\zeta = \left(\frac{p}{f}\right)^3 K \quad ,$$

wo K eine von der Besonderheit des Systems, aber nicht von dessen absoluten Dimensionen, abhängige Größe ist. Nehmen wir an — was bei großen Fernrohrobjektiven sehr annähernd der Fall ist, ebenso wie bei denen der starken Mikroskope — daß das Okular verschwindend wenig Einfluß hat auf die Qualität des axialen Bildpunktes, so ist das Bild des durch das ganze Fernrohr gesehenen Zerstreuungskreises Z einfach das Γ-fache des objektseitigen

$$Z = \left(\frac{p}{f}\right)^3 K \cdot \Gamma = \frac{p^3 \cdot K \cdot \Gamma}{f^3} \quad .$$

Bei gegebenem Objektivtypus und gegebener Gesamtvergrößerung ist der Einfluß des ersten Gliedes der sphärischen Aberration also umgekehrt proportional der dritten Potenz der Objektivbrennweite und direkt proportional der dritten Potenz des Objektivdurchmessers.

Ebenso läßt sich zeigen, daß der Einfluß der höheren Glieder der sphärischen Aberration umgekehrt proportional ist der fünften, siebenten u. s. w. Potenz der Objektivbrennweite.

Hierin liegt der Grund, warum man gerade bei großen Dimensionen die Brennweite oft so lang wählt im Verhältnis zur Öffnung.

Für die chromatische Abweichung, und zwar ebensowohl für das primäre als das sekundäre Spektrum, folgt aus den Feststellungen p. 172 auf dieselbe Weise, daß deren Einfluß auf das Bild

$$X = \left(\frac{p}{f}\right) G \cdot \Gamma = \frac{p \cdot G \cdot \Gamma}{f}$$

ist, also einfach proportional der Öffnung und umgekehrt proportional der Brennweite des Objektivs.

Da das Objektiv und das zu ihm gehörige Okular von den Strahlenbüscheln stets mit gleichem Öffnungsverhältnis in Anspruch genommen werden, so zeigen obige Erörterungen, daß auch beim Fernrohr in bezug auf die Abbildung in der Achse die möglichen Aberrationen des Okulars mit wachsender Vergrößerung immer mehr zurücktreten hinter denen des Objektivs. Denn proportional mit der Vergrößerung wächst das Verhältnis der Objektivbrennweite zur Okularbrennweite.

Hiernach ergibt sich z. B., daß eine einfache Crownglaslinse mit dem Brechungsexponenten $n_D = 1{,}5$ und dem Zerstreuungsverhältnis

$$\nu = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} = \frac{1}{60} \quad ,$$

was die sphärische Aberration (1. Ordnung) betrifft bei günstigster Form (vgl. p. 118) für ein Öffnungsverhältnis von

	$\left(\frac{2p}{f}\right) =$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$
einen Wert von	$\Gamma =$	ca. 2	7	16
und einen Durchmesser	$2p =$	4 mm	14 mm	32 mm
also eine Brennweite	$f =$	40 „	210 „	640 „

erhalten darf. Setzt man die zulässige Fehlergrenze statt bei 2′ bei 4′, so verdoppeln sich die Zahlen der zweiten, dritten und vierten Zeile.

Hingegen erlaubt die chromatische Aberration einer solchen Linse bei den gleichen Öffnungsverhältnissen wie oben nur Werte von

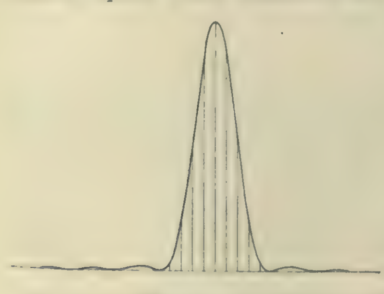
$\Gamma =$	0,67	1	1,33
$2p =$	1,33 mm	2 mm	2,67 mm
$f =$	13,3 „	30 „	53,3 „

Das sekundäre Spektrum eines gewöhnlichen achromatischen Doppelobjektivs kann man in seinem Winkelbetrage etwa $= \frac{1}{1000}$ annehmen. Dasselbe ist daher für $2p/f = \frac{1}{15}$ ganz unmerklich bei Objektiven von weniger als 10 mm Öffnung, erreicht aber in den modernen Rieseninstrumenten den Betrag von mehreren Graden.

Eingehendere Angaben und Ableitungen s. bei H. D. Taylor, Monthly Not. **54.** 67. 1893 und den auf p. 173/178 erwähnten Strehlschen Arbeiten.

Die Grenzen des Abbildungsvermögens im Fernrohr (beugungstheoretisch).

Bild eines punktförmigen Objekts. Nach den Gesetzen der Undulationstheorie spielt beim Fernrohr die lineare Öffnung p ganz die gleiche Rolle wie beim Mikroskop die numerische Apertur a — oder vielmehr umgekehrt; denn die Beugungswirkung der Fernrohrobjektive wurde sehr viel eher theoretisch diskutiert als die der Mikroskope. Schon Schwerd[1] stellte fest, daß bei idealer Strahlenvereinigung infolge der Beugung, d. h. infolge der Wellennatur des Lichtes und der durch das Objektiv erfolgenden Begrenzung der Wellenfläche, im Brennpunkt statt eines Lichtpunktes eine mehr oder minder ausgebreitete Lichtfigur entsteht. Dieselbe besteht bei kreisförmiger Öffnung des Objektivs in einem um den Ort des Bildpunktes konzentrischen Scheibchen, in dem die Helligkeit nach dem Rande zu bis Null abnimmt und mehreren dieses Scheibchen umgebenden Ringen, in denen die Helligkeit ebenfalls in Richtung des Radius des Scheibchens zwischen Null und je einem Maximum variiert. Die Maxima selbst nehmen mit



Figur 141.
Schwerds „Lichtgebirge" für eine kreisförmige Öffnung.

[1] F. M. Schwerd, Die Beugungserscheinungen aus den Fundamentalgesetzen der Undulationstheorie, analytisch entwickelt und in Bildern dargestellt. Mannheim 1835.

der Ordnungszahl des Scheibchens sehr rasch ab. Stellt man die Abstände der Punkte der Lichtfigur von ihrem Mittelpunkt als Abszissen dar, die Intensitäten als Ordinaten, so erhält man nach SCHWERD für den betrachteten Fall die vorstehende Figur (Figur 141).

Die Örter der Maxima sind bestimmt durch die Gleichungen

$$\sin \psi_1 = 1{,}220 \frac{\lambda}{2p} \quad ; \qquad \sin \psi_2 = 2{,}233 \frac{\lambda}{2p} \quad \text{u. s. w.},$$

worin ψ_k die Hälfte des Winkels ist unter dem der $k$te dunkle Ring vom hinteren Knotenpunkt des Objektivs aus erscheint. Da beim Fernrohr ψ_1, ψ_2 u. s. f. stets sehr kleine Werte annehmen, so können wir statt der Sinus die Winkel setzen und es geben die rechten Seiten der Gleichungen direkt die halben Winkelwerte der Beugungsminima an. Die Intensität schon des ersten Maximums ist sehr klein gegen die des Mittelpunktes (0,173 gegen 1,000) und noch mehr die der folgenden (0,004 u. s. f.); man kann als Bild eines leuchtenden fernen Punktes durch ein ideal vollkommenes Fernrohrobjektiv daher das zentrale Scheibchen allein ansehen, dessen Winkelwert

$$2\,\psi_1 = 1{,}22 \frac{\lambda}{p}$$

ist.

In Wirklichkeit wird auch dieser Wert nicht ganz zur Geltung kommen; denn zum Bewußtsein kommt uns nur Licht von einer gewissen Stärke, die wieder von der spezifischen Empfindlichkeit und von dem Ruhezustand des Auges sowie von der Intensität und Ausdehnung der im Gesichtsfeld sonst noch vorhandenen Lichter abhängt. Die geringste dem Auge im ausgeruhten Zustand zum Bewußtsein kommende Lichtintensität I_0 ist also merklich mitbestimmt durch die in unmittelbarer Nähe vorhandene, insbesondere die maximale Intensität I des Beugungsscheibchens, d. h. I_0 ist Funktion von I. Diese letztere wiederum ist proportional dem Quadrat der Objektivöffnung und der spezifischen Helligkeit des Gegenstandes. Das Produkt dieser beiden Faktoren gibt also den Maßstab für die absoluten Werte der Ordinaten in dem „Lichtgebirge" Figur 141 und damit für den von I selbst abhängigen Wert ψ_0, wo der Wert I_0 erreicht wird. Nur bis zu diesem Wert ψ_0 kommt die Erscheinung zur Auffassung des Beobachters. Man hat sich von dem die Intensität darstellenden Lichtgebirge gewissermaßen einen Teil der Basis, bis zu der Schichthöhe I_0, abgetragen zu denken. Das verbleibende Gebirge stellt dann die zum Bewußtsein kommenden Intensitäten dar.

Bei schwachen Sternen sieht man daher nur das mittlere Scheibchen und auch das nur in geringer Ausdehnung; bei stärkeren sieht man außer dem entsprechend verbreiterten Scheibchen auch noch einige der Ringe. Die Größe der Erscheinung hängt bei gegebener Objektivöffnung ab von der Vergrößerung des Fernrohres Γ. Damit z. B. die Ringe noch unterscheidbar werden, muß

$$(\psi_2 - \psi_1)\,\Gamma = \text{ rund } \frac{\lambda}{2p} \text{ mindestens } = 2 \text{ Bogenminuten}$$

sein, also $= 0{,}00058$; daher

$$\Gamma = \frac{2p \cdot 0{,}00058}{\lambda},$$

das gibt für gelbes Licht, $\lambda = 0{,}00058$ mm, $\Gamma = 2p$, d. h. die Vergrößerung gleich der Zahl, die den Durchmesser des Objektivs in Millimetern angibt. Für sehr scharfe Augen genügt auch wohl eine Bogenminute als Sehwinkel der Erscheinung und $\Gamma = p$ als Vergrößerungsziffer.

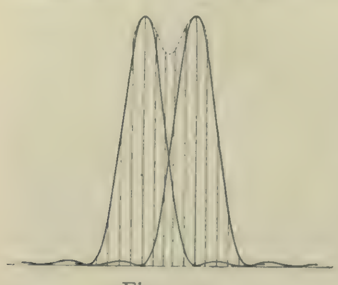
Da die Ausdehnung der Erscheinung von der Wellenlänge abhängt, so folgt, daß von einem weißen Stern auch in einem chromatisch vollkommen korrigierten

Objektiv ein Bild mit farbigen Rändern entsteht und zwar zeigt das Bild nach außen rote Mischfarben.

Bilder beliebiger Objekte. Die Bilder aller Gegenstände bestehen also im Fernrohrobjektiv — und, wie wir gleich hinzufügen wollen, ebenso in allen anderen Instrumenten, die unmittelbar strahlende Objekte abbilden — auch bei idealer Strahlenvereinigung nicht aus Punkten, sondern zum mindesten aus kleinen Scheibchen; sie haben, wie man sagt, eine gewisse „Körnigkeit". Das Bild eines beliebigen Gegenstandes, dessen Punkte unabhängig von einander Licht aussenden, wird erhalten, indem man Punkt für Punkt das ihm zugehörige Schwerdsche „Lichtgebirge" konstruiert und dann an jeder Stelle die Ordinaten addiert (integriert). Es ergibt sich auf diese Weise unter anderem, daß das Bild einer gleichmäßig leuchtenden Kreisscheibe von endlicher Winkelausdehnung wieder eine Kreisscheibe ist, deren Intensität am Rande nicht plötzlich, sondern in einer steilen Wendekurve ⌇ auf Null sinkt und deren Durchmesser gegenüber dem des geometrischen Bildes etwas vergrößert erscheint[1].

Auf die genaueren Umstände dieses und anderer ür die beobachtende Astronomie wichtiger Fälle können wir hier nicht eingehen.

Doppelsterne, Trennungsvermögen. Nur bei dem Falle zweier nahe benachbarter aber getrennter Lichtpunkte oder Lichtlinien wollen wir einen Augenblick verweilen. Die oben angegebene Konstruktion ist dann leicht auszuführen. Von den Beugungsringen können wir dabei ohne merklichen Fehler absehen und uns auf die Scheibchen beschränken. Nehmen wir beide Punkte als gleich hell an und lassen wir dieselben so nahe an einander rücken, daß das Intensitätsmaximum des einen zusammenfällt mit dem Minimum (Rande) des anderen (vgl. Figur 141); dann resultiert durch Superposition in der Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Sternbilder eine Intensitätsverteilung wie Figur 142. Der Abfall der Intensität zwischen den beiden Maximis, die unverändert $= 1$ sind, auf $0,85$ wird meistens genügen, um zum Bewußtsein zu kommen, d. h. um immer noch die beiden Bilder als getrennt erscheinen zu lassen, wenn die angewandte Vergrößerung hierzu genügt.



Figur 142.
Schwerds Lichtgebirge für zwei kreisförmige Öffnungen.

In Wirklichkeit werden gerade bei astronomischen Objekten auch Sterne, die in merklich geringerem Abstand stehen, durch die „semmelförmige" Gestalt oder selbst die bloße Verbreiterung des Sternbildes in der einen Richtung dem kundigen Beobachter genügende Kennzeichen von ihrer Duplizität geben; noch mehr wird z. B. bei Doppellinien ein relativ geringer Abfall der Intensität zwischen ihren beiden Maximis die Doppelnatur erkennen lassen.

Man ist übereingekommen, den reziproken Wert von ψ_1 als das Maß für das Unterscheidungs-, Trennungs-, Auflösungsvermögen, auch Abbildungsvermögen schlechthin von Fernrohren anzusehen.

Aus ihm ergibt sich die Grenze zwischen nützlicher und toter Vergrößerung beim Fernrohr. Der vom hinteren Knotenpunkt aus gemessene angulare Wert des Beugungsscheibchens ist identisch mit dem auf das Objekt bezogenen Wert desselben. Dem Auge wird das einzelne Beugungsscheibchen also bei einer Gesamtvergrößerung Γ dargeboten unter dem Winkel $2\,\Gamma\psi_1$. Damit das Auge zwei in solchem Abstand stehende Objekte, die beiden eben betrachteten Maxima, physiologisch getrennt auffasse, muß der Wert bei den

[1] F. M. Schwerd, l. c. p. 143.

besten Beobachtern 1′ erreichen, bei weniger geübten aber 2′ betragen. Im ersten Falle haben wir als Bedingung für die Normalvergrößerung Γ_0 fast dieselbe wie für Sichtbarmachen der Beugungsringe

$$\Gamma_0 \psi = \frac{1{,}22\,\lambda}{2p}\,\Gamma_0 = 1' = 0{,}00029 \text{ bezw. } = 0{,}00058 \quad ,$$

also mit einer unter den vorliegenden Umständen genügenden Annäherung

$$\Gamma_0 = p \text{ bezw. } = 2p \quad ,$$

d. h. man kann pro Millimeter Objektivdurchmesser eine halbe Vergrößerungseinheit rechnen, wenn man die im Bilde vorhandenen Details eben erkennen, eine ganze Einheit, wenn man sie deutlich sehen will. Darüberliegende Vergrößerungsziffern sind „tote“, unnütze, darunterliegende ungenügend, um die Leistungen des Objektivs zur Geltung zu bringen.

Zu der gleichen Bestimmung gelangt man unmittelbar, wenn man gleich von der Austrittpupille p' des Fernrohres ausgeht. Sie ist, wenn die Augenpupille sie ganz aufnimmt, wenn $\pi > p'$ ist, die beugende Öffnung, durch die das Bild leuchtender Punkte gesehen wird. Also ist

$$w_0' = \frac{1{,}22\,\lambda}{2p'} = 1' \text{ bezw. } 2' \quad \text{oder} \quad 2p' = \frac{1{,}22\,\lambda}{0{,}00029} \text{ bezw. } \frac{1{,}22\,\lambda}{0{,}00058}$$

die gewünschte Bedingungsgleichung und wir gelangen zu dem im Grunde gleichbedeutenden Ausdrucke derselben, daß die Austrittspupille des Fernrohres für eben genügendes Auflösen nicht größer als 2 mm sein darf, daß aber von einem Werte der A.-P. < 1 mm an weitere Vergrößerung einem scharfen Auge kein neues Detail mehr sichtbar macht.

Wenn der Zweck des Fernrohrs mehr der ist, schwache Lichteindrücke dem Auge verstärkt zuzuführen, seien dies punktförmige Gebilde, seien es sehr lichtschwache flächenhaft ausgedehnte Objekte (Kometensucher, Nachtgläser der Marine und Jagdgläser), so wird man die Vergrößerung allerdings merklich geringer halten und die Austrittspupille des Instruments möglichst auf den Wert bringen, den die Pupille des menschlichen Auges in der Dunkelheit annimmt, d. i. 6—8 mm[1]. (Wegen der Helligkeit der Bilder im Fernrohr überhaupt sei auf die Ausführungen p. 345 ff. verwiesen.)

Wir hatten bisher eine ideal vollkommene Strahlenvereinigung und eine kreisrunde Begrenzung des Objektivs angenommen. Erstere wird infolge der unvermeidlichen Aberrationen niemals vorhanden sein und letztere ließe sich willkürlich leicht ändern, wenn daraus ein Vorteil entstünde. In der Tat hat man sich beide Fragen vorgelegt: erstens, ob sich dem unvermeidlichen Aberrationsrest nicht ein solcher Charakter geben ließe, daß das Auflösungsvermögen des Fernrohres durch ihn statt ungünstig günstig beeinflußt würde, sei es auch auf Kosten anderer Bildeigenschaften, z. B. der Lichtstärke, und zweitens, ob die kreisrunde freie Öffnung die durchaus beste Form für alle Zwecke ist? Auch auf diese Untersuchungen, so interessant sie beugungstheoretisch wie für die praktische Anwendung sind, können wir hier nur kurz hinweisen[2].

---

[1] Die extremen Werte, die Cl. du Bois Reymond für die Augenpupille in völliger Dunkelheit ermittelte (10—12 mm), kommen praktisch kaum zur Geltung und treten wohl überhaupt nur bei jugendlichen Individuen ein. — [2] Neben den p. 106/7 zitierten Abhandlungen und Werken von Lord Rayleigh, R. Straubel und K. Strehl, namentlich Ch. André, Étude de la diffraction dans les instruments d'optique. Paris 1876.

Konstruktionsformen des astronomischen Fernrohres.

Das Objektiv.

Aus dem Angeführten geht hervor, daß sich wie beim Mikroskop so auch beim Fernrohr die Bemühungen der Optiker um Steigerung der Leistungsfähigkeit des Instruments wesentlich auf das Objektiv richten mußten. Diese Bemühungen mußten nach zwei Richtungen gehen: erstens nach möglichster Vergrößerung der Öffnung, von der, wie wir gesehen haben, *caet. par.* Auflösungsvermögen, Helligkeit und raumdurchdringende Kraft abhängen, und zweitens nach möglichster Vervollkommnung der Bildqualität (Strahlenvereinigung), die die Voraussetzung dafür ist, daß die erstgenannten Eigenschaften überhaupt zur Geltung kommen. Wie wir oben gezeigt haben, stehen diese beiden Eigenschaften in einem Widerspruch zu einander: je größer die Objektivöffnung ist, desto größer sind auch, rein theoretisch betrachtet, unter sonst gleichen Umständen die Fehler des von ihm entworfenen Bildes, desto größerer Anstrengungen — Aufwand an Konstruktionselementen, Sorgfalt der Arbeit, Vorzüglichkeit des Materials — bedarf es seitens des ausführenden Optikers, um eine genügende Bildqualität zu erzielen. Dazu kommen aber beim Fernrohr noch erschwerende, einer Steigerung der Leistungen bald Grenzen setzende Momente, die beim Mikroskop in dieser Art fehlen. Mit der Vergrößerung der Dimensionen wächst einerseits die Schwierigkeit, das Material zu dem Objektiv — seien es Linsen, seien es Spiegel — in der genügenden optischen und mechanischen Beschaffenheit zu erlangen. In der Tat ist der Entwickelungsgang der Fernrohroptik ganz wesentlich mit bedingt worden bei den Refraktoren durch den der Glasschmelzkunst, nicht bloß gemäß der optischen Grundwirkung der von ihr zur Verfügung gestellten Glasarten, sondern auch ganz besonders gemäß ihrer quantitativen Leistungen: der Größe der jeweilig herstellbaren Objektivscheiben. Und ganz ebenso für die Reflektoren durch die Verbesserung der Schmelztechnik für Spiegellegierungen, der Versilberungsverfahren und dergleichen mehr.

Aber auch bei vollkommenstem Material wachsen die Schwierigkeiten einer entsprechend vollkommenen Formgebung mit den Dimensionen bald ins Ungemessene. Ist und bleibt doch die Wellenlänge des Lichtes der stets gleiche Maßstab für die nach dieser Richtung zu stellenden Anforderungen. Die Bemühungen der Optiker konnten sich aber nicht einmal auf die Vergrößerung der Öffnung beschränken. Denn bei gegebenem Öffnungsverhältnis würde die Brennweite und damit die Dimensionen des ganzen Instruments bis zu der es umschließenden Kuppel entsprechend wachsen. Das würde aber eine sehr beträchtliche (annähernd mit der dritten Potenz der Brennweite proportionale) Verteuerung und auch rein sachlich mancherlei Erschwernis in der Erfüllung notwendiger Forderungen (z. B. Vermeidung der Durchbiegung des Rohres) mit sich bringen. Es wurde daher bald die Bedeutung erkannt, die einer relativen Verkürzung des Fernrohres zukommt, d. h. in letzter Linie einer Steigerung des Öffnungsverhältnisses. Da mit diesem aber die fundamentalen Bildfehler *caet. par.* in noch schnellerer Progression wachsen, als mit der Öffnung allein, so war man doch gezwungen, im allgemeinen die astronomischen Fernrohre bei wachsender absoluter Öffnung mit abnehmendem Öffnungsverhältnis zu konstruieren. Schließlich setzen die mechanischen Eigenschaften des Materials einer Steigerung der Dimensionen Grenzen. Ein Objektiv, das in einer Stellung, z. B. wenn horizontal gelagert — wie bei der Bearbeitung gewöhnlich geschieht — ideal vollkommen gestaltet ist, erfährt eine Deformation durch sein eigenes Gewicht, wenn in eine andere Stellung gebracht, z. B. vertikal gestellt, oder um 180° gedreht (oben und unten vertauscht) oder in irgend welcher Zwischen-

stellung. Diese Deformationen sind aber bei proportionaler Vergrößerung aller Dimensionen des Objektivs etwa dem Durchmesser proportional.[1]

Eine vierte, mit wachsenden Dimensionen sich einstellende Schwierigkeit: die stabile Verbindung des Objektivs mit dem Okular und die zweckentsprechende Bewegung der so großen Massen mit der nötigen Gleichförmigkeit und in der gewünschten Pointierungsrichtung hat sich mit den im letzten Jahrhundert so rapid entwickelten Hilfsmitteln der Ingenieurkunst verhältnismäßig befriedigend überwinden lassen, und diese Kunst scheint auch in den jetzt aus den anderen angeführten Momenten gegebenen Höchstbeträgen für die Objektivgrößen ihrerseits eine Grenze noch nicht zu finden.

Der Entwickelung des astronomischen Fernrohres ist ein Umstand zugute gekommen, der für keine andere Gattung der optischen Instrumente annähernd so günstig war: daß die Benutzer desselben gemäß ihrer beruflichen Vorbildung vorzüglich befähigt waren, selbst an der Weiterbildung der optischen wie mechanischen Aufgaben mitzuarbeiten. Und das ist in reichem Maße geschehen. Ein großer Teil der Bemühungen zur Verbesserung des astronomischen Fernrohres ist von Astronomen ausgegangen oder doch angeregt und während der Ausgestaltung durch rege Mitarbeit intensiv gefördert worden.

Das holländische Fernrohr scheint in der Astronomie nicht lange angewendet worden zu sein. Wie wir oben gesehen haben, war sein Konstruktionstypus in optischer Hinsicht bei Ausführung in größeren Dimensionen besonders ungünstig. An seine Stelle trat daher bald ausschließlich das KEPLERsche in seiner einfachsten Gestalt: mit einfacher Bikonvexlinse als Objektiv, und ebensolcher als Okular. Die diesem anhaftenden sphärischen und chromatischen Fehler in wie außer der Achse wurden aber bald durch Beobachtung und Theorie festgestellt. Zur Hebung der ersteren wurde namentlich von DESCARTES der Ersatz der sphärischen Flächen durch ellipso- und hyperboloidische (vgl. p. 17) vorgeschlagen, doch, wie es scheint, kaum praktisch zu verwirklichen versucht — jedenfalls wegen der großen, der Ausführung des Vorschlags entgegenstehenden technischen Schwierigkeiten.

Große Brennweiten. CHR. und CONST. HUYGENS suchten ganz rationell den Einfluß der sphärischen Aberration unter anderem dadurch zu mindern, daß sie die Brennweite des Objektivs im Verhältnisse zu seiner Öffnung sehr lang wählten. So kam man 1684 auf die sogenannten „telescopes aëriens“, bei denen das Objektiv am oberen Ende eines Mastes für sich angebracht war, vom Beobachter (Okular) her mittels Schnurübertragung beweglich, aber ohne Rohrverbindung zwischen beiden. Trotz der offenbaren Nachteile dieser Konstruktion fand sie eine Zeitlang Anklang und man ging bei ihrer Verwirklichung bis zu großen Dimensionen (angeblich bis zu Objektivbrennweiten von 600′ [195 m], jedenfalls bis zu solchen von über 100′ [32 m] — AUZOUT, HARTSOEKER). Die Bemühungen zur Verbesserung des Refraktors gerieten aber bald fast völlig in Stillstand.

Das astronomische Spiegelteleskop (Der Reflektor).

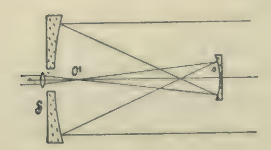
I. NEWTON, der aus seinen Versuchen (fälschlich) gefolgert hatte, daß die chromatische Aberration nicht aufhebbar sei, und aus theoretischen Überlegungen zu dem Ergebnis gekommen war, daß sie sehr viel (600 mal!) schädlicher sei, als die sphärische, gab weitere Versuche zur Verbesserung des dioptrischen Fernrohres

[1] Nach SCHUPMANN (Die Medialfernrohre, Leipzig 1899) ist bei dreipunktiger Auflage die Deformation dem Quadrat des Verhältnisses zwischen Durchmesser und Dicke und außerdem dem Durchmesser proportional.

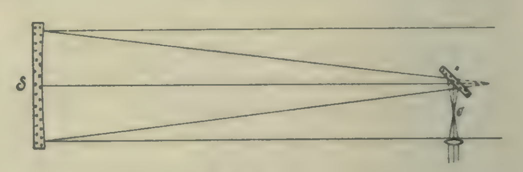
auf und wandte sich dem katoptrischen Fernrohr zu. Seiner Autorität folgten die meisten zeitgenössischen und auf lange Zeit auch die nachfolgenden Optiker.

Das Spiegelteleskop war schon früher von Nic. Zucchi erfunden worden. Dieser behauptet wenigstens in seiner Optica philosophica (Lugduni 1652—1656), schon 1608 die Kombination eines konkaven (Metall) Spiegels mit einer bikonkaven Okularlinse versucht zu haben. Der bekannte Mathematiker M. Mersenne hatte dann etwa 1639 in Universae geometriae mixtaeque mathematicae synopsis (Paris 1644) empfohlen, einem das einfallende Licht auffangenden paraboloidischen Hohlspiegel einen zweiten paraboloidischen, aber konvexen gegenüberzustellen, der die Strahlen wieder in die Einfallsrichtung reflektierte und durch eine im ersten Spiegel angebrachte zentrale Öffnung dem Auge zuführte. Auch dieser Vorschlag soll auf die von Descartes dagegen erhobenen Einwände hin nicht ausgeführt worden sein.

Unabhängig von ihm schlug J. Gregory 1661 die nach ihm benannte der Mersenneschen ähnliche Anordnung vor (Optica promota, London 1665, p. 94), die von Cox und Rives daselbst nach anfänglichen Fehlversuchen schließlich zur befriedigenden Ausführung kam und bis Ende des 18. Jahrhunderts besonders



Figur 143.
Das Gregorysche Teleskop.



Figur 144.
Das Newtonsche Teleskop.

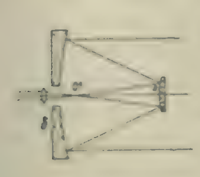
beliebt war. Dem paraboloidischen Hauptspiegel S (Figur 143) steht koaxial der ebenfalls konkave und paraboloidische Nebenspiegel s gegenüber. Das aufrechte reelle Bild $0'$ kommt nahe am ersteren zustande und wird durch ein in der Mitte desselben angebrachtes Okular betrachtet.

I. Newton verzichtete auf die Hebung der sphärischen Fehler durch Gestaltung der Spiegel nach Kegelschnittflächen. Er stellte 1671 dem kugelförmigen Auffangsspiegel S (Figur 144) einen unter 45^0 zur Achse geneigten ebenen Spiegel P so gegenüber, daß das — nunmehr verkehrte — reelle Bild in O' seitlich von den einfallenden Strahlenbüscheln zustande kam und dort mittels eines Okulars beobachtet werden konnte[1]. Auf die technischen von ihm und anderen an dieser Konstruktion versuchten oder vollzogenen Verbesserungen kann hier nicht näher eingegangen werden[2]. Erwähnt sei nur noch Cassegrains mit der Newtonschen etwa gleichzeitigen Konstruktion (Figur 145), wo der hohle Auffangsspiegel Gregorys durch einen konvexen ersetzt ist, der die von ersterem reflektierten Büschel vor ihrer Vereinigung auffängt und in weniger konvergente verwandelt, deren Fokus wiederum nahe am ersten Spiegel liegt. Gegenüber der Gregoryschen Konstruktion hat die Cassegrainsche offenbar den Vorteil geringerer Länge bei gleicher Brennweite. Als unbequem wurde von den Zeitgenossen empfunden, daß bei ihr das reelle der Beobachtung durch das Okular unterliegende Bild ein umgekehrtes ist[3].

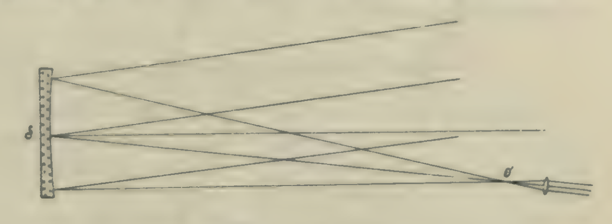
[1] I. Newton, Phil. Trans. 1672; in Phil. Trans. Abridgement 5. ed. 1749, Vol. I, p. 204. — [2] Vgl. J. G. Geissler, Technische Geschichte des reflektierenden oder Spiegelteleskops. F. Klein, Das Brachyteleskop der k. k. Marinesternwarte zu Pola nebst einer Geschichte des Spiegelteleskops. Wien 1882; Abdruck aus Central-Ztg. f. Opt. u. Mech. **2.** 1881; **3.** 1882. — [3] Wegen der Berechnung der maßgebenden Abbildungsfaktoren als: Objektivbrennweite, Ausdehnung und Beleuchtung des Gesichtsfeldes aus den Elementen der Konstruktionen sei auf die Darstellungen von Heath, Herman (p. 26) u. a. verwiesen.

Die Bemühungen der Optiker um die Ausgestaltung des Spiegelteleskops bewegten sich von jener Zeit bis in die neueste wesentlich auf der Bahn der technischen Vervollkommnung: der Verbesserung des Schleif- und Polierverfahrens, der Erfindung und praktischen Herstellung von Spiegelmetallen oder Metallüberzügen auf Glasspiegeln von möglichst großem Reflexionsvermögen und möglichster Haltbarkeit (Widerstandsfähigkeit gegen den Einfluß der Atmosphäre), dann auch der Ausarbeitung von geeigneten Montierungen für die verschiedenen Größenklassen der Spiegel. Auf die nach diesen Richtungen in alter und neuerer Zeit erzielten technischen Fortschritte von J. Short, Molyneux, Bradley, W. Herschel, Rochon, C. A. Steinheil, Liebig, Foucault, Martin, Safarik, Lassell, Lord Rosse, Browning u. a. können wir nur hinweisen.

Ihren Höhepunkt erreichte die Entwickelung des Spiegelteleskops durch W. Herschel, der 1788 ein solches Instrument von 40 engl. Fuß (12,2 m) Länge bei 4′ (1,22 m) Öffnung vollendete und für so große Dimensionen auch eine konstruktive Änderung vornahm, nämlich die Fortlassung des Auffangspiegels behufs Steigerung der Helligkeit. Er gab (zuerst 1776) dem Hauptspiegel S (Figur 146) eine geringe Neigung gegen die einfallenden Büschel, so daß das



Figur 145.
Das Cassegrainsche Teleskop



Figur 146.
Das Herschelsche Teleskop.

reelle Bild seitlich am Rohre zustande kam und dort beobachtet werden konnte. Ist der Reflexionswinkel der Hauptstrahlen klein, und das ist eben bei großen Dimensionen des ganzen Instruments der Fall, so sind auch die durch die schiefe Reflexion herbeigeführten Bildfehler nicht störend. Das Ergebnis seiner Studien über Wesen und Wirkung der Teleskope legte W. Herschel in den Phil. Trans. 1787—1815 nieder.

In Deutschland wurde die Herstellung von Spiegelteleskopen, die bis dahin fast ein Monopol englischer Optiker war, um 1750 durch den Grafen von Löser[1] eingeführt, jedoch erst am Ende des 18. Jahrhunderts durch den Selenographen Schröter eigentlich dorthin verpflanzt (Schrader-Kiel, Gefken, von Bessel gerühmt)[2]. Die Anfang des 19. Jahrhunderts beginnende lebhafte Diskussion[2] über die relativen Vorzüge und Nachteile des katoptrischen und des dioptrischen Fernrohres wurde praktisch zu Gunsten des letzteren entschieden durch die ausgezeichneten Leistungen J. Fraunhofers in München.

Das Spiegelteleskop erlebte noch eine Art Nachblüte in England durch die Rieseninstrumente W. Lassells (1840) und des Earl of Rosse (Leviathan $o = 6'$ [1,83 m], $f = 53'$ [16,2 m] 1840—1845). Die letzten großen Instrumente waren der für Melbourne 1866—1869 gelieferte Metallspiegel von $o = 4'$ (1,22 m), $f = 30\frac{1}{2}'$ (9,3 m) (Grubb) und der Glasspiegel der Pariser Sternwarte ($o = 1{,}20$ m, $f = 7{,}15$ m) (1875, Foucault, Martin, Wolf).

Auch das von Forster vorgeschlagene und von K. Fritsch in Wien ausgeführte sogen. Brachyteleskop[2] mit einem zur Achse des Hauptspiegels geneigten Auffangspiegel, hat eine größere Verbreitung nicht gefunden.

[1] Vgl. Kästners Vorrede zum „vollständigen Lehrbegriff d. Optik". Altenburg 1755. —
[2] F. Klein, Centr.-Ztg. f. Opt. u. Mech. l. c.

In allerneuester Zeit ist das Interesse für Spiegelteleskope wieder wachgerufen worden durch die vorzüglichen von E. Keeler mit seinem Crossley-Reflektor erhaltenen Sternphotogramme und eine Veröffentlichung von Ritchey im Astrophysical Journal **14**. 217. 1901, der einerseits die Richtlinien für eine besonders einfache und praktische Montierung solcher Spiegel angab, andererseits an Probebildern zeigt, in wie hohem Maße die den Spiegeln im Gegensatz zu den Refraktoren von selbst innewohnende vollkommene Achromasie bei der Photographie himmlischer Objekte (Astrophotographie) zur Geltung gebracht werden kann. Da die sphärischen Aberrationen sich durch geeignete Gestaltgebung des oder der Spiegel ohne allzugroße Mühe fast auf Null bringen lassen, so wird das Spiegelteleskop für den genannten Zweck ein in optischer Beziehung geradezu ideales Instrument.

So erleben wir denn aufs neue den Konkurrenzkampf zwischen den beiden Hauptgattungen der Teleskope, den Reflektoren und Refraktoren, der zu möglichst vollkommener Ausgestaltung beider und zu einer neuen Grenzbestimmung der Gebiete führen wird, zum Teil schon geführt hat, auf denen jedes seine eigentümlichen Vorzüge am besten entfaltet, seine unvermeidlichen Mängel am wenigsten störend wirken.

Das astronomische Linsenteleskop (der Refraktor).

Das Spiegelteleskop hat in seinen leistungsfähigsten Konstruktionsformen, der Newtonschen und der Herschelschen, den großen Nachteil für den praktischen Gebrauch, daß der Beobachter an dem nach dem Himmel zugekehrten Ende des Rohres Aufstellung nehmen muß. Das führt, wie ohne weiteres einleuchtet, zu Schwierigkeiten in der Konstruktion des Beobachtungsstandes, der ja der Bewegung des Rohres folgen muß. Ein zweiter, schwer empfundener Mangel der Reflektoren war der, daß das Spiegelmetall, aus dem sie hergestellt waren, entweder kein sehr großes Reflexionsvermögen hatte (Lord Rosses Metall z. B. 60—65 $^0/_0$) oder — bei versilberten Glasflächen — oft der Erneuerung bedurfte. Diese stellte nicht unerhebliche Anforderungen an die Fertigkeit des Benutzers in solchen Operationen oder gefährdete bei ungenügender Fertigkeit die Gestalt und damit die Vollkommenheit der Wirkung des Spiegels.

Die Bemühungen um Ausgestaltung des dioptrischen Fernrohres, wenn auch zeitweise durch das auf den Reflektor gerichtete Interesse mehr oder minder zurückgedrängt, konnten aber schon deswegen nie ganz verschwinden, weil für kleinere Dimensionen, insbesondere für den Handgebrauch, das Linsenfernrohr stets überlegen blieb. Die auf dessen Vervollkommnung gerichteten Arbeiten gaben naturgemäß stets den Boden für die Bemühungen um Wiedergewinnung des wissenschaftlichen Anwendungsgebiets. Durch die Feststellung, daß eine Achromasie beim dioptrischen Fernrohr durch geeignete Wahl der Substanzen und Brennweitenverhältnisse der Linsen möglich sei (Chester More Hall 1729, Klingenstierna 1754, vgl. p. 169) erfuhren diese Bestrebungen neue kräftige Antriebe.

So sehen wir am Ende des 18. Jahrhunderts bereits zahlreiche Optiker mit der Anfertigung und Verbesserung von Linsenfernrohren beschäftigt. Lange Zeit unerreicht blieben die Leistungen Peter Dollonds und seines Sohnes John. Um das bei größeren Dimensionen bald sichtbar werdende sekundäre Spektrum aufzuheben oder doch zu verringern, schlugen Euler[1], Blair[2] u. a. (vgl. p. 175) die Anwendung von „Flüssigkeitslinsen" vor, d. h. von Flüssigkeiten, welche zwischen den Linsen oder zwischen uhrglasförmigen Platten eingeschlossen selber linsenförmige Bestandteile des Teleskops bildeten. In der Reihe der Flüssigkeiten boten mehrere in der fraglichen Beziehung günstigere Verhältnisse dar,

[1] L. Euler, Mém. de Berlin 1761. p. 231. — [2] R. Blair, Trans Roy. Soc. Edinb. **3**. 3. 1719.

als die zur Verfügung stehenden festen Körper, insbesondere als die Glasarten. Diese Bemühungen hatten aber gar keinen Erfolg, weil schon durch geringe Temperaturvariationen die optische Beschaffenheit eines größeren Flüssigkeitskörpers in seinen verschiedenen Teilen viel zu stark geändert wird, und infolgedessen beträchtliche Inhomogenitäten innerhalb derselben Masse entstehen.

Die Konstruktionsformen des Fernrohres wurden, wie schon bemerkt, jederzeit in erheblichem Grade durch den Zustand mitbedingt, in dem die Technik der Materialbereitung (Glasschmelzerei) und der Materialbearbeitung (praktische Optik) sich befanden. So schien am Ende des 18. und am Anfang des 19. Jahrhunderts die Herstellung größerer homogener Flintglasscheiben besondere Schwierigkeiten zu bereiten. Um dieser Schwierigkeit zu begegnen, schlugen BARLOW[1], LITTROW[2] und ROGERS[3] vor, die Zerstreuungslinse, welche die sphärische und chromatische Unterkorrektion der kollektiven Objektivlinse zu kompensieren hat, in einen der Spitze der Lichtbüschel näheren und demnach engeren Teil derselben zu stellen. Sie kann dann also entsprechend ihrer Annäherung an das Bild kleiner sein als jene Vorderlinse. (Diese Anordnung war von CHR. v. WOLF schon 1750 zur Abkürzung des Fernrohres vorgeschlagen worden.) Konstruktionen aus einem sammelnden und einem davon getrennten zerstreuenden Bestandteil rühren auch von W. FR. HAMILTON[4], R. STEINHEIL[5], A. KERBER[6] her. Während HAMILTON und KERBER die Beseitigung des sekundären Spektrums bezwecken, geht STEINHEIL hauptsächlich auf eine Verkürzung des Fernrohres aus. HAMILTON verwendet dabei die Rückseite der zerstreuenden Flintlinse als Spiegel und nimmt damit einen Spezialfall der unten genannten SCHUPMANNschen Konstruktion vorweg.

Da diese Dispansivlinse dann aber, um Achromasie zu ermöglichen, eine im Verhältnis zu ihrer Brennweite große Zerstreuung besitzen muß, so wählte BARLOW als Material für sie den sehr stark zerstreuenden Schwefelkohlenstoff, während ROGERS eine aus Flint- und Kronglas zusammengesetzte Kombination wählte, welche für Strahlen mittlerer Wellenlänge wie ein Planglas wirkte, in bezug auf das gesamte Spektrum aber eine Überkorrektion von der erforderlichen Größe besaß. Bei beiden Konstruktionen, von denen die zweite unter dem Namen „Dialytische Fernrohre" namentlich von PLÖSSL ausgebildet und verbreitet wurde, konnte durch mäßiges Variieren des Linsenabstandes die definitive Korrektion vollzogen werden. Für terrestrische Fernrohre wurden derartige Konstruktionen später von B. HASERT und H. SCHRÖDER[7] angewandt.

L. SCHUPMANN[8] schlug neuerdings für astronomischen Gebrauch die Verbindung einer einfachen Objektivsammellinse mit einem deren Brennebene nahestehenden System aus einer negativen Flintlinse und einem Hohlspiegel vor, das die Stelle einer Sammellinse ohne Zerstreuung vertritt („Medialfernrohr"). Diese Verbindung gestattet neben anderen Vorteilen theoretisch eine sehr vollkommene Korrektion der Aberrationen (auch die völlige Beseitigung des sekundären Spektrums), ist aber praktisch bis jetzt nicht recht geglückt — wie es scheint wegen der Empfindlichkeit der Konstruktion gegen kleine Zentrierungsfehler. Eine der SCHUPMANNschen verwandte katadioptrische Konstruktion war schon von dem oben genannten H. SCHRÖDER[9] vorgeschlagen worden.

---

[1] P. BARLOW, Phil. Trans. 1828. 1829. 1831. 1833. (Mehrere Abhandlungen und Berichte über den Erfolg ausgeführter Objektive.) — [2] J. J. LITTROW, BAUMGARTNER und v. ETTINGSHAUSENS Ztschr. **4.** 257. 1828. — [3] W. ROGERS, Edinb. Journ. of Science. **9.** 126. 1828. Untersuchungen uber diese Konstruktionsform von S. STAMPFER, Jahrb d. K. K. polyt. Inst. **14.** 108. 1829. — [4] W. FR. HAMILTON, Engl. Pat. Nr. 3781 v. J 1814. — [5] R. STEINHEIL, Ztschr. f. Instrumentenk. **12.** 374. 1892. — [6] A. KERBER, Centralztg. f. Opt. u. Mech. **14.** 145. 1893. — [7] H. SCHRÖDER, Ztschr. f. Instrumentenk **6.** 41. 1886. — [8] L. SCHUPMANN, Die Medialfernrohre. Leipzig 1899. — [9] H. SCHRÖDER, Centralztg. f. Opt. u. Mech. **17.** 101. 1896.

J. FRAUNHOFER brachte im ersten Viertel des vorigen Jahrhunderts das Fernrohr auf die höchste Stufe der theoretischen und technischen Vollendung. Er schuf die erste genaue Methode zur Feststellung der optischen Eigenschaften (Refraktion, Dispersion) durchsichtiger Medien, auf die allein eine genaue Berechnung sich stützen konnte: er vervollkommnete die für die Optik brauchbaren Glasflüsse in technischer Hinsicht (Klarheit, Größe, Freiheit von Spannungen) und machte auch, gestützt auf eben jene Untersuchungsmethode, erfolgreiche Anstrengungen zur Gewinnung neuen Materials mit wertvollen optischen Eigenschaften. Er gab seinen Objektiven Formen, die sowohl in bezug auf die Wahl der Ausmaße (Krümmungen, Dicken, Abstände) als auf die technische Vollkommenheit der Gestaltgebung heute noch als mustergültig zu bezeichnen sind. Sein früher Tod setzte all diesen Arbeiten ein vorzeitiges Ziel.

Ihre Fortführung durch andere mußte naturgemäß nach den beiden Richtungen erfolgen: der Beschaffung von durchsichtigen Medien (Gläsern), die neben der Erfüllung der technischen Anforderungen eine Verminderung bezw. Aufhebung des sekundären Spektrums erlauben und der Berechnung von Konstruktionsformen, die womöglich neben der Erfüllung jener Anforderung der einer vollkommeneren Strahlenvereinigung genügen: Verminderung der „Zonen“ für je eine Wellenlänge, Verminderung bezw. Aufhebung der chromatischen Differenz der sphärischen Aberration. Daneben gilt es dann stets, noch andere Bedingungen zu erfüllen, die entweder in optischer Hinsicht (z. B. Ausdehnung des scharfen ebenen Gesichtsfeldes) oder in technischer wertvoll erscheinen. Da bis in die neueste Zeit fast nur das relativ einfach gebaute Fernrohrobjektiv einer mehr oder minder vollständigen theoretischen Diskussion zugänglich war, so bezieht sich die p. 152—155 angegebene Literaturzusammenstellung so gut wie ausschließlich auf den uns hier interessierenden Gegenstand und es kann daher ohne weiteres auf diese verwiesen werden. Über die chromatischen Fehler vgl. die Ausführungen oben p. 174—184. Ausführliche Angaben mit Anleitung zur Berechnung, Tabellen u. s. w. findet man bei A. GLEICHEN, Lehrbuch der geometrischen Optik, Leipzig 1902, insbesondere p. 287 ff.; s. auch A. KÖNIG in M. v. ROHR, Die Bilderzeugung in optischen Instrumenten, Berlin 1904, VII. Kap. Über die Geschichte des optischen Glases s. M. v. ROHR, Theorie u. Gesch. des photogr. Objektivs. Berlin 1899, p. 155. Wir heben nur einige wichtige praktisch erprobte Konstruktionsformen der Objektive hervor:

1. Das FRAUNHOFERsche Objektiv aus gewöhnlichen Silikatgläsern. Es besteht (Figur 147) aus einer bikonvexen Kronglaslinse, die ihre schwächere Krümmung dem Objekte zukehrt und einer sie im Scheitel ganz oder nahezu berührenden konkavkonvexen Flintlinse, deren innere negative Krümmung nur wenig schwächer ist, als die ihr zugewandte positive Krümmung der Kronlinse. Mit diesem Typus läßt sich die sphärische und chromatische Aberration aufheben und die Sinusbedingung (auch oft FRAUNHOFERsche Bedingung genannt) (vgl. p. 151) erfüllen; die Zonen der sphärischen Aberration sind gering, die chromatische Differenz der sphärischen Aberration behält ebenfalls einen relativ niedrigen Wert.

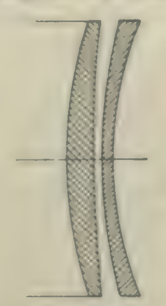
Figur 147. Das FRAUNHOFERsche Fernrohrobjektiv, $f = 500$ mm. Die beiden Linsen sind dicht an einander gerückt zu denken, so daß sie einander in der Mitte berühren (die inneren Radien sind wenig verschieden).

Die beiden erstgenannten Hauptbedingungen lassen sich auch durch ein ähnliches Objektiv erfüllen, in dem die beiden inneren Krümmungen gleich sind, das also ein Verbinden dieser beiden Flächen durch einen durchsichtigen Kitt gestattet — für kleinere Dimensionen, bis höchstens 80 mm Durchmesser, wichtig wegen des Gewinns an Lichtstärke durch Vermeidung der inneren Reflexionen und größerer mechanischer

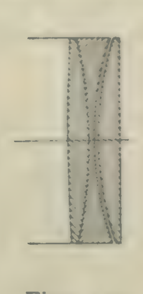
Stabilität des Objektivs. Durch geeignete Wahl der Glasarten läßt sich dabei auch die Sinusbedingung erfüllen und die anderen guten Eigenschaften des FRAUNHOFERschen Typus beibehalten.

Durch Umkehrung der Glasfolge, Flintlinse voran (A. STEINHEIL), erhält man im allgemeinen etwas geringere Krümmungen unter sonst gleichen Verhältnissen.

2. Das GAUSSsche Objektiv[1] (Figur 148) erfüllt neben den Grundbedingungen die zuerst von D'ALEMBERT aufgestellte Bedingung der Aufhebung des Kugelgestaltfehlers für zwei Stellen des Spektrums. Die voranstehende Kronglaslinse kehrt ihre stark konvexe Seite dem Lichte, eine schwach konkave — je nach Wahl der Glasarten auch schwach konvexe — Fläche dem Bilde zu. Die in geringem Abstand ihr folgende Flintlinse ist ein Meniskus mit nach dem Bilde zugekehrter relativ starker Hohlung. In diesen relativ starken Krümmungen (man vergleiche die entsprechenden Radien in Figur 147 und 148) und einer entsprechend großen Empfindlichkeit gegen Zentrierungsfehler liegen die besonderen Schwierigkeiten für die Ausführung dieser Konstruktion. Hier wird durch Umkehrung — Flint voran — merklich gewonnen[2] und es gestattet die Anwendung dieses Typus in mittleren Größen, bis 300 mm, wohl etwas größere Öffnungsverhältnisse, als andere zweilinsige Kombinationen.



Figur 148. Das GAUSSsche Fernrohrobjektiv, f = 500 mm.



Figur 149. Das TAYLORsche Fernrohrobjektiv, f = 500 mm.

Wesentliche Fortschritte über diese beiden Typen hinaus konnten nur erzielt werden einerseits durch Verbesserung der optischen Eigenschaften der Gläser, andererseits durch Anwendung größerer technischer Mittel, d. h. Vermehrung der Linsenzahl. Über die erstere, in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts hauptsächlich durch das Zusammenwirken von E. ABBE und O. SCHOTT in Jena bewirkt, haben wir schon oben p. 175 ff. berichtet. Die Verwertung dieser und später hinzu gekommener Glasflüße für die Optik des astronomischen Fernrohres — zuerst durch den Verfasser in Verbindung mit der Werkstätte von C. BAMBERG Berlin-Friedenau versucht[3] — wurde hauptsächlich von H. D. TAYLOR in Verbindung mit der optischen Werkstätte von COOKE & SONS in York und von A. KÖNIG in Verbindung mit CARL ZEISS in Jena geleistet.

Die vollendetsten Objektivtypen beider bestehen aus drei Linsen; aber auch mit dieser Vermehrung der Mittel ist ein Öffnungsverhältnis, wie das FRAUNHOFERsche und gar das GAUSSsche Objektiv darbieten, nicht erreichbar gewesen.

Das Objektiv von H. D. TAYLOR stellt Figur 149 nach der englischen Patentschrift (Nr. 17994, 1892, Improvements in Compound Object Glasses for Telescopes) dar. Das sekundäre Spektrum ist darin durch die Wahl der Glasarten sehr volllkommen beseitigt, die chromatische Differenz der sphärischen Aberration angeblich ebenfalls auf Null gebracht. Das Öffnungsverhältnis, bei dem genügende Korrektion erreichbar ist, übersteigt nicht 1 : 15. Die größte bisher erreichte absolute Öffnung war etwa 325 mm. Der Einschluß der gegen äußere Einflüsse empfindlichsten Glasart, aus der die mittlere Linse des Systems besteht, zwischen Linsen aus widerstandsfähigem Material, bedeutet einen wichtigen praktischen Vorzug der Konstruktion.

[1] C. F. GAUSS, LINDENAUS Ztschr. f. Astron. **4.** 345. 1817; Ges. Werke **5.** 507, weitere Literatur s. oben p. 181. — [2] S. CZAPSKI, vgl. H. KRÜSS, Ztschr. f. Instrumentenk. **8.** 7. 53. 83. 1888. — [3] s. Tagebl. d. Vers. deutscher Naturforscher u. Ärzte. Berlin 1886, sowie H. C. VOGEL, Vierteljahrsschr. d. astr. Gesellsch. **22.** 142. 1888. B. HASSELBERG, Mél. math. et astr. de l'Acad. de St. Pétersb. **6.** 669. 1888.

Die ZEISS-KÖNIGsche Konstruktion der „Apochromate“ hat hauptsächlich zum Zweck, unter Wahrung der guten Eigenschaften der COOKE-TAYLORschen ein etwas größeres Öffnungsverhältnis zu erreichen. Dasselbe geht hier bei kleineren Dimensionen bis auf 1 : 12. Äußerlich ist diese Konstruktion der anderen sehr ähnlich; doch ist die Wahl der Glasarten eine andere.

Neben diesen aus drei Linsen bestehenden Apochromaten hat die ZEISSsche Werkstätte binäre Kombinationen auf den Markt gebracht, die ebenfalls frei von sekundärem Spektrum sind, die GAUSSsche Bedingung aber nicht streng erfüllen. Die Verbesserung der Bildqualität ist auch hier in die Augen fallend[1].

Objektive für Astrophotographie.

Diese fallen, wenn ohne Okular gebraucht, nicht mehr eigentlich unter die Kategorie der Fernrohre, sondern der Projektionssysteme schlechthin und der photographischen Objektive im besonderen. Die Farbenkorrektion ist hier, wenn sekundäres Spektrum vorhanden ist, nicht für den „visuellen“, d. h. dem Auge am hellsten scheinenden Teil des Spektrums, um $\lambda = 550$ herum, zu bewirken, sondern für den aktinisch wirksamsten Teil, der bei den üblichen photographischen Platten in der Nähe von $\lambda = 430$ liegt. Dasselbe gilt für die sphärische Korrektion.

Da oft das Bedürfnis eintrat, ein so kostbares Instrument wie ein Teleskopobjektiv für beide Zwecke nutzbar zu machen, zum Beobachten und Photographieren, so wurden mancherlei Einrichtungen getroffen, um das zu ermöglichen: man brachte entweder die beiden Bestandteile des Objektivs, die Kron- und die Flintlinse, in verschiedene Abstände von einander für den einen und anderen Zweck oder man tauschte die eine der beiden Linsen, z. B. die Kronlinse, gegen eine andere aus, um so wenigstens eine Linse zu sparen, oder endlich, man fügte dem eigentlichen Objektiv ein besonderes Korrektionssystem hinzu, das, zwischen Objektiv und Bild geschaltet, die veränderte Korrektion bewirkte oder die Korrektion durch Verschiebung längs der Achse passend veränderte[2]. Es braucht wohl kaum gesagt zu werden, daß alle diese Maßregeln eine erhebliche Gefahr, ja die Wahrscheinlichkeit in sich schließen, das betreffende Objektiv für jeden der beiden Zwecke minderwertig zu machen im Vergleich mit einem für den einen Zweck ausschließlich bestimmten und in seinem Zustand unverändert gelassenen.

Man hat daher auch schon seit langem Objektive nach dem Typus der sonst in der Photographie benützten den besonderen hier vorliegenden Verhältnissen angepaßt. Offenbar wird man in der Astrophotographie, wenigstens bei Aufnahmen mit größeren Brennweiten, bei weitem nicht die Ausdehnung des Bildfeldes verlangen, wie bei Aufnahmen irdischer Objekte und kleinerer Brennweite. Dafür ist die Schärfe des Bildes in der Nähe der Ache möglichst zu steigern; es können also nur Konstruktionstypen in Betracht kommen, denen nicht ein merklicher Zonenfehler eigentümlich ist. Bei der Farbenkorrektion wird — entgegen der Gepflogenheit in gewöhnlichen photographischen Objektiven — darauf verzichtet, das photographische Bild mit dem Auge unmittelbar scharf auf der Platte einstellen zu können, d. h. man vereinigt nicht die Stelle des Spektrums um die *D*- oder *E*-Linie mit derjenigen bei der *G*-Linie, sondern die Teile des Spektrums um *G* herum mit einander. Da die Objekte hier alle in der gleichen (unendlichen) Entfernung liegen, so hat man es dann mit einer konstanten Fokusdifferenz zwischen visuellem und photographischen Bilde zu tun, der leicht Rechnung getragen werden kann, hat dafür aber den Vorteil einer vollkommeneren Lichtkonzentration im aktinisch wirksamen Bilde selbst (vgl. p. 178).

[1] Vgl. M. WOLF, Ztschr. f. Instrumentenk. **19**. 1. 1899. — [2] s. J. E. KEELER, The Astrophysical Journal **1**. 101. 350. 1895.

Von den bekannteren photographischen Objektivtypen haben hauptsächlich die Aplanate, das PETZVALsche Porträtobjektiv, die Cooke lens von H. D. TAYLOR (p. 317), sowie die ZEISSschen Unare und Tessare von P. RUDOLPH (p. 319) für Astrophotographie Verwendung gefunden.

Wo die **Grenzen der Leistungsfähigkeit** für das Fernrohr zurzeit liegen, ist sehr viel schwerer zu entscheiden als etwa beim Mikroskop. Theoretisch sind sie durch die lineare Größe der Öffnung allein gegeben und insofern beliebiger Steigerung fähig. Diese findet aber praktisch ihre Grenzen in mannigfachen, zum Teil bereits erwähnten Momenten: Bei Linsen in der Reinheit und Durchsichtigkeit des Materials, bei Linsen und Spiegeln in der theoretischen Vollkommenheit der Strahlenvereinigung und in der praktischen Vollkommenheit der Flächengebung und deren Erhaltung beim praktischen Gebrauch (in verschiedenen Stellungen), endlich aber in der mit wachsenden Dimensionen zunehmenden Beeinflussung des Bildes durch meteorische Einflüsse (Unruhe der Luft).

Über die **Montierung der Fernrohre** s. L. AMBRONN, Handbuch der astronomischen Instrumentenkunde, Berlin 1899.

Die Okulare der Fernrohre (und Mikroskope).

Von der Konstruktion des Okulars hängt nach dem Ausgeführten im wesentlichen die Ausdehnung des Gesichtsfeldes und die Bildqualität außer der Achse ab. Denn was letztere betrifft, so sahen wir ja (p. 398), daß mit wachsender Vergrößerung das angulare Gesichtsfeld des Objektivs abnimmt; die Qualität des von ihm entworfenen Bildes wird außerhalb der Achse mehr und mehr bedingt und stimmt schließlich nahezu überein mit derjenigen in der Achse. Die Qualität des peripheren Teiles des durch das ganze Fernrohr gesehenen Bildes wird also bei wachsender Vergrößerung mehr und mehr durch das Okular allein bestimmt. Bei schwächeren Vergrößerungen aber, wo in dem entsprechend größeren Sehfeld die außeraxialen Fehler des Objektivs mehr zu Geltung kommen, erreicht auch die Brennweite des Okulars merkliche Beträge im Vergleich zu der des Objektivs, und es ist die Möglichkeit gegeben, die Fehler des einen durch die des anderen ganz oder doch teilweise zu kompensieren.

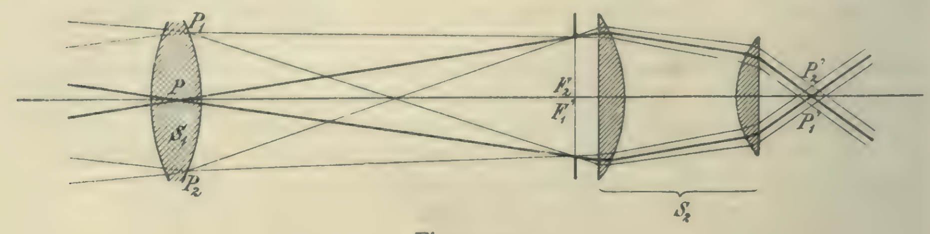
In bezug auf die Grundwirkung hat das Okular beim Fernrohr wie beim Mikroskop zwei Aufgaben: erstens hat es die vom Objektiv aus divergierenden Hauptstrahlen überhaupt zu sammeln und nach einem Punkte der Achse konvergieren zu lassen, so daß das Bild für das Auge von einer Stelle aus übersehbar wird, und im besonderen den Gesichtswinkel, unter dem das Bild dort erscheint, zu regulieren, nämlich im allgemeinen gegenüber dem des Objektivs zu vergrößern. Die zweite Aufgabe des Okulars ist die Divergenzänderung der von den einzelnen Punkten des Objektivbildes ausgehenden Büschel. Diese müssen nach dem Austritt aus dem Okular von dem an den Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen gebrachten Auge bequem auf dessen Netzhaut vereinigt werden können, d. h. im allgemeinen schwach divergent oder parallelstrahlig sein.

Beide Funktionen können, wie die schematische Figur 140 zeigt, von einer einzigen Sammellinse ausgeübt werden; aber es ist dann natürlich nicht möglich, sie in verschiedener, von einander unabhängiger Weise ausüben zu lassen und den an die Qualität zu stellenden Bedingungen zu genügen. Dies nötigt zu einer Trennung der Bestandteile des Okulars in mindestens zwei: eine im wesentlichen den Strahlengang regulierende Kollektivlinse und eine wesentlich die Lupenwirkung ausübende Augenlinse. In Wirklichkeit greifen aus praktischen Rücksichten diese beiden Funktionen der Elemente des Okulars mehr oder minder in einander.

Die Okulartypen.

A. Astronomische Okulare oder Okulare im engeren Sinne.

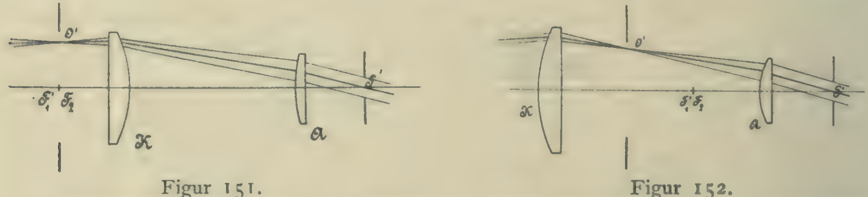
Am deutlichsten getrennt sind sie in den Okularen des Ramsdenschen[1] Typus (Figur 150 und 151). Hier ist die Kollektivlinse K sehr nahe am reellen vom Objektiv entworfenen Bilde angeordnet, ändert also fast nur die Divergenz der Hauptstrahlen, ohne die der abbildenden Büschel zu alterieren. Die Augenlinse A hat vornehmlich die letztere Funktion. Da man aber einen genügenden



Figur 150.
Das Schema eines Fernrohres mit Ramsdenschem Okular.

Abstand der A.-P. von der Außenfläche des Okulars wünschen muß, um das Auge bequem an diese Stelle bringen zu können, so ordnet man die Augenlinse nicht in dem von K erzeugten Konvergenzpunkt der Hauptstrahlen, sondern entsprechend weit davor an und gibt ihr eine Brennweite, die den Abstand KA um wenig übertrifft. Es werden dann die Hauptstrahlen eine abermalige Neigungsänderung erfahren, nach P' hin, und die abbildenden Büschel in ganz oder nahezu parallelstrahlige verwandelt werden.

In den Okularen des älteren Huygensschen[2] Typus (Figur 152) sind die beiden Grundwirkungen annähernd gleichmäßig auf beide Linsen verteilt. Die



Figur 151.
Das Ramsdensche Okular, $f = 25$ mm.

Figur 152.
Das Huygenssche Okular, $f = 25$ mm.

Kollektivlinse K ist hier vor dem reellen Objektivbild angeordnet, dieses kommt also in verkleinerten Dimensionen erst in dem konjugierten Punkte der Kollektivlinse O' reell zustande und wird hier von der Augenlinse A betrachtet. Für Messungszwecke ist ein offenbarer Nachteil dieses Okulars der bereits angedeutete, daß das der Messung zu unterwerfende Bild im Vergleich zu dem vom Objektiv allein erzeugten verkleinert ist und weiter, daß mit dem Wechsel des Okulars die Meßvorrichtung mitgewechselt werden muß, also die Messungskonstante sich ändert. Endlich muß die Augenlinse hier, da sie auf ein von der Kollektivlinse verkleinertes Bild wirkt, relativ kurze Brennweite erhalten, was bei starken Vergrößerungen zu unbequem kleinen Dimensionen der Augenlinse führt. Dafür ragt das Ramsdensche Okular mit seiner ganzen Länge über das reelle Objektivbild hinaus, während die Augenlinse des Huygensschen etwa an die Stelle dieses

[1] Jesse Ramsden, Phil. Trans. p. 94. 1783. — [2] Ch. Huygens, Dioptrica, prop. II.

Bildes zu stehen kommt. Die Länge des Fernrohres bezw. Mikroskops wird also durch das HUYGENSsche Okular so gut wie gar nicht vermehrt.

Die besondere Konstruktion dieser beiden, wie aller in der Folgezeit angegebenen Okulartypen wird neben der zu vollziehenden Grundwirkung bedingt durch die Ansprüche an die qualitativen Eigenschaften des Bildes, also wie oben (p. 344) ausgeführt, durch die Forderungen der Planheit und Verzerrungsfreiheit sowie der Bildschärfe über das ganze Gesichtsfeld hin und endlich der Achromasie.

Letztere Bedingung, also die Achromasie in bezug auf die zweiten Brennweiten oder Aufhebung der Differenz der Vergrößerung für die verschiedenen Wellenlängen, ist zuerst bewußt angestrebt worden.

Wir sahen (p. 168) daß bei einem System aus zwei unendlich dünnen Linsen gleichen Materials die im Abstand D angeordnet sind

$$D = \frac{f_2 + f_1}{2}$$

die Bedingung für die Konstanz von f in bezug auf λ ist. Das HUYGENSsche Okular erfüllt diese Bedingung dadurch, daß in ihm (in praxi nur annähernd) $f_1 = 2f_2$ ist, also $D = 3/2 f_2$ oder $f_2 : D : f_1 = 2 : 3 : 4$. Beim RAMSDENschen ist $f_1 = f_2 = D$.[1]

Um den anderen qualitativen Ansprüchen mit einem Mindestaufwand von Mitteln bezw. Kosten zu genügen, sind beim HUYGENSschen Okular gewöhnlich zwei mit ihren Krümmungen nach dem Objektiv zugewandte plankonvexe Kronglaslinsen, bei dem RAMSDENschen zwei eben solche mit ihren konvexen Fächen einander zugewandte benutzt (vgl. Figur 151 und 152).

Auf die Verbesserung der Okularkonstruktion sind — vielleicht zum Teil in Überschätzung von deren Bedeutung — die Bemühungen zahlreicher Optiker und Physiker, namentlich in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts, gerichtet gewesen. Wir nennen nur die Arbeiten von AIRY[2], LITTROW[3], SANTINI[4], die aber mehr die theoretische Einsicht in das hier vorliegende Problem förderten, als praktische Erfolge zeitigten. Solche waren der zweiten Hälfte des Jahrhunderts vorbehalten, in der wiederum literarische Arbeiten über das Problem im allgemeinen, ja selbst Publikationen über einzelne gelungene Konstruktionen äußerst spärlich sind.

Wir nennen nur einige bekanntere. C. KELLNER[5] achromatisierte die Augenlinse in sich, und stellte die Kollektivlinse annähernd in deren vordere Brennebene. Dann ist das ganze Okular achromatisch in bezug auf die Brennweiten. Das Kollektiv ist daher nach Brennweite und Gestalt für die Erfüllung anderer Bedingungen verfügbar. Stellt sich das KELLNERsche Okular so als ein verbessertes RAMSDENsches dar, so kann man einen anderen Typus, wie er in den schwächeren Nummern der Kompensationsokulare zu den ABBE-ZEISSschen Apochromaten bekannt geworden ist[6], als eine Modifikation des HUYGENSschen Typus bezeichnen, insofern als auch hier das reelle Bild zwischen den Linsen liegt und die Augenlinse durch Zusammensetzung aus zwei verkitteten Linsen „achromatisiert“ ist. Diese Achromatisierung ist aber keine solche im engeren

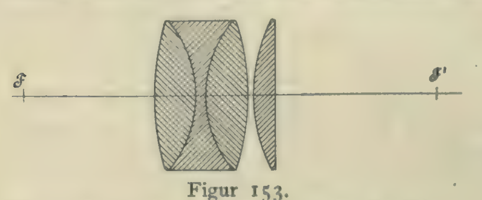
[1] Die nicht seltene Unterscheidung bezw. Bezeichnung dieser beiden Okulartypen als „negative“ und „positive“ ist ganz unglücklich und sollte besser unterbleiben. — [2] G. B. AIRY, Principles and construction of achromatic eyepieces of telescopes etc. (1824); Cambr. Phil. Trans. **2.** 1827; Spherical aberration of eye pieces of telescopes (1827); ibid. **3.** 1. 1830. — [3] J. J. LITTROW, BAUMGARTNER und A. v. ETTINGHAUSENS Ztschr. f. Phys. u. Math. **4.** 17. 195. 501. 1828 (astron. u. terrestr. Okulare), auch Dioptrik, Wien 1830, 2 Abt. und Art. Mikroskop in GEHLERS Physik. Wörterb. **6.** (3) 2238 ff. Leipzig 1837. — [4] G. SANTINI, Al calcolo degli ocul. per i canocch. astron. etc.; Mem. Ist. Venet. 1841. — [5] C. KELLNER, Das orthoskopische Okular. Braunschweig 1849. — [6] Zuerst veröffentlicht im Katalog von C. ZEISS über Mikroskope u. s. w., 30. Ausgabe (1895), p. 16, Fig. 7. Okulare Nr. 2, 4 u. 6.

Sinne, sondern es ist durch die binäre Kombination lediglich Freiheit der Verfügung über die chromatische Wirkung dieser Linsen innerhalb ziemlich weiter Grenzen gewonnen.

Aus dem gleichen Grunde haben andere auch das Kollektiv aus zwei verkitteten Linsen zusammengesetzt.

Der auf p. 170 und 333 erörterte Gedanke der ausschließlichen Verwendung zentraler Büschel liegt wohl A. Steinheils[1] monozentrischem Okular zugrunde; auf eine dicke Crownglaskugel sind zwei konzentrische dicke Flintglaslinsen gekittet. Das Okular ist (bei etwas geringem Gesichtsfeld) völlig reflexfrei.

Bei Okularen sehr kurzer Brennweite (unter 15 mm) macht sich die Schwierigkeit bemerklich, den Augenpunkt genügend weit von der Augenlinse entfernt zu erhalten. Hier hat sich ein Konstruktionstypus als nützlich erwiesen, der wohl zuerst von M. Mittenzwey angegeben wurde (eine dreifach verkittete Linse nach Art einer Steinheilschen aplanatischen Lupe und ein Meniskus, dessen konkave Seite dem Auge zunächst ist). Eine andere ähnliche Konstruktion ist von E. Abbe in den stärkeren Kompensationsokularen zu den Mikroskopapochromaten angewandt worden[2]. Auch hier ist auf eine den Strahlengang regulierende Kollektivlinse ganz verzichtet, sondern (Figur 153) eine, die chromatischen und sphärischen Fehler entsprechend beeinflussende dreifache verkittete Linse der die eigentliche Brechungswirkung ausübenden einfachen sammelnden Kronlinse unmittelbar vorangestellt.



Figur 153.
Das orthoskopische Okular von Zeiss, $f = 25$ mm.

Ist ein Konstruktionstypus für ein Okular in einer Brennweite festgestellt, so ist die Ableitung der Formen für andere Brennweiten im allgemeinen nicht wie beim Objektiv durch proportionale Änderung aller Ausmaße unter Festhaltung der Glasarten zulässig. Denn dabei würde der Abstand des Objektivs, als des Divergenzpunktes der in das Okular eintretenden, und der des Auges, als des Kreuzungspunktes der aus ihm austretenden Hauptstrahlen ja mit verändert. Für Objektive großer Brennweite, über 500 mm, also im besonderen die astronomischen im engeren Sinne, kann man deren Abstand vom Okular genügend genau stets als ∞ ansetzen; für solche kleinerer Brennweite, also besonders bei Handfernrohren und Mikroskopen, muß die tatsächliche Entfernung des Hauptstrahlenkreuzungspunktes für die Konstruktion der Okulare verschiedener Brennweite aber wohl berücksichtigt werden, wenn man nicht Verzerrung und andere Fehler des Gesichtsfeldes gewärtigen will.

Die Lage des Augenpunktes spielt eine geringere Rolle. Kommt er bei Vergrößerung der Brennweite zu weit ab zu liegen, so kann man durch einen besonderen, dem Okular aufgesetzten Stutzen dem Auge seine Stellung entsprechend zuweisen, hat dann allerdings den Nachteil, daß man die dem Auge nächstliegenden Linsen, um das nötige Gesichtsfeld zu erlangen, unter Umständen sehr groß machen muß. Bei Verkleinerung der zum Ausgangspunkt genommenen Brennweite darf der Abstand des Augenpunktes von der Augenlinse unter den Betrag von 10 mm kaum heruntergehen; es muß daher nötigenfalls die Konstruktion selbst entsprechend geändert oder eine andere in dieser Hinsicht günstigere gewählt werden.

Wesentlich für die Wirkung, bezw. für den Konstruktionstypus des Okulars, ist neben der Ausdehnung des in befriedigender Güte abzubildenden Gesichtsfeldes, das Öffnungsverhältnis der das Okular in Anspruch nehmenden, d. h. der das Objektiv verlassenden Strahlenbüschel.

---

[1] Vgl. A. Steinheil, Ber. Münch. Ak. d. Wiss. 1867. p. 284. — [2] Vgl. in dem genannten Katalog von Carl Zeiss die Okulare Nr. 8, 12 und 18.

Bei den Mikroskopen ist dieses Öffnungsverhältnis im allgemeinen sehr klein ($^1/_{15} - ^1/_{30}$), so daß es daselbst gar keine Rolle spielt. Bei den Fernrohren dagegen erreicht es erhebliche Beträge: bis $^1/_4$ ja $^1/_3$ und wird dann für die Konstruktion des Okulars entsprechend bedeutungsvoller. Deshalb begnügt man sich bei Mikroskopen auch jetzt noch fast allgemein mit dem wenig modifizierten HUYGENSschen Typus — außer bei den Apochromaten, deren farbige Vergrößerungsdifferenz eine Kompensation im Okular erfordert und gestattet und damit eine etwas abweichende Konstruktion dieses bedingt.

B. Bildaufrichtende (terrestrische) Okulare.

Um beim Fernrohre — und ganz ebenso beim zusammengesetzten Mikroskop — aufrechte Bilder zu erzielen, kann man zwei grundsätzlich verschiedene Mittel wählen: Man verwendet entweder als Okular ein System negativer Brennweite oder man nimmt ebene Spiegelungen zu Hilfe, die ihrerseits bildumkehrend, also in Verbindung mit einem astronomischen, an sich bildumkehrenden, Fernrohre bildaufrichtend wirken.

Den Fall, daß das Okular nach dem Typus der einfachen Zerstreuungslinse gebaut ist, und der auf das holländische Fernrohr führt, haben wir bereits erledigt. Wir betrachten daher die andere Möglichkeit, daß das Okular nach Art des zusammengesetzten Mikroskops aus zwei positiven Teilsystemen besteht, deren optisches Intervall $\Delta > 0$ ist, d. h. deren zugewandte Brennebenen im Sinne der Lichtbewegung ebenso auf einander folgen, wie die Systeme selbst. Solche Okulare bezeichnet man als **terrestrische**.

Schon KEPLER[1] hatte bemerkt, daß man das in seinem Fernrohre umgekehrt erscheinende Bild durch Hinzufügung einer dritten Linse zwischen Objektiv



Figur 154.
Terrestrisches Okular nach FRAUNHOFER,
$f = 32$ mm ($^6/_5$"), in $^1/_4$ natürlicher Größe.

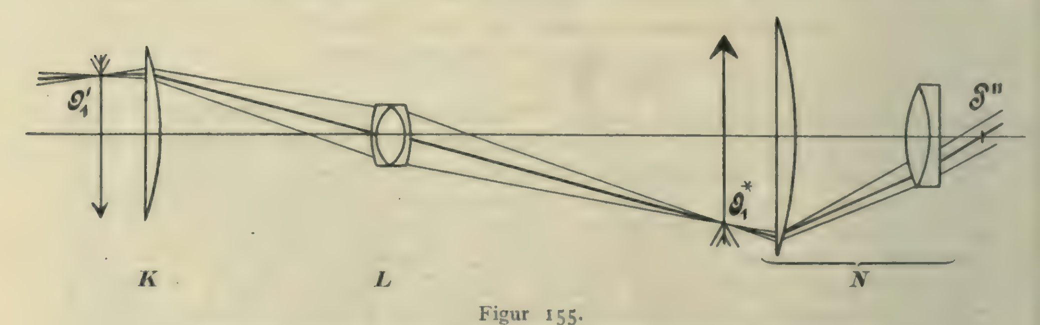
und Okular wieder aufrichten könnte. Verbreitung fanden derartig eingerichtete „terrestrische“ Fernrohre erst durch den Abt SCHYRL auf Kloster Rheita in Böhmen von 1645 an. Die diesbezüglichen Bemühungen der folgenden Zeit waren vorwiegend darauf gerichtet, möglichste Vollkommenheit dieser terrestrischen Okulare mit möglichst einfachen Mitteln zu erzielen. Berühmt waren die Okulare von DOLLOND in England und FRAUNHOFER in Deutschland, aus drei bezw. vier einfachen meist plankonvexen Linsen gleichen (billigsten) Glases bestehend. Figur 154 veranschaulicht die Zusammensetzung eines FRAUNHOFERschen Okulars[2] und den in ihm stattfindenden Strahlengang: Das vom Objektiv entworfene reelle Bild $O_1' O_2'$ wird von den als ein System aufzufassenden beiden ersten nach dem Beobachter hin konvexen Linsen des Okulars umgekehrt (d. h. aufgerichtet) und zwar in der Art, daß die austretenden Hauptstrahlen keine erhebliche Divergenz besitzen und wird dann von dem nach Art der HUYGENSschen gebauten eigentlichen Okular — zwei nach dem Objekt hin konvexen Linsen — dem Auge unter dem gewünschten Winkel dargeboten. Die Funktionen des als

[1] JOH. KEPLER, Dioptrice. Aug. Vindelic. 1611. p. 45 (Probl. 99). — [2] Nähere Angaben von J. J. PRECHTL, Praktische Dioptrik, Wien 1828 und A. GLEICHEN, Lehrb. d. geom. Optik Leipzig und Berlin 1902. § 253.

„Kollektiv“ bezeichneten Vorderteils sind auf die beiden Linsen desselben bei Fraunhofer ziemlich gleichmäßig verteilt; jede nämlich bringt in merklichem Grade eine Konvergenz- bezw. Divergenzänderung der Hauptstrahlen zu Wege und auch eine solche der abbildenden Büschel selbst. Die Funktion des eigentlichen Okulars ist dann ganz die gewöhnliche.

Daß solche Okulare unachromatisch sind, d. h. in der Achse dieselbe Aberration haben, wie eine einfache Sammellinse gleicher Stärke, und daß auch die sphärische Achsenaberration in ihnen erhebliche Beträge erreichen muß, ist ohne weiteres klar. Es müssen daher in die mit ihnen zu benutzenden Objektive eigens daraufhin sphärische und chromatische Achsenaberrationen entgegengesetzten Charakters eingeführt werden, wenn die Bilder befriedigend sein sollen. Im übrigen ist die Qualität der von diesen Okularen gelieferten Bilder eine erstaunlich gute, wenn man den geringen Aufwand an Mitteln in Betracht zieht. Vor allem erfüllen sie die Bedingung gleicher angularer Vergrößerung, d. h. gleicher Brennweite für verschiedene Farben, die Biot, wie es scheint, zuerst als hinreichend und für die aus einer Glasart bestehenden Okulare als erfüllbar allgemein nachgewiesen hat[1]. Durch passende Verteilung der Brechungswirkung auf Kollektiv und Okular, sowie innerhalb dieser auf die einzelnen Linsen und die oben angedeutete Form und Stellung der letzteren wird aber auch den anderen in Betracht kommenden Anforderungen verhältnismäßig sehr gut genügt: die Bilder sind im wesentlichen verzerrungsfrei und scharf bis zum Rande des Gesichtsfeldes. Dieses bleibt allerdings auf Beträge bis 25° beschränkt. Eine Erweiterung desselben bis 50° ist neuerdings bei demselben Typus von A. Daubresse[2] u. a. durch Hinzufügung einer fünften Linse erreicht worden. Doch verbleiben bei Anwendung einfacher Linsen die erwähnten Achsenfehler, die z. B. einen Austausch terrestrischer gegen astronomische Okulare und selbst gegen terrestrische anderer Stärke nur unter Verzicht auf die Bildgüte in der Achse zulasseu.

Man hat daher schon seit langem Okulare mit achromatischen Umkehrlinsen angewandt. Die günstigsten Verhältnisse, zum mindesten für die Be-



Figur 155.

Terrestrisches Okular mit achromatischer Umkehr- und Augenlinse. *K* Kollektiv; *L* Umkehrlinse; *N* ein eigentliches Okular.

rechnung und für die Anpassung an besondere Fälle, bietet eine Anordnung wie die folgende (vgl. Figur 155): Die einfache Linse *K* dient nur zur Regulierung des Strahlenganges. Sie steht ganz nahe am reellen vom Objektiv entworfenen Bilde $O_1' O_2'$ und vereinigt die Hauptstrahlen in *L*, am Ort der achromatisierten Bild-

[1] J. B. Biot, Mém. sur les lunettes achrom. à ocul. multiples Ann. Chim. Phys. (3) **3.** 1891; Mém. Ac. de Paris. **19.** 1. 1842. vgl. auch die oben genannten Abhandlungen Littrows. — [2] A. Daubresse, Engl. Patentschrift Nr. 17 843 (1897).

umkehrlinse, d. h. sie entwirft daselbst ein reelles verkleinertes Bild des Objektivs. L wirkt nun ganz wie das Objektiv eines schwach vergrößernden Mikroskops. Es wird von den Hauptstrahlen zentral durchsetzt und ändert deren Neigungen so gut wie gar nicht. Von $O_1' O_2'$ entwirft L ein je nach den Bedürfnissen des Einzelfalls vergrößertes oder auch verkleinertes reelles Bild $O_1^* O_2^*$, das durch das Okular N dem Auge unter geeignetem Sehwinkel und in geeigneter Sehweite dargeboten wird. Das Bildfeld wird in O' und O^* durch Diaphragmen begrenzt: an dem einen wie anderen Ort können Skalen, Fadenkreuze u. s. w. angebracht werden.

Ein derartiges terrestrisches Okular unterscheidet sich, wie gesagt, kaum irgendwie von einem schwach vergrößernden Mikroskop; die Kollektivlinse K dient gerade dazu, den in einem solchen stattfindenden Strahlengang herbeizuführen. Da ein solches Okular in sich vollständig achromatisiert werden kann, auch in bezug auf die Längsaberrationen in der Achse, so kann es ohne weiteres gegen ein ebenso korrigiertes von anderer Brennweite oder gegen ein astronomisches Okular ausgetauscht werden.

Bei astronomischen Fernrohren spielen die Dimensionen des Okulars kaum eine Rolle. Bei Fernrohren für den Handgebrauch ist aber Kürze eine Hauptbedingung. Man sucht daher hier sowohl dem Objektiv eine möglichst geringe Brennweite zu geben[1] — was hier gleichbedeutend ist mit großem Öffnungsverhältnis — als auch das Okular auf das tunlich geringste Maß zu verkürzen. Dann werden in dem vom Objektiv entworfenen reellen Bilde $O_1' O_2'$ aber die Fehler außer der Achse von Bedeutung und lassen sich mit einfachen Konstruktionen kaum noch über das ganze Gesichtsfeld befriedigend heben. Denn dieses Gesichtsfeld ist ja dann von der Größenordnung der Brennweite. Dem Okular fällt also die Aufgabe zu, diese Fehler seinerseits zu kompensieren. Soll aber das Okular kurz sein, so hat sein Umkehrsystem ebenfalls die Abbildung eines relativ ausgedehnten Objekts mit verhältnismäßig weit geöffneten Büscheln zu leisten. Wie schon früher erwähnt, muß dann das ganze Fernrohr als ein einziges System behandelt und die in dem einen Teil verbliebenen oder auch absichtlich gesteigerten Fehler müssen durch die entgegengesetzt korrigierten anderen Teile schließlich kompensiert werden — eine Aufgabe, die zu den schwierigsten der praktischen Optik gehört.

Tatonnement und theoretische Überlegungen haben auch auf diesem Gebiete anerkennenswerte Erfolge gezeitigt. Während ein FRAUNHOFERsches Okular bei 30 mm Brennweite für sich eine Länge von etwa 350 mm hat, findet man heute in zahlreichen optischen Werkstätten Handfernrohre von 20 mm Öffnung, deren Gesamtlänge nicht über 23 cm beträgt (STEINHEIL, HENSOLDT). Das Objektiv des Kollektivs muß dabei oft die relativ komplizierte Zusammensetzung eines photographischen Systems erhalten, dem es ja in den Leistungen nahe kommt. Auch die Objektive des Fernrohres selbst werden aus drei und mehr zum Teil nicht mit einander verkitteten Linsen zusammengesetzt.

Literarische Angaben über derartige Handfernrohre sind so gut wie gar nicht vorhanden. In GLEICHENS Lehrbuch § 254 findet man die Daten für ein neueres terrestrisches Okular. Die Fabrikanten behandeln diese Daten offenbar, ebenso wie die der Mikroskope, als Geschäftsgeheimnis.

---

[1] Das schon von JOH. ZAHN (Oculus artificiatis etc. Fundam. II. Herbipoli 1686. Syntagma II Cap. III Prop. X p. 133; Synt. V Cap. I Technasma II p. 221) vorgeschlagene Mittel zur Abkürzung: Schaltung einer Negativlinse zwischen Objektiv und reelles Bild ist bis in die neueste Zeit wiederholt angewandt worden. In der Tat kommt bei dieser Anordnung das reelle Bild näher am Objektiv zustande, als wenn dieses die Brennweite der Kombination mit der Negativlinse hätte.

Fernrohre mit veränderlicher Vergrößerung.

Der Aufbau des terrestrischen Fernrohres legt den Gedanken nahe, dessen Vergrößerung durch Variation der gegenseitigen Stellung seiner Bestandteile zu verändern — sei es stetig, sei es sprungweise. In der Tat sind hierzu dienende Einrichtungen in sehr frühen Entwickelungsstadien der Fernrohroptik vorgeschlagen und auch verwirklicht worden. DOLLONDS[1] „polyaldische" Okulare am Ende des 18. Jahrhunderts, BREWSTERS[2] Meßvorrichtungen zu Beginn des 19., später F. C. DONDERS[3] „lunette pancratique", H. SCHRÖDERS[4] schon früher erwähnte Richtfernrohre für Geschütze und neuerdings A. C. BIESES[5] von der VOIGTLÄNDERschen Werkstätte eine Zeitlang fabrizierte Fernrohre repräsentieren die bekanntesten nach dieser Richtung unternommenen, zum Teil mit einander ganz übereinstimmenden Versuche. Dabei wird entweder nur die Brennweite des Objektivs geändert durch Verschiebung der ihm teils zu diesem Zweck teils zur Abkürzung nach ZAHN (s. o.) hinzugefügten Negativlinse. Oder man variiert die Lage des Umkehrsystems im Kollektiv und damit die Vergrößerung des terrestrischen Okulars. Im letzteren Falle muß gleichzeitig die Lage des eigentlichen Okulars zum Kollektiv geändert werden, weil ja die verschieden vergrößerten Bilder im allgemeinen in verschiedener Entfernung zustande kommen (mit Ausnahme der beiden Paare von Vergrößerungen v_1 und v_2, die im reziproken Verhältnis stehen [$v_2 = 1 : v_1$]). Für solche Änderungen sind, damit sie automatisch geschehen, das Bild also beim Variieren der Vergrößerung stets scharf eingestellt bleibt, Mechanismen nötig, deren technische Ausführung nicht gerade leicht ist (helikoidale Schraubennuten) und deshalb oft strengeren Anforderungen nicht genügt oder gar die Gefahr völligen Versagens in sich schließt. Vor allem muß aber gegen solche Konstruktionen vom rein optischen Gesichtspunkt der Einwand erhoben werden, daß sie, wenn sie für sehr verschiedene Lage der Bestandteile annähernd gleich gute Bilder liefern sollen, für keine Lage die bei Beschränkung auf nur eine Vergrößerung erreichbare höchste Vollkommenheit besitzen können. Aus diesen beiden Gründen haben sich die Fernrohre mit veränderlicher Vergrößerung bisher kein großes Feld erobern können, obwohl ihre Anwendung für die Zwecke des Heeres, der Marine, der Jagd und selbst der Touristik sehr verlockend erscheint.

Die Nachteile der Konstruktion sind technisch wie optisch am geringsten, wenn man sich auf den Wechsel zwischen zwei Vergrößerungen beschränkt durch Verschieben des Umkehrsystems am Kollektiv zwischen festen Anschlägen, und zwar am besten so, daß dessen Lagen zu seinem Objekt und Bild die beiden symmetrischen sind, wo $v_2 = 1/v_1$ (s. o.).

Die bildaufrichtenden Spiegel-(Prismen-)Systeme.

Von den beiden bisher betrachteten Arten bildaufrichtender Fernrohre, den holländischen und den terrestrischen im engeren Sinne, hat jedes seine eigentümlichen Vorzüge und Nachteile. Eine genauere Diskussion[6] zeigt, daß vermöge derselben, namentlich für den Handgebrauch, das natürliche Anwendungsgebiet des holländischen Fernrohres das der ganz schwachen Vergrößerungen

---

[1] G. DOLLOND, Phil. Trans. 1834. — [2] D. BREWSTER, A treat. on new philos. Instr. Edinb. 1812. p. 12; Plate I, Figur 5 u. 6; vgl. auch p. 25. — [3] F. C. DONDERS, Arch. Néerl. **13.** 10. 1877 über diese s. auch die Diskussion durch J. A. C. OUDEMANS, ibid. p. 110 und J. BOSSCHA, ibid. p. 141. — [4] H. SCHRÖDER, Ztschr. f. Instrumentenk. **10.** 133. 1890. — [5] A. C. BIESE, Ein neuer Typus optischer Instrumente, Berlin, Selbstverlag 1894; Theorie der Fernrohre mit kontinuierlich-variabler Vergrößerung. Berlin 1895. — [6] S. CZAPSKI, Verhandl. d. Ver. z. Bef. d. Gewerbfl. 1895. p. 39 ff.

(zwei- bis vier-, höchstens fünffach) ist, während beim terrestrischen Fernrohr der unvermeidliche Aufwand an technischen Mitteln, insbesondere Linsenzahl und Länge, zur optischen Leistung erst bei stärkeren Vergrößerungen, von etwa zehn- oder zwölffach an, in angemessenem Verhältnis zu stehen scheint. Für das Gebiet der dazwischenliegenden Vergrößerungen, also von etwa vier- bis zehnfach, für das in großen Kreisen ein besonders lebhaftes Bedürfnis vorhanden ist, versagt das holländische Fernrohr, zumal für zweiäugigen Gebrauch, wegen seines zu geringen Gesichtsfeldes, das terrestrische, weil es bisher nicht in einer den praktischen Bedürfnissen entsprechenden Lichtstärke und Kürze hat gebaut werden können.

Zur Ausfüllung dieser Lücke hat sich die Anwendung von Spiegel- (reflektierenden Prismen-)Systemen in Verbindung mit astronomischen Fernrohren nützlich erwiesen, in der Art, daß die dioptrische Wirkung (Vergrößerung, Gesichtsfeld, Helligkeit und Bildqualität) ganz allein den letzteren zufällt, während das Spiegelsystem zunächst nur die Funktion hat, die Aufrichtung des an sich umgekehrten Bildes zu bewirken, auf die rein dioptrische Wirkung jedenfalls im wesentlichen ohne Einfluß bleibt. Es hat sich dann bei der weiteren Verfolgung dieses Konstruktionsplanes gezeigt, daß durch geeignete Verwendung (Anordnung) dieser Spiegelsysteme den Fernrohren noch manche andere wertvolle Eigenschaften verliehen werden können, die sonst die Hinzunahme besonderer Konstruktionselemente erfordern würden.

Die Anforderungen, denen ein System von Spiegeln oder Spiegelprismen genügen muß, damit es speziell für die Bildaufrichtung in Handfernrohren benutzbar sei, sind:

1. Das System muß für sich vollständige Bildumkehrung geben: sowohl rechts und links als oben und unten vertauschen.

2. Das System muß geradsichtig sein, d. h. jeder aus ihm austretende Strahl muß zu dem eintretenden parallel sein. (Er braucht aber nicht unbedingt in dessen geradliniger Fortsetzung zu liegen; eine Parallelversetzung des einen gegen den anderen kann je nach den Umständen vorteilhaft oder nachteilig sein.)

Wenn das System, statt aus einfachen Spiegeln, zum Teil oder ganz aus Spiegelprismen besteht, die Reflexionen im Inneren von Glaskörpern vor sich gehen, dann sind noch zwei weitere Bedingungen zu erfüllen:

3. Es dürfen nirgends Richtungsänderungen durch Brechung stattfinden: alle vorkommenden Brechungen der Hauptachse, z. B. beim Ein- und Austritt, müssen also unter senkrechter Inzidenz erfolgen, oder durch unmittelbar darauffolgende entgegengesetzt gleiche kompensiert werden (Durchtritt durch äußerst dünne Luftschichten).

Denn durch Brechung unter schiefer Inzidenz werden Büschel mit endlich nahem Kon- oder Divergenzpunkt astigmatisch deformiert. Dieser Astigmatismus würde nahezu in gleichem Betrage über das ganze Gesichtsfeld hin herrschen, und könnte durch keine Anordnung und Gestaltung der Linsen des Fernrohres kompensiert werden. Denn diese können nur eine um die Mitte (Achse) des Sehfeldes symmetrische Variation des Astigmatismus, wie anderer Bildfeldfehler, besitzen und daher auch kompensieren.

Da parallelstrahlige Büschel bei der Brechung an Ebenen[1] stets parallelstrahlig bleiben, so würde die Anwendung von Bildumkehrsystemen, die der Bedingung 3 nicht genügen, bei Fernrohren beschränkt sein auf die Stellen vor dem Objektiv und hinter dem Okular, zwischen diesem und dem Auge. Damit würden ihm aber mehrere Vorteile versagt bleiben, die gerade mit der

[1] Wir setzen die Außenflächen der Reflexionskörper zunächst als eben voraus, s. w. u.

Anordnung zwischen den Linsen des Fernrohres teils von selbst verbunden sind, teils leicht verknüpft werden können. Bei überall senkrechter Brechung wirkt der zwischen je zwei solchen Brechungen gelegene Teil des Systems in dioptrischer Beziehung wie eine zur Hauptachse senkrechte Planparallelplatte von entsprechender Dicke. Die geringen sphärischen und chromatischen Aberrationen, die eine solche in der Achse verursacht, lassen sich leicht durch entgegengesetzte in die Linsen (Objektiv) des Fernrohres eingeführte kompensieren. Der Astigmatismus aber, den eine solche Platte bei den seitlichen Büscheln hervorbringt, ist um die Hauptachse symmetrisch und in ihr Null, läßt sich also jedenfalls im Prinzip auch — bis auf etwaige „Zonen" — durch entgegengesetzten Astigmatismus eines zentrierten Linsensystems korrigieren. Folgen die beiden brechenden Flächen einander unmittelbar (sehr dünne Luftschicht), so kompensiert die zweite ohne weiteres den von der ersten eingeführten Astigmatismus; es kann die Brechung dann also unter beliebig schiefer Inzidenz erfolgen.

4. Nicht unbedingt erforderlich, aber sehr erwünscht ist, daß alle inneren Reflexionen „totale" seien. Die Möglichkeit, solche von Lichtverlust nahezu freie Reflexionen zu erhalten, ist ja ein Hauptgrund für die Anwendung von Spiegelprismen statt von einfachen (Metall-)Spiegeln. An versilberten Glasflächen ist, wenn sie nach den besten neueren Verfahren frisch hergestellt sind, der Lichtverlust zwar auch ein sehr geringer (3—4 %). Es scheint aber das Reflexionsvermögen solcher Flächen mit der Zeit relativ rasch abzunehmen.

Der Hauptvorteil der Anwendung von im Inneren reflektierenden Glaskörpern statt Einzelspiegel dürfte aber darin liegen, daß die gegenseitige Neigung der in je einem Körper vorgesehenen reflektierenden Fächen absolut unveränderlich ist, z. B. von Temperaturänderungen nicht beeinflußt wird, in der Tat nur mit gewaltsamer Deformierung des Körpers geändert werden kann. Die Erhaltung der relativen Lage (Neigung) der Spiegelflächen ist aber offenbar besonders wichtig, namentlich in binokularen Instrumenten oder solchen, die zu Messungen von Richtungen dienen.

Daß alle Spiegelungen an ebenen Flächen stattfinden, ist eine selbstverständliche Forderung, denn der Fall gekrümmter Spiegel führt auf das katoptrische oder katadioptrische Fernrohr im engeren Sinne, mit dem wir uns bereits beschäftigt haben.

Den ersten vollständigen Lösungen der oben formulierten allgemeinen Aufgabe gingen mehrere partielle Lösungen voraus, die der einen oder anderen Bedingung noch nicht entsprachen, von denen es aber bis zur vollständigen Lösung oft nur eines Schrittes bedurfte.

Mehrfach wurden Spiegelkombinationen vorgeschlagen, die zwar Bildumkehrung geben, aber nur unter gleichzeitiger Änderung der Sehrichtung um 90° oder mehr; so von VARLEY[1], WADDELL[2], AMICI[3], CHEVALIER[4] und NACHET[3 4].

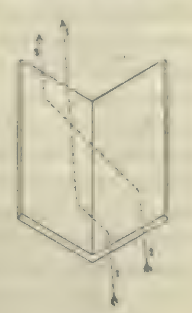
Von H. W. DOVE[5] wurde eine sehr einfache geradsichtige Prismenkombi-

---

[1] C. VARLEY, Engl. Patentschrift Nr. 3430 v. 4. Juni 1811. — [2] Nach D. BREWSTER in dessen Artikel „Microscope" in The Edinburgh Encyclopaedia Vol. XIV, p. 225. 1830. (Ich verdanke den Hinweis auf diesen Vorgänger J. PORROS Herrn J. CHESHIRE vom engl. Patentoffice.) VARLEY und WADDELL wandten beide die eine Hälfte des bald zu beschreibenden PORROschen Prismensystems an, ersterer als Metallspiegel, letzterer schon in Gestalt von Prismen. — [3] Ich konnte nicht finden, wo und wann AMICI selbst oder wer sonst zuerst dessen Prisma beschrieben hat. Es fand Verbreitung durch den Optiker NACHET in Paris in Verbindung mit Mikroskopen, auf deren Okularende es einfach aufgesetzt oder zwischen deren Okularlinsen es eingeschoben wurde, s. G. DIPPEL, Das Mikroskop. 2. Aufl. p. 590. 1883. — [4] s. Note 1, p. 423. — [5] H. W. DOVE, POGG. Ann. **83.** 189. 1851; s. auch Darstellung der Farbenlehre und optische Studien. Berlin 1853. p. 190.

nation angegeben, bei der aber die abbildenden Büschel starke Brechungen erfahren, die also nur vor oder hinter dem ganzen Fernrohr angebracht werden kann, wo die Strahlenbüschel telezentrisch sind. Er verbindet einfach zwei rechtwinklige Reflexions- („Reversions-")Prismen so, daß ihre reflektierenden Hypotenusen senkrecht zu einander stehen und einander unmittelbar folgen, und läßt das Licht parallel zu den Hypotenusenflächen einfallen. Der eine Spiegel bewirkt dann eine Umkehrung des Bildes in der einen Ebene, der andere in der dazu senkrechten[1].

Was die optischen Bedingungen der Bildumkehrung mittels ebener Spiegel im allgemeinen anbetrifft, so haben wir schon früher (p. 77) darauf hingewiesen, daß das von einer ungeraden Anzahl Spiegel gelieferte Bild dem Objekt symmetrisch gleich, das von einer geraden Anzahl entworfene ihm kongruent ist. Die bildumkehrenden Spiegelsysteme müssen also jedenfalls stets eine gerade Anzahl von Reflexionen aufweisen.



Figur 156.
Zur Erklärung der Wirkung eines Dachprismas.
Die Vertauschung von links und rechts, oben und unten, bei zwei (etwa parallel) in einen Winkelspiegel einfallenden Strahlen. (Jeder Vertauschung in der gegenseitigen Lage der Strahlen entspricht nach d. HELMHOLTZ-LAGRANGEschen Satze stets eine Verkehrung des Bildes.)

Des näheren läßt sich die Wirkung der meisten Systeme auf die der Winkelspiegel zurückführen: Nach der Reflexion an zwei Spiegeln, die mit einander den Winkel α bilden, ist das Bild eines Gegenstandes diesem, wie bemerkt, kongruent und hat eine Drehung von 2α um die Schnittlinie der beiden Spiegel, die Kante des Winkelspiegels, erfahren. Bei einem Winkelspiegel von 90^0 Öffnung ist das Bild also genau am 180^0 gedreht. Damit das Bild ein vollständig umgekehrtes sei, rechts in links und oben in unten vertauscht, muß also jedenfalls ein oder mehrere Paare von Spiegeln zusammen eine Drehung des Bildes von 180^0 in einer Ebene bewirken und ein oder mehrere andere Spiegelpaare eine ebensolche in einer dazu senkrechten, d. h. es muß unter allen Umständen ein Teil der Spiegel senkrecht stehen zu einem anderen Teil.

Dabei macht es aber einen merklichen Unterschied, ob die Spiegel so angeordnet sind, daß die Strahlen der abbildenden Büschel erst sämtlich an dem einen reflektiert werden, ehe sie den nächsten erreichen, oder so, daß erst der eine Teil je eines Büschels an dem einen, der andere am nächsten Spiegel reflektiert wird und sodann diese beiden Büschelhälften und Spiegel ihre Rolle vertauschen. Der erste Fall bedarf keiner weiteren Erörterung. Im zweiten müssen die fraglichen Spiegel einen Winkel von 90^0 mit einander bilden, also Bilddrehung von 180^0 bewirken. Denn nur dann ist die Ablenkung der Strahlen der einen Büschelhälfte nach der zweimaligen Reflexion die gleiche, wie die der anderen üschelhälfte und ebenso die von beiden bewirkte Bilddrehung. Nur dann also geben die beiden Büschelhälften das gleiche Bild, ein Bild — bei allen anderen Winkelöffnungen entstehen zwei Bilder.

Es muß daher der rechte Winkel bei solchen Prismen vom ausführenden Optiker sehr genau innegehalten werden, damit nicht Bilder mit Doppelkonturen entstehen — je nach den

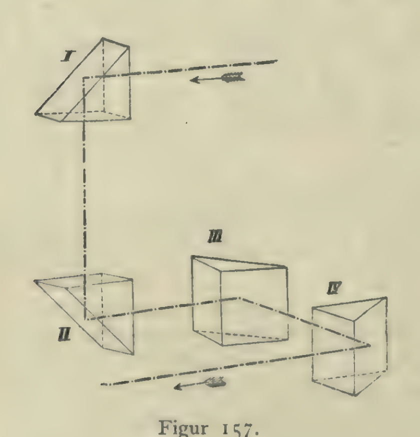
[1] DOVES Reversionsprismen wurden nach MOIGNO bereits vor ihm von J. PORRO angewandt: Cosmos II. p. 224. 1852. Erste Benutzung eines einzelnen gleichschenklig rechtwinkligen Prismas zur halben Bildumkehrung durch CHEVALIER (CH. CHEVALIER, Die Mikroskope u. s. w., deutsch von KERSTEIN, Quedlinburg u. Leipzig 1843, p. 92, Taf. II, Fig. 17; s. auch HARTING, Das Mikroskop, deutsch von THEILE, 2. Aufl. 3. 228. Braunschweig 1866). Die geradsichtige Kombination zweier Reversionsprismen hat HARTING selbst 1848 in demselben Werke zuerst als zur Bildumkehrung geeignet erwähnt, CHEVALIER und später NACHET haben, der letztere seit 1843 (C. R. 17. 917. 1843), mit einem CHEVALIERschen, geradsichtigen Prisma und einem anderen, bei der Reflexion ablenkenden, dessen Reflexionsebene zu der des ersten senkrecht war, die Bildumkehrung erzielt, bis NACHET das Prisma AMICIS adoptierte.

Umständen bis auf wenige Sekunden oder selbst Bruchteile von solchen. Es müssen ferner die reflektierenden Flächen in gleichmäßiger Vollkommenheit bis an die Kante heranreichen, und wenn die Kante nahe am reellen Bilde angeordnet ist, so muß sie verschwindend dünn sein, damit sie nicht als ein das Gesichtsfeld durchziehender Strich bemerklich werde. Diese Anforderungen verteuern die Herstellung solcher Winkelspiegel erheblich.

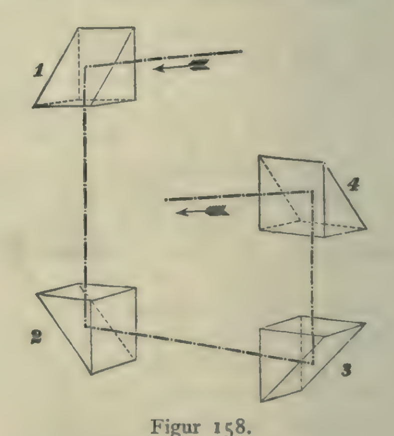
Man nennt ein solches Spiegelpaar oft ein „Dachprisma" oder „Dach" schlechthin und verwendet es stets in der Art, daß die Hauptachse des Büschelsystems gegen die Dachkante gerichtet ist, die Wirkung der beiden Dachflächen also zeitlich und räumlich in bezug auf die beiden Hälften des Büschelsystems symmetrisch ist. Eine leichte Überlegung zeigt, daß ein Dachprisma in bezug auf die Richtungsänderung in den durch die Kante gehenden Ebenen wirkt, wie ein durch die Kante gelegter oder zu ihr paralleler und zur Mittelebene des Öffnungswinkels senkrechter einfacher ebener Spiegel, während in den zur Kante senkrechten Ebenen, den Hauptschnitten des Dachprismas, die oben angegebene Vertauschung der Büschelhälften und entsprechende Bilddrehung stattfindet. Die Anwendung des Dachprismas rührt von AMICI her (s. oben).

Die Porroschen Prismenkombinationen.

J. PORRO war der erste, der ein unseren vier Forderungen genügendes Spiegelprismensystem angegeben hat[1], das auch in anderen Beziehungen besonders vorteilhaft ist. Er stellt zwei rechtwinklige Winkelspiegel einander mit gekreuzten Kanten so gegenüber, daß die Strahlenbüschel die einzelnen Spiegelflächen nach einander treffen. Figur 157 stellt seine Anordnung in ihrer allgemeinsten Form



Figur 157.
Das erste PORROsche Umkehrsystem.



Figur 158.
Das zweite PORROsche Umkehrsystem.

dar, die einzelnen Spiegel durch rechtwinklig gleichschenklige Glasprismen realisiert. Die Prismen I und II bilden den einen Winkelspiegel, die Prismen III und IV den anderen. Die einander zugewandten Kathetenflächen je zweier Prismen sind einander parallel, die nach außen gewandten sind wie jene zu dem Hauptstrahl senkrecht. Der Hauptschnitt des zweiten Prismas ist in entgegengesetzter Richtung parallel dem des ersten, und ebenso der Hauptschnitt des vierten parallel dem des dritten; die Hauptschnitte beider Paare aber sind um 90^0 gegen einander gedreht.

[1] Zuerst beschrieben in Cosmos II, p. 222. 1852 vom Herausgeber (MOIGNO); s. auch die Beschreibung zu PORROs englischem Patent Nr. 2377 (1854).

Eine zweite, ebenfalls von J. PORRO[1] angegebene Kombination (Figur 158), kann man sich aus der ersten hervorgegangen denken, dadurch, daß man Prisma I parallel seiner Stellung in Figur 157 vor Prisma IV setzt.

Weitere zyklische Vertauschungen der Prismen führen nicht auf neue Anordnungen.

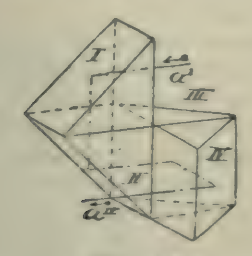
Man überzeugt sich leicht, daß die beiden oben dargestellten unsere drei Anforderungen erfüllen[2]. Der aus den Prismen austretende Strahl ist dem zugehörigen parallel, erfährt aber gegen ihn eine je nach den Umständen verschieden starke seitliche Versetzung (Parallelverschiebung).

Wir betrachten die PORROschen Prismenkombinationen noch etwas näher, um an ihnen beispielsweise zu zeigen, welche Verwendungsmöglichkeiten derartige Umkehrprismen in sich schließen — je nach ihrer besonderen Beschaffenheit, die einen mehr, die anderen weniger bequem und vollkommen.

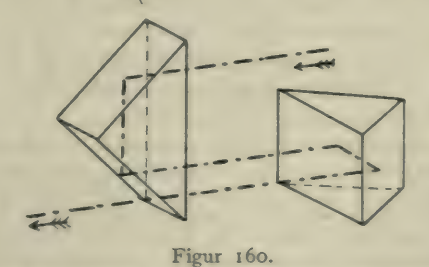
Da jedes einzelne Prisma der PORROschen Kombinationen wie eine an derselben Stelle eingefügte zur optischen Achse des Linsensystems senkrechte Planparallelplatte wirkt (deren Dicke gleich der Kathetenlänge des Prismas ist), so kann man diese Prismen einzeln oder in beliebigen Gruppen ebensowohl vor dem Objektiv und hinter dem Okular, als zwischen den Linsen des Fernrohres anbringen. Nur die Reihenfolge der Prismen muß eine der beiden oben angegebenen sein.

Man kann die Prismen einzeln oder in Gruppen auch beliebig in Richtung des Hauptstrahles (senkrecht zu den Kathetenflächen) einander nähern oder von einander entfernen. Durch dieses Mittel lassen sich insbesondere drei, zum Teil schon von PORRO selbst erreichte, Vorteile erzielen.

1. Kompendiöseste Form. Man führt die Prismen bis zur Berührung an einander heran, so daß möglichst wenig Übergänge von Luft zu Glas übrig bleiben, und vereinigt die sich berührenden Prismen möglichst in ein Stück. Figur 159



Figur 159.
Das erste PORROsche System in gedrängtester Anordnung.



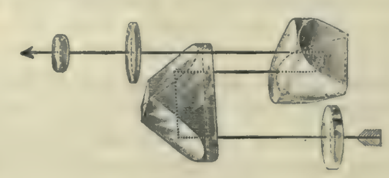
Figur 160.
Die Verwendung der ersten PORROschen Anordnung für die Abkürzung des Fernrohres.

stellt das PORROsche System erster Art (auf dessen Betrachtung wir uns hierbei beschränken wollen) in dieser kompendiösesten Form dar, realisiert durch zwei gleichschenklig rechtwinkelige Prismen, deren Hypotenusenflächen Rechtecke bilden,

[1] In Cosmos IX, p. 401. 1856 verspätet beschrieben; angeblich schon im Februar 1855 in einem Fernrohr „lunette Napoléon III.“ diesem Fürsten überreicht. — [2] Totalreflexion findet für den Hauptstrahl jedenfalls statt, da er überall unter 45° reflektiert wird. Für die anderen Strahlen des einfallenden Büschels findet Totalreflexion innerhalb der durch ihre Neigung zur Hauptachse und durch den Brechungsexponenten des Glases gegebenen Grenzen statt. Bei einem Glase vom Index $n = 1.5$ wären jene Neigungen auf 3,2°, beim Index $n = 1,6$ auf 6,3° zur Hauptachse beschränkt. Hat man es mit größeren Neigungen zu tun, so muß man entweder die schwache Reflexion der entsprechenden Teile der Büschel in Kauf nehmen oder man muß durch Metallüberzüge (Versilberung) der reflektierenden Flächen eine etwas geringere, aber sehr nahezu gleichmäßige Reflexion für alle Strahlen und Büschel herbeiführen.

vom Seitenverhältnis 1 : 2 und die mit diesen Hypotenusenflächen in gekreuzter Lage an einander gekittet sind.

2. Irgendwo zwischen Objektiv und Okular eingefügt, bewirkt das PORROsche Prismensystem bereits eine Abkürzung des Fernrohres, gegenüber einem astronomischen von gleichem Objektiv und Okular; denn ein Teil der Achse wird bereits hier in die seitliche Richtung verlegt, ein anderer Teil verläuft zickzackförmig in Richtung der Achse hin und her. Man kann nun bequem eine sehr erhebliche Abkürzung erzielen, indem man durch geeignete Abtrennung der einzelnen Prismen den einen oder anderen Teil absichtlich auf einen großen Betrag bringt. In Figur 160 sind die beiden (Doppel-)Prismen der ersten PORROschen Kombination in Richtung der Achse von einander abgerückt, so daß jeder Strahl den Abstand zwischen ihnen dreimal zu durchlaufen hat, die Rohrlänge des entsprechenden Fernrohres also beiläufig auf den dritten Teil vermindert wird. In dieser Form sind die PORROschen Prismen im letzten Jahrzehnt aufs neue in weiten Kreisen bekannt geworden durch die nach dem Vorgange der CARL ZEISSschen Werkstätte hergestellten Handfernrohre („Feldstecher"). Bereits PORRO hatte diese Verwendungsmöglichkeit der Prismen und die analoge an seinem



Figur 161.
Das mit Hilfe der ersten PORROschen Anordnung abgekürzte Fernrohr.

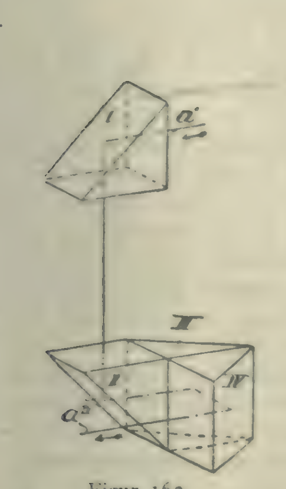
anderen Typus erkannt und benützt (vgl. S. CZAPSKI, l. c. p. 56). Figur 161 zeigt dieselbe Anordnung in Verbindung mit den Fernrohrlinsen.

3. Steigerung der Achsenversetzung. Drittens endlich läßt sich (nach E. ABBE) die Zerlegung der Glaskörper in getrennte Teile benützen, um, sei es teilweise in Verbindung mit der vorerwähnten Verkürzung, sei es als Selbstzweck, die seitliche Versetzung der Achse der eintretenden gegen die der austretenden Strahlen über die durch die Dimensionen der Prismen bedingten Minimalwerte hinaus erheblich zu steigern. Figur 162 stellt eine diesen Zweck erfüllende Anordnung der Prismen des ersten, Figur 163 des zweiten Porrotypus dar (Figur 164 die letzte in Verbindung mit den Linsen eines Fernrohres). Für den Betrag, bis zu welchem auf diese Weise die Exzentrizität der Achse gesteigert werden kann, ist in der Theorie gar keine Grenze gesetzt. Denn das erste Prisma könnte auch weit außerhalb des eigentlichen Fernrohres, in Richtung der Objektivachse, angebracht werden.

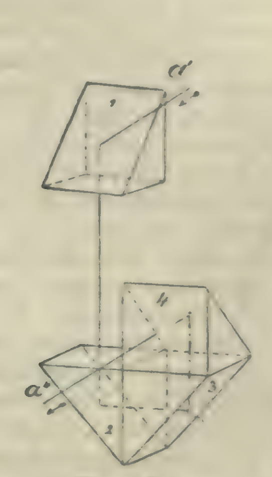
Solche Versetzung kann zwei verschiedenen Zwecken dienen: im einfachen Fernrohr ermöglicht sie, bei genügend starkem Betrage, ein „um die Ecke sehen", d. h. ein Beobachten unter völliger Deckung des Beobachters, wie es durch Hinzufügung zweier besonderer Spiegel zum Fernrohr schon seit langen Zeiten in dem sogen. Polemoskop erstrebt wurde. Im Doppelfernrohr kann sie dazu benützt werden, den Abstand der Objektive nach Belieben größer oder etwas kleiner zu machen, als den der Okulare. Besonders wichtig ist der erstere Fall einer Steigerung des Objektivabstands, durch den man nach dem Vorgange von HELMHOLTZ[1] das Tiefenunterscheidungsvermögen des Doppelfernrohres proportional

[1] H. HELMHOLTZ, POGG. Ann. **102.** 167. 1857; Physiol. Optik. 1. Aufl. p. 647 u. 681; Wiss. Abhandl. Leipzig 1883, p. 484; nach J. F. W. HERSCHEL, The Telescope, Edinburg 1861, p. 250 hat ALEX. S. HERSCHEL das Telestereoskop schon 1855 erfunden.

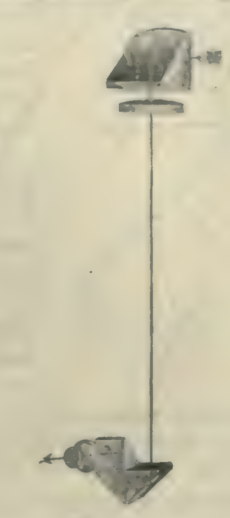
steigert[1] („Reliefferrnrohr" von CARL ZEISS). Auch hier dient die bloße zweckmäßige Anordnung der für die Erzielung der Bildaufrichtung ohnehin vorhandenen reflektierenden Prismen dazu, einen Effekt zu erhalten, zu dessen Erlangung man sonst besondere Konstruktionselemente (Spiegel oder Reflexionsprismen) hinzufügen



Figur 162.
ABBES Anordnung zur Steigerung der Achsenversetzung (1. Form).



Figur 163.
ABBES Anordnung zur Steigerung der Achsenversetzung (2. Form).



Figur 164.
Das Fernrohr mit gesteigerter Achsenversetzung.

mußte. In den ZEISS-Feldstechern (s. u. Figur 169) ist die Verkürzung möglichst weit getrieben und die Vergrößerung des Objektivabstandes auf den durch die Dimensionen der Prismen gegebenen Minimalbetrag beschränkt, in den „Relief-" und „Stangenfernrohren" (s. u. Figur 170) derselben Werkstätte, sowie dem stereoskopischen Entfernungsmesser ist der Objektivabstand auf ein erhebliches Vielfaches des Okularabstandes gebracht[2].

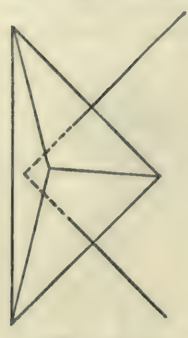
Schon PORRO hat an die Möglichkeit gedacht, einen weiteren Vorteil mittels seiner Prismen zu erzielen, nämlich diese gleichzeitig als Linsen wirksam zu machen. Das kann geschehen, indem man die ebenen Kathetenflächen sämtlich oder zum Teil durch konvexe oder konkave sphärische ersetzt und die Glasarten den Erfordernissen der chromatischen und sphärischen Korrektion entsprechend wählt (vgl. CZAPSKI, l. c. p. 58 ff.). Es scheint aber, daß weder PORRO noch einer seiner Nachfolger in der Anwendung von bildumkehrenden Reflexionsprismen von dieser Möglichkeit mit Erfolg Gebrauch gemacht hat.

Andere bildumkehrende (Spiegel)-Prismenkombinationen.

Nachdem durch die ZEISSschen Feldstecher und Reliefferrnrohre seit 1894 die Aufmerksamkeit der Optiker und Physiker wieder auf dieses konstruktive Hilfsmittel gelenkt worden war, ist eine große Zahl von bildumkehrenden Prismenkombinationen, die unseren vier Anforderungen ganz oder größtenteils genügen, angegeben worden. (Die PORROschen Prismen waren in der Zwischenzeit wiederholt nacherfunden worden; das gleiche Schicksal hatten einige der nachstehend angeführten.)

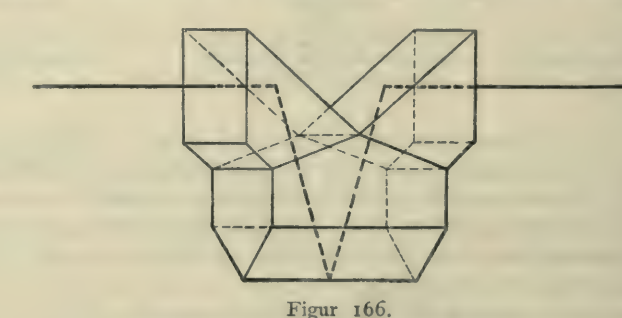
[1] Vgl. hierüber die Messungsergebnisse von F. HECKER, Ztschr. f. Instrumentenk. **22.** 372. 1902 und die allgemeinen Erörterungen von M. v. ROHR, oben p. 289 ff. — [2] Näheres bei S. CZAPSKI, l. c., p. 54 und CARL ZEISS, Patentschrift zu D.R.P. Nr. 77 086 (1893). Vgl. auch die Kataloge der genannten Werkstätte und die dort angeführte Literatur.

Alle benützen entweder das Amicische Dachprisma oder verwenden mehr als vier Reflexionen, oder letztere sind nicht alle „totale“ und sind insofern gegenüber der Porroschen Kombination praktisch minderwertig. Dafür zeichnen sich ihr gegenüber einige Kombinationen dadurch aus, daß sie keine Parallelversetzung der Hauptachsen herbeiführen, also nicht bloß parallelsichtig, sondern im strengen Sinne geradsichtig sind, — was bei einfachen Fernrohren manchmal erwünscht ist — andere dadurch, daß sich alle reflektierenden Flächen an einem einzigen soliden Glaskörper vorsehen lassen, so daß die Vorteile der Anwendung von Reflexionsprismen statt einfacher Spiegel (s. oben p. 422) in besonders hohem Maße bei ihnen zur Geltung kommen. Auch durch eine gedrungenere Form zeichnen sich mehrere der neuen Systeme namentlich vor dem ersten Porroschen aus.



Figur 165.
Das Umkehrprisma von Amici.

Amici selbst[1] hatte die Hauptachse geneigt zum Hauptschnitt seines Dachprismas gegen dessen Kante einfallen lassen und die Endflächen des Prismas senkrecht zur ein- und austretenden Hauptachse gelegt (Figur 165). Er erhielt dadurch mittels des denkbar einfachsten Spiegelprismas vollständige Bildumkehrung, aber unter gleichzeitiger Ablenkung der Hauptachse (um 90 bis 120°). Geradsichtig wird ein solches Amiciprisma nur entweder durch Brechung der Hauptachse beim Ein- und Austritt oder durch Hinzunahme zweier weiterer Spiegelungen.



Figur 166.
Abbes streng geradsichtiges Umkehrprisma.

Auf letzterem Wege erreichte E. Abbe[2] ein bequem brauchbares, unseren vier Anforderungen genügendes Bildumkehrsystem (praktisch verwandt in den sogen. „Dosenfernrohren“ der Zeissschen Werkstätte), ohne Parallelversetzung der Achse (Figur 166). Ordnet man die beiden einfachen Spiegelungen, die die Geradsichtigkeit herbeiführen, beide vor oder nach dem Dach anstatt zu beiden Seiten desselben an, so erhält man ein aus einem Stück herstellbares System mit relativ starker Parallelversetzung der Achse, s. Deutsche Patentschrift zu Nr. 94450 vom 27. II. 1895 (E. Sprenger) (Figur 167).

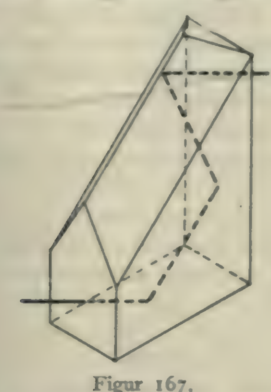
Auf die wichtigsten anderen neuerdings angegebenen Kombinationen, die, wie erwähnt, zum Teil sechs statt vier Spiegelungen zu Hilfe nehmen, zum Teil auch auf durchgängige Totalreflexion verzichten, kann hier nur kurz hingewiesen werden. Wir nennen:

Englische Patentschrift Nr. 14102 vom 9. VI. 1897 (H. L. Huet) [A. Dau-

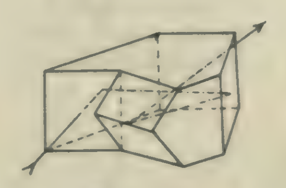
[1] S. oben p. 422, Anm. 3. — [2] Zuerst veröffentlicht von S. Czapski, Vereinsbl. d. D. Ges. f. Mech. u. Optik, 1895, Nr. 10; vgl. auch Deutsche Patentschrift Nr. 85971 vom 8. VIII. 1894 (Wirth & Co.).

BRESSE][1]. Umkehrsysteme mit vier Reflexionen, von denen eine die nicht total ist (s. Figur 168).

Englische Patentschrift Nr. 30925 vom 31. XII. 1897 (H. L. HUET) [A. DAUBRESSE], Umkehrsysteme mit sechs Totalreflexionen, wovon zwei an einem Dach, teils parallel-, teils geradsichtig; eins davon aus einem Glasstück herstellbar.



Figur 167.
Das Umkehrprisma von E. SPRENGER.



Figur 168.
Das Umkehrprisma von A. DAUBRESSE, nach dem Engl. Pat. Nr. 14102[97].

Deutsche Patentschrift zu Nr. 104149 vom 26. IV. 1898 (H. L. HUET) [A. DAUBRESSE], Umkehrsystem aus zwei Tetraedern (2 × 3 Totalreflexionen), die in der Ebene ihrer parallelen Ein- und Austrittsflächen beliebig gegen einander verdreht werden können.

Deutsche Patentschriften zu Nr. 108685 vom 27. VI. 1899 und Nr. 112307 vom 24. X. 1899 [H. SCHMIDT], Umkehrsystem mit sechs Reflexionen, darunter zwei an einem Dach, eine nicht totale. Benutzung einer sehr dünnen Luftschicht zwischen zwei Prismen gleichzeitig zur Reflexion und zum Durchtritt.

In der Deutschen Patentschrift Nr. 130508 vom 7. VII. 1901 (Firma CARL ZEISS) [A. KÖNIG], ist eine Modifikation des AMICI-ABBEschen Prismas beschrieben unter Zuhilfenahme der von SCHMIDT eingeführten, teils reflektierenden teils durchlassenden dünnen Luftschichten.

Die binokularen Fernrohre.

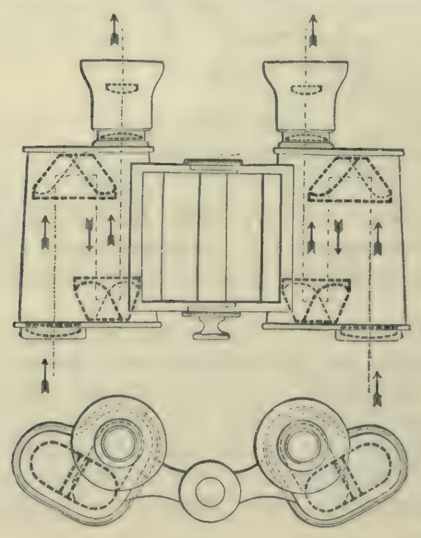
Als JOHANN LIPPERHEY, mit dessen Namen die Erfindung des Fernrohres näher als mit der irgend eines anderen verknüpft ist, bei den Generalstaaten von Holland um ein dreißigjähriges Privileg dafür oder eine entsprechende Remuneration nachsuchte, wurde ihm diese unter der Bedingung zugesagt, daß er das Fernrohr für den Gebrauch mit beiden Augen einrichtete. So sehr schien dem unbefangenen Benutzer eine derartige Einrichtung erforderlich zu sein. LIPPERHEY entsprach der Forderung binnen kürzester Frist und seitdem ist namentlich das holländische Fernrohr fast ausschließlich als binokulares in Gebrauch. Auch das terrestrische wird — zumal in den schwächeren Vergrößerungen — sehr häufig für die Benutzung mit beiden Augen eingerichtet, während größere terrestrische Fernrohre meist, die für den wissenschaftlichen Gebrauch bestimmten, insbesondere die astronomischen, so gut wie ausschließlich[2] für den einäugigen Gebrauch eingerichtet sind.

[1] Der Name des Inhabers eines Patentes ist sehr oft nicht mit dem des Erfinders identisch. Wir haben oben den Namen des Erfinders, wo er uns bekannt war, in Klammern [ ] gesetzt. — [2] Eine Ausnahme bilden meines Wissens nur gewisse von Sir H. GRUBB in Dublin und neuerdings auch von C. ZEISS angefertigte Typen; s. den Katalog des zuerst genannten Optikers über astronomische Fernrohre.

Bei kleineren Fernrohren geschieht die Einrichtung für den zweiäugigen Gebrauch allgemein in der Art, daß zwei ganz gleiche Instrumente mit parallel gerichteten Achsen im Abstande der Augen neben einander gelagert werden. Da letzterer Abstand erheblichen individuellen Schwankungen unterliegt (von ca. 54 bis 74), so richtet man bei besseren Instrumenten, insbesondere stets bei terrestrischen Fernrohren (die holländischen sind wegen der Größe des vom Okular entworfenen Objektivbildes relativ unempfindlich in dieser Hinsicht, wiewohl auch hier die Bildqualität merklich leidet bei Nichtübereinstimmung des Augen- und Rohrabstandes) die Verbindung der beiden Rohre so ein, daß eine Anpassung des Okularabstandes an den Augenabstand möglich ist.

Die Eigentümlichkeiten der Wahrnehmung durch binokulare Fernrohre sind oben p. 289ff. näher dargelegt.

Wenn die die Optik enthaltenden Rohre so großen Durchmesser haben, daß sie nicht mehr bis auf jeden vorkommenden oder wenigstens den mittleren Augenabstand einander genähert werden können — und das wird meist dann der Fall sein, wenn die Objektivöffnung das hier zulässige Mindestmaß (ca. 50 mm) übersteigt — so müssen andere Hilfsmittel angewandt werden.



Figur 169.
Das Doppelfernrohr (der Feldstecher) von C. Zeiss.

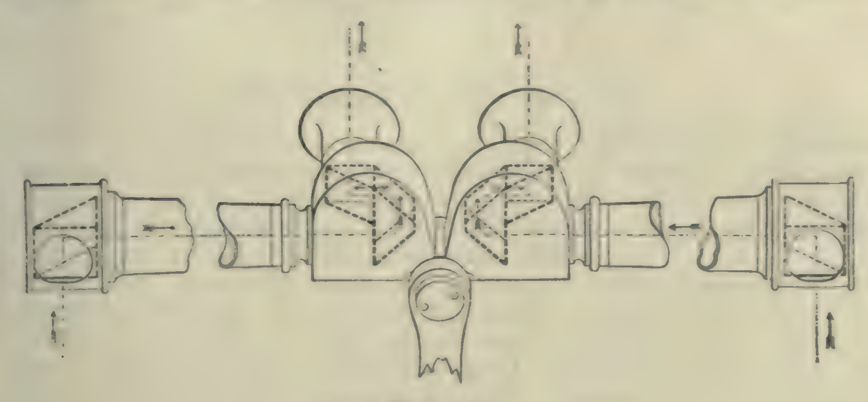
Entweder verzichtet man dann auf alle die Vorzüge, die ein vollständiges Doppelinstrument vor dem einfachen stets hat (Zuführung der doppelten Lichtmenge, zentrischer Bau u. s. w.), die bei diesem aber auch durch Verdoppelung des Aufwandes an Mitteln (und entsprechenden Kosten) erkauft werden und teilt die in nur ein Objektiv eintretenden Büschel so, daß die eine Hälfte dem einen Auge, die andere dem andern zugeführt wird. Das ist der Weg, auf dem man bei den stärkeren Mikroskopen notgedrungen den binokularen Gebrauch herbeigeführt hat. Es bieten sich zahlreiche Mittel, durch die man dieses Ziel erreichen kann, sei es unter Verzicht auf jede stereoskopische Wirkung (Zusammenfallen der beiden E.-P.) des so entstehenden binokularen Instruments, sei es unter Benutzung des innerhalb der Objektöffnung selbst gegebenen Spielraums für die Erzielung eines gewissen stereoskopischen Effekts, einer gewissen Trennung der optischen Schwerpunkte der E.-P., vgl. p. 370.

Der andere Weg ist der, an der Verdoppelung des Instruments festzuhalten, den passenden Okularabstand aber durch eine kurbelartige Knickung der Achsen (⅃‾|) zu erreichen. An welcher Stelle diese Knickung geschieht, ist im Prinzip gleichgültig; aus praktischen Rücksichten wählt man eine Stelle nahe an den Okularen selbst. Durch Drehung der okularseitigen Teile der „Kurbeln“ um die objektivseitige Achse des Instruments bewirkt man dann auf die denkbar einfachste Art die Anpassung der Okulare an den Augenabstand des Beobachters.

Die Knickung selbst kann auf zwei merklich verschiedene Arten geschehen: entweder man verwendet dasjenige Mittel, das nur diesem Zwecke allein dient, das sind einfache, an den Knickstellen unter 45° zur Achse angebrachte Spiegel- bezw. Reflexionsprismen, welche letztere auch paarweise zu Rhomboedern vereinigt werden können. Das andere Mittel verbindet mit dem Zweck der

Achsenversetzung noch ein anderes, kaum minder wichtiges: die Bildumkehrung bezw. Bildaufrichtung, wird sich also bei terrestrischen Fernrohren ganz besonders empfehlen. Wir sahen bei der Erörterung der PORROschen Bildumkehrsysteme, wie beide Zwecke auf sehr einfache Art mit einander verbunden werden können (Figur 162—164). Die meisten anderen bildumkehrenden Spiegelsysteme können in gleicher Art verwandt bezw. modifiziert werden.

Aus der Not kann hier wie so ofteine Tugend gemacht werden. Nachdem HELMHOLTZ und HERSCHEL auf die besonderen Vorzüge hingewiesen hatten, die das Beobachten mit absichtlich stark vergrößertem Abstand der Lichteintrittsöffnungen (E.-P.) auszeichnet, lag es nahe, das von ihnen noch unter Zuhilfenahme besonderer, die Achsen der Fernrohre knickender Spiegel bezw. Prismen zu diesem Zweck konstruierte Telestereoskop mit Fernrohr unter Zuhilfenahme



Figur 170.
Das Relieffernrohr von C. ZEISS.

bildaufrichtender Prismensysteme herzustellen, wie es nach E. ABBEs Plänen die optische Werkstatt von CARL ZEISS in ihren Relief- und Stangenfernrohren zuerst getan hat (s. die Prospekte der genannten Firma, die Patentschrift Nr. 77086 und den mehrfach zitierten Artikel des Verfassers in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes).

Wegen der Eigentümlichkeiten des Sehens durch Fernrohre mit vergrößertem — überhaupt verändertem — Abstand der E.-P. siehe die Ausführungen M. v. ROHRS oben p. 291 ff.

Beobachtung und Theorie stimmen darin überein, daß proportional dem Produkt aus Vergrößerung des Einzelfernrohres und Vergrößerung des Objektivabstandes (Abstands der E.-P.) gegenüber dem Augenabstand des Beobachters dessen Fähigkeit, Tiefenunterschiede wahrzunehmen, gesteigert wird (vgl. insbesondere die p. 427, Anm. 1 zitierte Abhandlung von F. HECKER). Ich habe jenes Produkt daher als „totale Plastik" eines Doppelfernrohres bezeichnet, den zu zweit genannten Faktor desselben als dessen „spezifische Plastik".

Man kann in den Gesichtsfeldern von Doppelfernrohren identische Paare von Marken anbringen, die im binokularen Sehen vereinigt und in dem mittels des Fernrohres wahrgenommenen Landschaftsbilde je in eine bestimmte Entfernung versetzt werden, die von der gegenseitigen Lage der Marken und von der Brennweite der Fernrohrobjektive abhängt. Marken, die in der Achsenebene der Fernrohre oder einer zu ihr parallelen gelegen sind und deren Abstand gleich dem Achsenabstand der (zentrierten) Okulare ist, erscheinen im Unendlichen liegend, Marken, deren gegenseitiger Abstand geringer ist, entsprechend näher.

Mit Hilfe eines solchen Markensystems oder eines Markenpaares von veränderlicher und genau meßbarer Entfernung lassen sich nach H. DE GROUSILLIERS Entfernungsmessungen ausführen, deren Genauigkeit natürlich unter sonst gleichen Umständen von der totalen Plastik des benutzten Doppelfernrohres abhängt, die aber im Vergleich mit den nach anderen Methoden ausgeführten gewisse charakteristische mit dem stereoskopischen Sehen als solchem verbundene Vorzüge aufweisen.

Näheres darüber s. in Patentschrift zum D.R.P. Nr. 82 571 vom 3. I. 1893, sowie bei C. PULFRICH, Physik. Zeitschr. **1.** 98. 1899.

XVI. Die Methoden zur empirischen Bestimmung der Konstanten optischer Instrumente.

Die Einteilung der Aufgabe.

Der nächste Gegenstand der empirischen Bestimmung sind die **Konstruktionselemente** der optischen Systeme. Ihre Ermittelung ist für die optische Technik unentbehrlich, um die Herstellung eines Systems nach der Vorschrift des Konstrukteurs zu überwachen. Die Kenntnis der Elemente des optischen Systems des Auges wird in der physiologischen Optik erfordert.

Aus ihnen lassen sich nach den in den früheren Kapiteln vorgetragenen Theorien die Wirkungen der Systeme (Abbildungskonstanten, Strahlenbegrenzung, Korrektionszustand) mit einer oft weitgehenden Annäherung an die Wirklichkeit ableiten. Diese Wirkungen werden aber an fertigen Instrumenten meist besser empirisch bestimmt. Wir haben als Zweck der meisten Instrumente die Vermittelung einer optischen Abbildung hingestellt (II. Kapitel). Es ergibt sich daher als fernere Aufgabe die empirische Bestimmung der **Grundfaktoren der Abbildung**. Die Abbildung ist nach Lage und Maß, wie wir früher gesehen haben, völlig bestimmt, wenn die Örter der beiden Brennebenen und die Werte der beiden Brennweiten ermittelt sind. Lassen wir den Fall, daß erstes und letztes Medium verschiedene Brechungsexponenten haben, zunächst außer acht oder nehmen wir an, daß das relative Brechungsverhältnis beider Medien anderweitig bekannt sei, so ist es nur die eine der beiden Brennweiten, deren Kenntnis neben der der Brennpunktsörter erforderlich ist.

Die Verwirklichung der Abbildung erwies sich als bedingt und beschränkt durch die Strahlenbegrenzungen des optischen Systems, nämlich die **Begrenzung der Apertur und des Gesichtsfeldes**; beide werden ebenfalls empirisch bestimmt werden müssen; von der Strahlenbegrenzung hatten wir auch das **Vergrößerungsvermögen** von Instrumenten zur Unterstützung des Sehens abhängig gefunden; in der Tat stehen die Methoden zu seiner Bestimmung in engem Zusammenhange mit denen zur Bestimmung des Sehfeldes dieser Instrumente.

Durch die Maßverhältnisse und die Begrenzung einer Abbildung ist die Wirkung eines Systems freilich nur dann zu definieren, wenn es seinen Zweck vollkommen erfüllt, bei seinem normalen Gebrauche eine vollkommene Abbildung vermittelt. Da dies natürlich fast niemals der Fall ist, so erfordern die vorher genannten Bestimmungen zu ihrer Ergänzung die **empirische Feststellung des Korrektionszustandes** des Systems. Bei den einfachsten Instrumenten, den Spiegeln, wird diese Feststellung oft identisch sein mit der zuerst erwähnten Untersuchung der Konstruktionselemente, hier der Form des Spiegels. Anders bei komplizierteren Systemen, wo kein einfacher Zusammenhang zwischen der Bildgüte und den Konstruktionselementen besteht; hier wird man die Bildqualität für sich zu untersuchen haben.

I. Die Bestimmung der Konstruktionselemente

besteht in der Messung der Krümmungen und gegenseitigen Abstände der einzelnen brechenden oder spiegelnden Flächen des Systems, der Brechungsverhältnisse der Medien, welche sich zwischen ihnen befinden, und der Durchmesser der freien Linsenflächen sowie der Öffnungen und Örter der etwa sonst vorhandenen Blenden. Auf diese Bestimmungen kann hier nur kurz eingegangen werden, da Einzelheiten nur technisches Interesse beanspruchen.[1]

Die Ermittelung der **Flächenkrümmungen** kann auf mechanischem und optischem Wege geschehen. Der ersten Methode dienen die Sphärometer, mittels derer die einer Kugelhaube von gegebenem Halbmesser r zugehörige „Pfeilhöhe", h, gemessen wird, aus welcher dann der Radius R der Kugel gemäß der Gleichung

$$R = \frac{r^2}{2h} + \frac{h}{2}$$

zu berechnen ist. Solche Instrumente sind in neuerer Zeit insbesondere von A. M. Mayer[2], C. Bamberg[3] und E. Abbe[4] vorgeschlagen und konstruiert worden.

Bei den optischen Methoden wird entweder aus der Vergrößerung und Lage der durch Spiegelung an den beteffenden Flächen entstandenen Bilder auf die Krümmung der Fläche geschlossen oder unmittelbar die Entfernung zwischen Krümmungsmittelpunkt und Scheitel der Fläche gemessen.[5] Ersterer kann definiert sein als der zu sich selbst konjugierte Achsenpunkt, in welchen also die von ihm ausgehenden Strahlen wieder zurück reflektiert werden. Bei Konkavspiegeln läßt sich dieser Punkt als reeller unmittelbar finden und behufs größerer Genauigkeit mittels einer Lupe fixieren (Anwendung eines schrägen Deckglases oder Reflexionsprismas über der Fokalebene der Lupe); bei konvexen Flächen muß er als der zu dem anvisierten Punkte in bezug auf ein sammelndes Linsensystem konjugierte theoretisch und praktisch definiert sein.[6] Foucault[7] hat den Mittelpunkt der Kugelfläche dadurch definiert, daß nur in ihm eine genaue Vereinigung der reflektierten Strahlen stattfindet, d. h. die sphärische Aberration völlig aufgehoben ist.

Es leuchtet ein, daß diese Methoden zumeist auch zu untersuchen erlauben, mit welcher Genauigkeit die sphärische Form überhaupt erreicht wurde. Insbesondere sind drei Methoden von Foucault für diesen Zweck ausgebildet worden, um großen Spiegeln sphärische Form zu geben. Die erste besteht in der Untersuchung des Aussehens eines leuchtenden Punktes nahe dem Zentrum mit starker Vergrößerung in, vor und hinter dem Fokus. Das Scheibchen und die Beugungsringe müssen scharf und rund sein und die Verschiebungen nach vorwärts und rückwärts müssen symmetrische Veränderungen darin bewirken. Verdeckt man zweitens das Bild, das der Spiegel von einem nahe dem Zentrum befindlichen

---

[1] Eine Übersicht der älteren hier angewandten Methoden gibt H. Schröder, Zentralztg. f. Mech. u Opt. **2.** 5. 15. 1891. — [2] A. M. Mayer, Am. Journ. of Science (3) **32.** 61. 1886. — [3] S. Czapski, Ztschr. f. Instrumentenk. **7.** 297. 1887. — [4] C. Pulfrich, ibid. **12.** 307. 1892. Über die ersteren beiden Arten s. auch Violle, Lehrb. d. Physik. Deutsche Übers. Berlin 1891. **1.** 315; über die letztgenannte die Preisliste über Längenmeßapparate der optischen Werkstätte von Carl Zeiss in Jena. — [5] Die vordere Brennweite eines Spiegels ist, wie wir früher gesehen haben, gleich der Hälfte seines Radius und zwar positiv bei Hohl-, negativ bei Konvexspiegeln; der Brennpunkt liegt mitten zwischen Scheitel und Krümmungsmittelpunkt. — [6] s. R. J. Boscovich, Abh. v. d. verbess. dioptr. Fernrohren. Wien 1765, insbes. p. 81 ff., Diss. quinque ad. Dioptr. pertin. Vindob. 1767. p. 52 ff. J. C. Oudemans, Zentralztg. f. Mech. u. Opt. **1.** 66. 1880. L. Laurent, C. R. **100.** 903. 1885; ref. in Ztschr. f. Instrumentenk. **5.** 322. 1885. — [7] L. Foucault, C. R. **44.** 339; **47.** 205. 958; **49.** 85; **54.** 1. 1857—62; ferner Annales de l'Observatoire de Paris **5.** 197. 1859 oder auch Recueil des travaux scientif. Paris 1878. p. 232. u. 236.

leuchtenden Punkte erzeugt, indem man einen seitlichen Schirm (in Form einer Schneide) bis in den Achsenpunkt, in dem das Bild entsteht, verschiebt, so wird man seitlich am Schirm vorbei diejenigen Zonen leuchten sehen, von denen die Strahlen nicht in jenes Bild reflektiert werden. Setzt man drittens an die Stelle des leuchtenden Punktes im Zentrum ein kleines rechtwinkliges Netz und hinter das nahe dem Zentrum entworfene Bild des Netzes einen sehr engen Spalt, so wird durch den letzteren jedem Teile des Netzes ein anderes Stück der reflektierenden Fläche zugeordnet, wie etwa durch die Augenpupille jedem Gegenstande des Gesichtsfeldes ein anderer Teil der Brille. Man wird dann, wenn man das Bild des Netzes mit einem Mikroskop betrachtet, aus der Verzeichnung auf die Form und Größe der Abweichungen des Spiegels schließen können. Genaueres s. unten auf p. 453, 463, 469 und 471.

Die beiden zuerst genannten FOUCAULTschen Methoden gestatten auch bei Verlegung des leuchtenden Punktes ins Unendliche durch einen zonenfreien Kollimator, die parabolische Form eines Spiegels zu konstatieren und die Konstante der Parabel zu ermitteln.

Ebenso wie diese Methoden zur Untersuchung der Form von spiegelnden Flächen sich, wie wir noch sehen werden, meist auch auf die Untersuchung des Korrektionszustandes beliebiger Systeme ausdehnen lassen, so kann man natürlich auch diejenigen Methoden, die vorzugsweise für diesen allgemeineren Zweck ausgearbeitet wurden, wie z. B. die HARTMANNsche, und die wir erst im folgenden zu erwähnen haben werden, umgekehrt großenteils auch zur Untersuchung von spiegelnden Flächen benutzen, weshalb hier nur auf deren Darstellung hingewiesen sei (p. 467).

Für ebene Flächen ist ein besonders empfindliches Kriterium ihrer Ebenheit in dem bereits p. 95 erwähnten Verfahren OERTLINGS gegeben. Derselbe gab in der dort zitierten Abhandlung auch Methoden an, um den Parallelismus zweier ebener Flächen zu kontrollieren[1]. LAURENT[2] benutzte nach FIZEAU und CORNU NEWTONsche Interferenzstreifen, O. LUMMER[3] die HAIDINGERschen Ringe für diesen Zweck; ABBE[4] konstruierte einen Apparat, der gute planparallele Gläser nach dieser Methode, schlechtere nach jener zu untersuchen erlaubt. Die Anwendung der HARTMANNschen Methode zur Prüfung von Planheit und Planparallelität s. bei H. LEHMANN, Ztschr. f. Instrumentenk. **22**. 329. 1902, der FOUCAULTschen Methode bei RITCHEY, Astrophys. Journ. **19**. 59. 1904.

Die optische Technik verwendet, um eine vorgeschriebene Krümmung stets in gleicher Genauigkeit zu reproduzieren, die von FRAUNHOFER erfundene Probeglasmethode. Man legt auf die zu untersuchende erhabene oder vertiefte Fläche nach sorgfältiger Reinigung ein vertieftes oder erhabenes Probeglas. Die Seite des Probeglases, die der zu prüfenden Fläche zugewandt ist, besitzt die vorgeschriebene Krümmung und die zwischen den beiden einander sehr benachbarten Flächen entstehenden NEWTONschen Interferenzen lassen die Gleichheit der Krümmungen beurteilen.

Die physiologische Optik bedient sich natürlich in neuerer Zeit fast stets der optischen Methoden. R. H. KOHLRAUSCH[5] hat an der Cornea des lebenden Auges mit einfachen Hilfsmitteln aus der Vergrößerung in einem Paar konjugierter Punkte der spiegelnden Fläche und aus dem Abstand des einen Punktes von der Fläche den Radius ermittelt. Genauer hat bei der gleichen Methode

---

[1] Vgl. auch C. PLATH, Zentralztg. f. Opt. u. Mech. **3**. 265. 1882 (ref. in Ztschr. f. Instrumentenk. **3**. 172. 1883). — [2] LAURENT, C. R. **96**. 1035. 1883 (ref. in Ztschr. f. Instrumentenk. **3**. 292. 1883). — [3] O. LUMMER, Inaug.-Diss., Berlin 1884 oder WIED. Ann. **23**. 49. 1884. — [4] S. CZAPSKI, Ztschr. f. Instrumentenk. **5**. 149. 1885. — [5] R. H. KOHLRAUSCH, Okens Jsis 1840. p. 886; Beitr. z. Physiol. u. Phys. d. menschl. Auges. Berlin 1841. p. 16; s. a. F. KOHLRAUSCH, Leitfaden der praktischen Physik. 7. Aufl. Leipzig 1892. p. 169.

v. HELMHOLTZ die Größe der Bilder mit dem von ihm erfundenen Ophthalmometer[1] gemessen, bei dem die scheinbaren Örter zweier in geringer Entfernung von einander befindlicher Objekte (bezw. Bilder) durch entgegengesetzt gleiche Drehung zweier planparalleler Platten identisch gemacht werden (p. 197). Aus dem Brechungsexponenten, der Dicke der Platten und dem Drehungswinkel, bei welchem die Koinzidenz stattfindet, läßt sich die (lineare) gegenseitige Entfernung der anvisierten Objektpunkte in einfacher Weise berechnen. Umständlicher, aber ebenfalls zur Erlangung genauer Resultate geeignet ist das Verfahren von S. STAMPFER[2], der mittels Theodolits die gegenseitige Neigung der Strahlen bestimmte, welche von zwei nach ihrer Lage zu der Fläche gegebenen leuchtenden Punkten ausgehend an derselben reflektiert sind. Das HELMHOLTZsche Ophthalmometer wurde von AUBERT und JAVAL weiter ausgebildet. Die von GULLSTRAND[3] angegebene Methode, von der Hornhaut erzeugte (verzeichnete) Spiegelbilder zu photographieren und auszumessen, lieferte nach HESS[4] die genauesten Ergebnisse.

Während bei den Ophthalmometern die Winkel zwischen zwei Normalen mit verschiedenen Fußpunkten gemessen werden, mißt das Ophthalmometer von BLIX[5] die Krümmung in einem Punkte; eine Vorrichtung zur Bestimmung der Krümmungen einer spiegelnden Fläche in einem Punkte hat auch STRAUBEL[6] beschrieben. Die Krümmungen der vorderen und hinteren Linsenfläche sind nach ähnlichen optischen Methoden von HELMHOLTZ, TSCHERNING u. a. bestimmt worden.

Die Dicken der einzelnen Linsen des Systems — die Scheitelabstände der brechenden Flächen — werden ohne weiteres mit Hilfe der bekannten hierzu dienenden Vorrichtungen gemessen (Schraubensphärometer, Fühlhebelapparate, Kontaktkathetometer[7] u. dgl.). Die physiologische Optik ist natürlich auch hier auf optische Methoden angewiesen, sobald sie am Lebenden untersuchen will. Sie bestehen meist in der Einstellung auf optische Bilder oder reale Flächen mittels eines Fernrohres oder Mikroskops, dessen Verschiebung gemessen wird. Neuerdings ist die Tiefe der vorderen Augenkammer von HEGG[8] mit einem mikrostereoskopischen Entfernungsmesser bestimmt worden, einem stereoskopischen Mikroskop, in dessen reellen Bildebenen, ebenso wie bei dem ZEISSschen Entfernungsmesser im binokularen Fernrohr, wandernde Marken angebracht sind.

Die Brechungsexponenten endlich der das System konstituierenden Medien werden entweder — auf diesem Wege meist ziemlich ungenau — aus den vorher ermittelten Radien der einzelnen Flächen und der katadioptrischen Wirkung von Paaren derselben gefunden (BOSCOVICH, STAMPFER, a. a. O., neuerdings LEHMANN[9]) oder, genauer, mittels besonderer Instrumente (Refraktometer, Spektrometer) an Stücken des betreffenden Materials, denen entweder nur eine ebene Fläche angeschliffen ist oder zwei solche, einen Winkel einschließende, d. h. an einem Prisma. Wegen dieser Methoden sei auf den Artikel von C. PULFRICH verwiesen.

---

[1] H. v. HELMHOLTZ, Physiol. Optik. p. 10ff., vgl. oben p. 197. — [2] S. STAMPFER, Jahrb. d. K. K. polyt. Inst. **13.** 30. 1828. — [3] A. GULLSTRAND, Photographisch-ophthalmometrische und klinische Untersuchungen über die Hornhautrefraktion. Stockholm 1896. — [4] C. HESS, Die Anomalien der Refraktion und Akkommodation des Auges, Kapitel XII von GRAEFE-SAEMISCHS Handbuch der gesamten Augenheilkunde. Leipzig 1902. p. 48. Auf diese Darstellung sind die neueren ophthalmologischen Angaben gestützt. — [5] M. BLIX, Upsala Läkaref. Förh. **17.** 98. 1882. — [6] R. STRAUBEL, WIED. Ann. **64.** 794. 1898. — [7] Wegen eines Instruments der letzteren Art von ABBE s. C. PULFRICH, a. a. O. Katalog von ZEISS über Meßinstrumente, p. 23/24. — [8] HEGG, Arch. f. Augenheilkde. **44.** Erg.-Heft 84. 1901; **47.** 1. 1903; vgl. dazu S. CZAPSKI, ibid. **47.** 86. 1903. — [9] LEHMANN zeigte, daß die mit Hilfe der HARTMANNschen Methode (s. u.) bestimmten chromatischen Abweichungen die Glasart in dem Verzeichnis aller bekannten Schmelzen aufzufinden erlauben: Ztschr. f. Instrumentenk. **23.** 291. 1893.

II. Die Bestimmung der Grundfaktoren der Abbildung.

Wie wir schon erwähnten, ist die Abbildung durch die Brennpunktsörter F und F' und die Brennweite f bestimmt.

Wir geben eine Übersicht der Methoden und lassen darauf eine kurze Erörterung ihrer Genauigkeit bei verschiedenen Ausführungsweisen folgen.

Alle folgenden Methoden erfordern die Einstellung auf optische Bilder. Diese kann nach sehr verschiedenen Verfahren stattfinden, die wir in dem Abschnitt über die Genauigkeit der hier zu besprechenden Konstantenbestimmungen zusammenstellen (p. 449). Um aber die Vorstellung zu erleichtern, nehmen wir vorläufig an, daß diese Einstellung mit dem Auge oder Hilfssystemen erfolgt, und bezeichnen das zu untersuchende System mit S, das Hilfssystem (Mikroskop) mit M.

Die mechanischen Teile der Meßeinrichtungen.

Um die Verschiebbarkeit des zu untersuchenden oder von Hilfssystemen und von diesen dargebotenen Objekten längs einer gemeinsamen Achse zu ermöglichen, kann in den meisten Fällen die „optische Bank" dienen, eine gerade Schiene, die, wenn die benutzte Methode die Kenntnis der Verschiebungen erfordert, eine Längsteilung besitzen muß. Auf ihr sind die an den Füßen mit Indizes oder Nonien versehenen Nebenapparate verschiebbar. Als solche treten stets auf ein Träger für das zu untersuchende System, welcher mit einer Zentriereinrichtung für dieses System versehen sein muß, um es in die optische Achse der anderen Nebenapparate zu bringen. Diese bestehen in den Trägern von Objekten (Skalen, Marken), deren vom System entworfenes Bild eingestellt (pointiert) wird und in den zugehörigen Pointierungsvorrichtungen; ferner sind bei denjenigen Methoden, die auf der Messung der Bilder beruhen, entsprechend angebrachte Teilungen vorhanden. Die optische Bank läßt sich auch als das Schema ansehen, das den im folgenden erwähnten Apparaten zugrunde liegt; mit Ausnahme derjenigen Methoden, die eine Drehung des Systems und deren Messung erfordern. Nur die wichtigsten Konstruktionsformen, die zur bequemen Ausführung der verschiedenen Methoden ersonnen wurden, werden wir im folgenden zitieren und auch diese nur dann beschreiben, wenn sie prinzipielle Verbesserungen der Methoden enthalten. Von Konstruktionen, die zur bequemen und genauen Ausführung einer größeren Anzahl der unten angeführten Methoden dienen können, seien die neuesten von Beck[1] und Hartmann[2] genannt, aber auch die im folgenden aufgeführten von Moessard, Dongier, le Gros u. v. a. sind für mehrere Arten von Messungen verwendbar.

1. Die Ermittelung der Brennebenen.

Ihre unmittelbare Beobachtung erfordert die Anwendung eines unendlich fernen, d. h. gegen die Brennweite des Systems sehr weit entfernten Objekts, dessen von S entworfenes Bild in F' auftritt. Gemäß der Grundgleichung für konjugierte Punktorte, $x x' = -f^2$ oder

$$(1) \qquad \frac{x'}{f} = -\frac{f}{x}$$

[1] Konr. Beck, Eders Jahrb. f. Phot. u. Repr.-Tech. **17.** 257. 1903. (The Journal of the Camera-Club, 1903. p. 4.) — [2] J. Hartmann, ibid. p. 665 (vgl. auch dasselbe Jahrbuch **16.** 151. 1902); Ztschr. f. Instrumentenk. **24.** 109. 1904.

muß der Abstand x des Objekts vom vorderen Brennpunkt F des Systems im Verhältnis zu dessen Brennweite desto größer sein, mit je größerer Annäherung x' zu vernachlässigen sein, d. h. das Bild in die andere Brennebene F' fallen soll. Bei Systemen von kurzer Brennweite (Mikroskopobjektiven, Okularen) können daher mäßig entfernte irdische Objekte schon als genügend weit abstehend betrachtet werden (bei 30 mm Brennweite ergibt ein Objektabstand von 30 m schon eine Genauigkeit des Zusammenfallens von Bild und Brennebene von = 0,1 %). Bei größeren Brennweiten muß man entweder siderische Objekte benutzen (sehr entfernte terrestrische sind wegen der in der Horizontalen besonders störenden Wallungen der Atmosphäre und der durch sie verursachten Bildverwaschung ungünstig) oder, wo das unbequem ist, durch optische Mittel ein entferntes Objekt erzeugen.

Dies letztere ist auf drei schon seit den ältesten Zeiten betretenen Wegen ausführbar.

1. In der Achse des Systems S und Mikroskops M wird jenseits des ersteren ein sogen. Kollimator C aufgestellt, d. i. ein kollektives Linsensystem (Fernrohrobjektiv), in dessen abgewandter Brennebene ein geeignetes Objekt („Mire") angebracht und von hinten beleuchtet wird. Dann entwirft offenbar C ein virtuelles Bild der Mire in unendlicher Entfernung und dieses dient als Objekt für S.

2. Ebenfalls sehr alten Datums[1] ist ein Verfahren, welches die Umkehrung des ad 1 angegebenen bildet: es wird der Ort aufgesucht, dessen von S entworfenes Bild unendlich entfernt ist. Zu dem Zwecke wird statt M ein auf Unendlich (Sterne) eingestelltes Fernrohr auf die optische Bank gebracht und eine Marke auf der anderen Seite von S so lange verschoben, bis ihr Bild in dem Fernrohr scharf erscheint. Ist dies der Fall, so befindet sich die Marke offenbar in der abgewandten Brennebene von S.[2]

Wenn das System dispansiv ist, so wird der Vorgang der umgekehrte.[3] Man visiert mit einem Fernrohr, dessen Okularauszug genügend groß ist, erst durch S hindurch nach einem sehr entfernten Objekt und bestimmt dann nach Entfernung von S die Lage desjenigen Objekts auf der Bank, welches unmittelbar durch das Fernrohr gesehen scharf erscheint.

3. Statt eines besonderen Kollimators wird das System selbst zur Autokollimation verwandt.[4] Zu diesem Zwecke wird jenseits S (von M aus), ein gut planer Spiegel senkrecht zur gemeinsamen Achse von M und S aufgestellt. Die Markenebene von M wird von der Seite des Beobachters her beleuchtet durch ein über sie gestelltes unter 45^0 gegen die Achse geneigtes Glasplättchen, das von einer seitlichen Lampe Licht erhält und gleichzeitig freie Durchsicht gestattet (Bohnenberger) oder besser, nämlich mit größerer spezifischer Intensität, durch ein kleines totalreflektierendes, in gleicher Weise beleuchtetes Prisma, das einen Teil des Sehfeldes, mit der einen Kathetenfläche dessen Ebene parallel gestellt, ganz verdeckt, einen anderen Teil frei läßt; im bedeckten Teile befindet sich

---

[1] Nach Scherffer (Instit. dioptr. p. 40) von Maskelyne herrührend; einen besonderen Apparat hierfür beschrieb Th. Baumann, Verhandl. d. Ver. z. Bef. d. Gewerbefl. Berlin 1846 und neuerdings (insbesondere zur Untersuchung photographischer Objektive, s. w. u.) J. Hartmann, Eders Jahrb. 1902. p. 151. — [2] Lippmann schlägt vor (C. R. **134.** 16. 1902), das Fernrohr nicht auf unendlich einzustellen, sondern auf das von S entworfene Bild, und es dann parallel seiner optischen Achse zu verschieben, wofür er eine Einrichtung angibt (ibid. p. 17). Nur wenn jenes Bild im Unendlichen liegt, verschiebt es sich nicht gegen das Fadenkreuz des Fernrohrs. Dieses muß entsprechend der Verschiebung größere Öffnung als S besitzen. — Bei ungenauer Fokussierung des Fadenkreuzes im großen Fernrohr (p. 450) würde hierbei stets Parallaxe auftreten infolge der Verschiebung der E.-P. Vgl. auch Hartmanns verwandten Vorschlag in Ztschr. f. Instrumentenk. **24.** 108. 1904, wo das Fernrohr eine kleine Öffnung erhält, um das System S zonenweise untersuchen zu können. — [3] L. Merz, Pogg. Ann. **54.** 321. 1845. — [4] s. die Anordnungen von E. Lommel, Ztschr. f. Instrumentenk. **5.** 124. 1885. L. Laurent, C. R. **100.** 100. 1885; Ztschr. f. Instrumentenk. **5.** 322. 1885.

eine geeignete Marke (heller Spalt in dunklem Felde, in Silberniederschlag eingerissenes Netz oder dergl.), dessen Reflexbild in dem freien Teile des Sehfeldes beobachtet wird (ABBE).

Wenn die von hinten beleuchtete Marke oder ihr durch den zwischen ihr und S befindlichen Teil von M entworfenes Bild sich genau im Brennpunkte von S befindet — und nur dann — werden auch die nach der Brechung in S an dem Spiegel reflektierten und wieder durch S gebrochenen von der Marke ausgegangenen Lichtbüschel in deren Ebene wieder vereinigt. Man sieht also dann ein scharfes Bild der Marke in deren Ebene. Liegt der Brennpunkt des Systems S jenseits von S (Typus der dünnen Dispansivlinse), so muß durch ein zwischen M und S angebrachtes Hilfssystem S' ein reelles Bild der Marke nach S hin in dessen Brennebene entworfen werden.

Die Methode der Autokollimation ist besonders empfindlich, weil die Strahlen das System S zweimal passieren müssen. Nahe der Brennebene entspricht einer um dx von ihr abweichenden Stellung der Marke, wie man leicht erkennt, eine um ebensoviel nach der entgegengesetzten Richtung von ihr abweichende Lage des Markenbildes, also eine relative Verschiebung von $2\,dx$. Somit ist die Fokussierungsgenauigkeit verdoppelt. Damit die pointierte Ebene wirklich die Brennebene sei, muß der benutzte Hilfsspiegel natürlich sehr gut plan sein.

Um bei allen diesen Methoden zur Bestimmung der Brennpunktsörter die relative Lage des Brennpunkts gegen irgend eine mit dem Linsensystem fest verbundene, zur Achse senkrechte Ebene, D, zu bestimmen, kann man entweder mit demselben System, welches zur Einstellung auf den Brennpunkt diente und ohne dasselbe irgendwie zu ändern, vor- oder nachher auf die betreffende irgendwie markierte Ebene einstellen. Oder man ersetzt die erstere Pointierungsvorrichtung durch eine genau bis in ihren Einstellungspunkt reichende Spitze (von Elfenbein oder Stahl) und verschiebt diese bis zum Kontakt mit der festen Ebene D. Die Differenz der Ablesungen an der optischen Bank bei der einen und anderen Stellung des Systems oder Spitzenträgers ist dann die gesuchte Entfernung DF bezw. DF' (vgl. Figur 171 unten).

Zu Ausgangsebenen D empfehlen sich am meisten die durch einen bezw. beide Fassungsränder und die durch die äußeren Linsenscheitel gehenden achsensenkrechten Ebenen.

2. Die Bestimmung der Brennweite.

Die Brennweite eines optischen Systems ist nach ihrer fundamentalen Definition (s. p. 45) das Verhältnis der linearen Größe eines in der Brennebene des Bild-(Objekt-)Raumes gelegenen Bildes (Objekts) zur scheinbaren (angularen) Größe seines Objekts (Bildes). Die Brennweite tritt außerdem als wesentlicher Faktor in alle Abbildungsgleichungen mit ein und kann aus jeder derselben ebenfalls durch die anderen in ihr auftretenden Größen definiert, daher auch durch empirische Bestimmung jener gemessen werden (als Abstand der ersten Hauptpunkte von den Brennpunkten oder der Brennpunkte von den zweiten Hauptpunkten u. dgl.). Dementsprechend scheiden sich die Methoden zur empirischen Bestimmung der Brennweite auch in zwei Gruppen. In solche, die auf die fundamentale Bedeutung der Brennweite gegründet sind — direkte Methoden — und in solche, die auf den Nebenbeziehungen beruhen — indirekte Methoden.

Bei den ersteren kann man eine weitere Scheidung vornehmen in solche, die die Definition unmittelbar, ohne jedes Zwischenglied, zur Anwendung bringen und in solche, bei denen Glieder vorhanden sind, durch die die eigentliche Grundlage der Methode oft fast verdeckt wird.

A. Methoden, welche unmittelbar auf der Definition der Brennweite beruhen.

1. Bei den ersteren ist der Definition gemäß die lineare Größe des in der Brennebene auftretenden Bildes eines sehr entfernten Objekts zu messen. Ist das System für den unendlich fernen Punkt, wenigstens auf der einen Seite, aplanatisch — wie die Objektive der Fernrohre oder die photographischen Systeme und in umgekehrter Stellung als der gewöhnliche Gebrauch sie mit sich bringt auch die Lupen und annähernd die Objektive der Mikroskope — so bietet jene Messung keine Schwierigkeiten dar. Speziell beim Fernrohr liegt gerade diese Bestimmung ganz im Rahmen von dessen sonstigem Gebrauch. Denn schon kurz nach der Erfindung des Fernrohres wurde speziell beim Keplerschen der große Vorteil erkannt, den es für die sogen. mikrometrische Messung der angularen Abstände von Sternen oder der scheinbaren Größe von Planeten darbot. Zu diesem Zwecke wird in der Brennebene ein sogen. Mikrometer[1] angebracht, d. i. entweder ein feststehendes System von parallelen Spinnwebfäden oder eben solchen feinen Strichen auf einer Glasplatte, oder ein mittels einer feinen Schraube seitlich um genau meßbare Beträge verschiebbarer Faden oder Doppelfaden, der einmal auf den einen und das andere Mal auf den anderen Punkt des Sehfeldes eingestellt wird.[2] Wenn auf diese Weise die lineare Größe des von dem Fernrohrobjektiv entworfenen Bildes und durch direkte Winkelmessung die scheinbare Größe seines Objekts gemessen ist, so hat man in dem Verhältnis dieser beiden Größen unmittelbar die Brennweite des Objektivs.

Grubb[3] benutzte dieses Verfahren in einfacher Ausführung für photographische Objektive; ein Apparat, der die Methode besonders auf Mikroskopobjektive anzuwenden erlaubt, ist jüngst von V. le Gros konstruiert worden.[4] Hartmann[5] vertauscht bei diesem Verfahren Objekt und Bild, indem er den Winkel mißt, unter dem ein Objekt von gemessener Länge durch das System hindurch erscheint.

2. Gewöhnlich sind aber bei anderen Systemen als den Objektiven von Fernrohren die Einrichtungen für die direkte Winkelmessung der scheinbaren Größe des Objekts von vornherein nicht vorhanden und auch weniger leicht anzubringen. Andererseits ist bei diesen wegen ihrer im allgemeinen sehr viel kürzeren Brennweite auch ein geringerer Abstand des Objekts schon genügend. Bei Okularen und den schwächeren Objektiven von Mikroskopen ist daher ein ganz bequemes Verfahren zur Bestimmung der Brennweite das folgende (nach Abbe, siehe Dippel, das Mikroskop, p. 331): Man bringt in der Entfernung von einem oder wenigen Metern, z. B. am Fenster, mehrere gut markierte Objekte (kreisförmige Scheiben von Papier oder dgl.) an und berechnet aus deren linearer Größe y — dieselben einzeln und paar- oder gruppenweise genommen — und ihrem Abstand von der Tischfläche des Mikroskops, s, — diesen Abstand gerechnet auf dem gebrochenen Wege über die Mitte des planen Beleuchtungsspiegels des Mikroskops — die angulare Größe y/s der einzelnen Marken oder Markengruppen. Mißt man dann

---

[1] Erfunden nach einigen von Gascoigne 1640, nach anderen (Govi) von Divini 1649. — [2] Über die zahlreichen Formen der Mikrometer sei auf die Artikel „Mikrometer" in Gehlers physik. Wörterbuch und der Encyclop. Brit., sowie auf die Lehrbücher der praktischen Astronomie verwiesen, insbes. L. Ambronn, Handb. d. astr. Instrumentenk. Berlin 1899. II. p. 503—610. — [3] Th. Grubb, Brit. Journ. of phot. **10.** 93. 1863. — [4] V. le Gros, C. R. **137.** 314. 1903. — [5] J. Hartmann, Ztschr. f. Instrumentenk. **24.** 37. 1904. Hartmann benutzt übrigens diese Methode nicht direkt zur Bestimmung der Brennweite, sondern bestimmt den vorderen Knotenpunkt aus dem Satze, daß von den Knotenpunkten aus Objekt und Bild unter dem gleichen Winkel erscheinen. Also braucht sein Objekt nicht in der Brennebene zu liegen, wenn die Drehachse des Winkelmeßinstruments durch den zweiten Knotenpunkt geht (daher ist ein Spektrometer geeignet). Das Resultat wird aber genau genug, wenn das Objekt der Brennebene und die Drehachse dem zweiten Knotenpunkt (der Linse überhaupt) nahe ist.

die lineare Größe des Bildes, y', welches ein zentrisch auf den Tisch gelegtes Okular oder schwaches Mikroskopobjektiv von jenen Marken entwirft, mit einer Mikrometerlupe (RAMSDENsches Dynameter, p. 457) oder besser mit einem mit Mikrometer versehenen Mikroskop[1], so hat man in dem Verhältnis $y' : (y/s)$ wieder ohne weiteres die Brennweite des Systems.

Diese Methode läßt sich natürlich ebensogut wie am Mikroskop an der optischen Bank anwenden. Ähnlich kann man bei photographischen (Projektions-) Objektiven verfahren.[2]

Wenn der Abstand der Marke nicht sehr groß gegen die Brennweite des Systems ist, so ist die Anwendung der Gleichung $f = (h'/\mathrm{tg}\, u)$ in den letztgenannten Fällen nicht mehr ohne weiteres zulässig. Man kann dann entweder durch ein Hilfssystem — eine Art Kollimator — künstlich ein in unendlicher Ferne liegendes Objekt erzeugen, dessen angularen Durchmesser man ein für allemal bestimmt, oder man muß den Abstand des Objekts vom vorderen bezw. den des Bildes vom hinteren Brennpunkt besonders in Anschlag bringen (s. unten). Das erste Hilfsmittel liegt I. PORROS[3] Phozometer zugrunde, das später von SECRETAN[4] in dem Focabsolumeter nachgeahmt wurde (nach M. v. ROHR[5]). HARTMANN[6] wendet es mit Vertauschung von Objekt und Bild an: das Objekt im Fokus des zu untersuchenden Systems (f), dahinter das auf unendlich eingestellte Fernrohr mit der Objektivbrennweite F und Mikrometer. Bei PORRO ist daher $f = F\beta$; bei HARTMANN $f = F/\beta$.

3. Gerade bei den Mikroskopobjektiven kürzester Brennweite — die, wie wir früher gesehen haben, rationellerweise die größte Apertur besitzen — läßt sich, wenn sie aplanatisch sind, ein Verfahren anwenden, welches auf den Sinussatz gegründet die ursprüngliche Definition der Brennweite ebenso unmittelbar zum Ausdruck bringt, wie die Bestimmung des Verhältnisses der angularen Entfernung von Sternörtern zur linearen Größe ihrer Bilder bei Fernrohrobjektiven. Gemäß dem Sinussatz genügt a, die numerische Apertur auf der Objektseite [vgl. p. 235, Gleichung (5 a)] der Gleichung

$$(2) \qquad a = \frac{p'}{f'} \,, \qquad \text{also} \quad f' = \frac{p'}{a} \,.$$

Wenn daher diese Apertur bekannt ist, so reicht die Messung des ihr entsprechenden Querschnitts der Büschel in der hinteren Brennebene, $2p'$, vollständig hin zur Bestimmung der hinteren Brennweite, f', des Systems. Die Apertur a läßt sich nach einer der Methoden bestimmen, welche wir hierfür weiter unten angeben werden. Ohne die Voraussetzung einer solchen vorgängigen Bestimmung, also ganz ohne weiteres, ist diese Methode der Brennweitenbestimmung anwendbar bei Systemen, deren Apertur $a > 1$ ist, d. h. bei solchen, deren volle Apertur nur durch Zwischenfügen einer Immersionsflüssigkeit herstellbar ist. In diesen erreicht die Apertur der in das System eintretenden Büschel bei Weglassung der Immersionsflüssigkeit, also Luft vor der Frontlinse, höchstens den Wert 1,0, diesen Wert aber mit Sicherheit, wenn der Beleuchtungsapparat eine die Einheit übersteigende Apertur besitzt (vgl. p. 366). Man verfährt folgendermaßen: Man schiebt in den Haupttubus des Mikroskops ein Hilfsmikroskop mit Mikrometerokular, mit dem man annähernd auf die hintere (obere) Brennebene des zu untersuchenden Objektivsystems S einstellt. Man senkt den Haupttubus so weit, bis der in dem Hilfsmikroskop hell erscheinende Kreis in der hinteren

[1] Wir werden später noch darauf zurückkommen, daß das zur Bildmessung dienende optische Hilfssystem am besten nach der Objektseite telezentrisch gemacht wird. — [2] Zur Ausführung bei diesen Systemen sind u. a. die oben erwähnten Apparate von BECK u. HARTMANN eingerichtet. — [3] I. PORRO, C. R. 33. 50. 1851. — [4] SECRETAN, De la distance focale des systèmes optiques convergents etc. Paris 1855. — [5] M. v. ROHR, Theorie u. Gesch. der photogr. Obj. Berlin 1899. p. 117. — [6] J. HARTMANN, EDERS Jahrb. 1903. p. 673.

Brennebene von S seine maximale Größe erreicht hat, natürlich nachdem aus dem Beleuchtungsapparat alle Blenden entfernt sind, so daß man sicher ist, daß dieser Büschel bis zum streifenden Austritt liefert. Die Größe dieses hellen Kreises bestimmt man mit dem Mikrometermikroskop ihrem absoluten Betrage nach (in Millimeter) unter Berücksichtigung der Vergrößerung, welche das Hilfsmikroskop selber zwischen Objekt und Mikrometer besitzt. Die Hälfte des Durchmessers dieses Kreises ist dann die gesuchte Brennweite.

Um sicher zu sein, daß der überstehende Fassungsrand der Frontlinse des Systems nicht dessen Annäherung an die Oberfläche des Kondensorsystems, und dadurch die Aufnahme der von diesem streifend austretenden Büschel verhindert, befestigt man unter der Frontlinse von S durch Adhäsion mittels der Immersionsflüssigkeit ein dünnes Deckglas und nähert nun S samt diesem Deckglas dem Kondensor bis zur völligen Berührung. Die Luftschicht zwischen beiden kann dann als verschwindend dünn angesehen werden, und da das System innerhalb Deckglas und Immersionsflüssigkeit der Voraussetzung nach eine die Einheit übersteigende Apertur besitzt, so ist es sicher imstande, Büschel von der Apertur 1,0 durch Deckglas und Immersionsflüssigkeit hindurch aufzunehmen. Da ferner der Eintritt der totalen Reflexion nur von der Richtung der einfallenden Büschel abhängt, so entsprechen den Punkten auf dem Umfang des hellen Kreises oberhalb von S parallelstrahlige Büschel vor S. Damit ist den Bedingungen der Anwendung von Gleichung (2) genügt.

B. Methoden, bei welchen die Definition der Brennweite mittelbar benutzt wird.

(Bestimmung der Brennweite aus Lage und Vergrößerung konjugierter Ebenen).

4. Man kann unter Beibehaltung der unter 2. erwähnten Anordnung, d. h. bei mäßig entferntem Objekt erst die Lage des einen Brennpunktes, z. B F (Figur 171), in bezug auf die durch den Fassungsrand des Systems gehende Ebene bestimmen, $DF = z$, dann bei umgekehrter Lage des Systems, also F nach dem Objekt hin, wie vorher mikrometrisch die Größe des Bildes der Marke messen, $= y'$, und dann nach der Gleichung für die Vergrößerung in einem optischen System[1]

$$(3) \qquad \beta = \frac{y'}{y} = \frac{f}{x} \quad , \qquad \text{also} \quad f = x\frac{y'}{y} = (s-z)\frac{y'}{y}$$

die Brennweite f berechnen.

Durch Wiederholung der angegebenen Messungen in umgekehrter Lage des Systems erhält man einen zweiten Wert von f, welcher mit dem ersten übereinstimmen muß, daher zur Kontrolle der ersten Messung dient.

Läßt sich so nach (3) aus einer genäherten Kenntnis von x die Brennweite recht genau bestimmen, wenn man x groß gegen f wählen kann, so ist umgekehrt auch aus einer ungefähren Kenntnis von f die Lage der Brennebene um so genauer zu ermitteln, je kleiner x gegen f

[1] Diese Gleichung ist, wie man sich leicht überzeugt, nur ein veränderter Ausdruck für die Definitionsgleichung der Brennweite. Man hat nur denjenigen vom Objekt ausgehenden Strahl zu betrachten (Figur 171), welcher durch den vorderen Brennpunkt F geht, nach der Brechung also der Achse des Systems parallel ist, oder für die unter 5. angeführte Methode umgekehrt denjenigen Strahl, welcher der Achse parallel einfallend nach der Brechung durch den zweiten Brennpunkt F' geht. Man sieht dann, daß die eben benutzten Gleichungen für die lineare Vergrößerung in konjugierten Achsenpunkten nichts anderes sind als der mathematische Ausdruck für diejenige Definition der Brennweiten, nach welcher sie gleich sind dem Verhältnis der scheinbaren Größe eines in endlicher Entfernung gelegenen Objekts, dieses gesehen vom Brennpunkte der Objektseite zur linearen Größe seines Bildes oder *vice versa*. Umgekehrt führen die Gleichungen $f = h'/\text{tang}\, u$ bezw. $f' = h/\text{tang}\, u'$, auf jene Strahlen angewendet, sofort zu den Gleichungen für die lineare Vergrößerung in konjugierten Achsenpunkten.

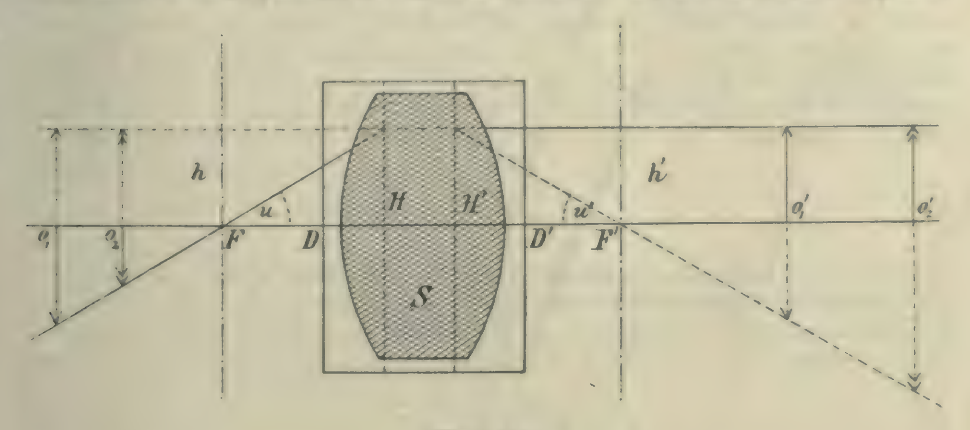
ist (falls β mit hinreichender Schärfe bestimmt werden kann). Ebenso läßt sich bei genäherter Kenntnis von f der Hauptpunkt H mit großer Genauigkeit ermitteln, wenn man eine Vergrößerung β hinreichend scharf bestimmt, nach der Formel

$$HO = \xi = -f\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \text{ (etwa aus II** auf p. 51).}$$

Natürlich muß hier ξ klein gegen f gewählt sein. Diese Methode und eine zweckentsprechende Ausführungsform (das Objekt in der Ebene des Fassungsrandes, telezentrische Einrichtung bei der Messung von β) wurde jüngst von HARTMANN[1] angegeben. S. a. u. p. 470.

Dieselben Überlegungen und Methoden sind nach dem Folgenden (unter 5) auch auf den Bildraum anzuwenden.

5. Man kann namentlich bei stärkeren Mikroskopobjektiven vorteilhaft den umgekehrten Weg einschlagen, das Objekt wie ein gewöhnliches mikroskopisches Objekt nahe dem vorderen Brennpunkt anbringen und die Größe des Bildes messen, welches das System von ihm in erheblichem und genau ermitteltem Abstande vom hinteren (oberen) Brennpunkte entwirft. Als solches Objekt empfiehlt



Figur 171.
Zu den verschiedenen Definitionen und Bestimmungen der Brennweiten.

sich dann ein sogen. Objektmikrometer, eine sehr fein geteilte Glasskala von bekanntem Teilungswert (z. B. 0,01 mm). Das Bild wird auf einer eben solchen aber meist gröberen Teilung aufgefangen, einem Okularmikrometer (0,1 mm). Man darf hier aber nicht ein Okular anwenden, welches wie das HUYGHENSsche seinen unteren Brennpunkt und die reelle Diaphragmenebene zwischen den Linsen enthält, sondern ein solches, welches wie das RAMSDENsche seinen vorderen Brennpunkt außerhalb derselben hat.

Der Abstand der oberen Brennebene des Objektivs von der Mikrometerebene, x', muß dann besonders bestimmt werden, am besten, indem man mit einem Hilfsmikroskop, welches sich in den Haupttubus des Mikroskops einschieben läßt, einmal auf diese Ebene als die Bildebene sehr entfernter Gegenstände (geeignet sind kahle Bäume, durchbrochene Gitter auf Häusern) einstellt und dann auf die durch den unteren Rand des Tubus gehende Ebene, welche nach Entfernung des Objektivs auf irgend welche Weise markiert wird.

Die Verschiebung, z', des Hilfsmikroskops, welche von der einen Einstellung bis zur andern nötig ist, unter Beachtung des Vorzeichens, welches man ihr geben muß, addiert zu der für sich ermittelten der Mikrometerebene vom unteren Tubusrande, s', ist dann $s' + z' = x'$, gleich der Entfernung der Bildebene vom Brennpunkt des Bildraumes, daher aus

[1] J. HARTMANN, Ztschr. f. Instrumentenk. **24.** 40. 1904.

$$\frac{y'}{y} = \frac{x'}{f'} \quad ; \quad f' = x'\frac{y}{y'} = (s' + z')\frac{y}{y'} \quad . \tag{3a}$$

6. Eine Modifikation der unter 4. und 5. angegebenen Verfahren besteht darin, daß man die Bestimmung der relativen Lage des dem Objekt bezw. Bild zugewandten Brennpunktes umgeht, indem man die Vergrößerungen bestimmt, welche das System in bezug auf zwei um eine gemessene Entfernung ξ abstehende Objekte oder in zwei um eine ebenfalls gemessene Entfernung ξ' abstehenden Bildebenen besitzt. Ist die erstere Vergrößerung

$$\frac{y_1'}{y_1} = \beta_1 \quad , \qquad \text{die letztere } \frac{y_2'}{y_2} = \beta_2 \quad ,$$

so hat man

a) bei dem einen Verfahren aus

$$x_1 = \frac{f}{\beta_1} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{f}{\beta_2} \quad ,$$

$$x_2 - x_1 = \xi = f\left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1}\right) \quad ,$$

also

$$f = \frac{\xi}{\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1}} = \frac{\xi}{\frac{y_2}{y_2'} - \frac{y_1}{y_1'}} \tag{4a}$$

(wie auch auf p. 51 aus Gleichung II* gefolgert wurde);

b) bei dem anderen Verfahren ganz entsprechend

$$x_2' - x_1' = \xi' = f'(\beta_2' - \beta_1') \quad ,$$

also

$$f' = \frac{\xi'}{\beta_2' - \beta_1'} = \frac{\xi'}{\frac{y_2'}{y_2} - \frac{y_1'}{y_1}} \quad . \tag{4b}$$

Die Art der Verwirklichung dieser beiden Verfahrungsweisen liegt auf der Hand[1]. Ist außer dem gegenseitigen Abstand der beiden Objekt- bezw. Bildebenen auch noch derjenige einer derselben von einem festen Punkte D, gemessen z. B. $DO_1 = a_1$, so berechnet sich aus ihm und dem Werte von f der Brennpunktsabstand $DF = z = a_1 - f/\beta_1$, der Abstand des Hauptpunktes der betreffenden Seite von derselben festen Ebene $DH = e = a_1 - f(1 - 1/\beta_1)$ u. s. w., ebenso auf der Bildseite, wenn $DO_1' = a_1'$ gemessen ist, $DF' = z' = a_1' - f\beta_1$; $DH' = e' = a_1' + f'(1 - \beta_1)$.

7. Bei den zur (subjektiven) Beobachtung virtueller Bilder benutzten Systemen von endlicher Brennweite, also den einfachen und zusammengesetzten Mikroskopen, ist es vorteilhaft, diese virtuellen Bilder zur Messung zu verwenden, da in bezug auf sie das System am besten korrigiert ist. Man kann dies durch Vermittelung eines der Zeichenapparate (sogen. *Camerae lucidae*), welche an diesen Instrumenten häufig gebraucht werden, deren Konstruktionsformen man in den p. 373 zitierten Lehrbüchern der Mikroskopie beschrieben findet (s. auch unten p. 401). Bringt man den Apparat in den mit der oberen Brennebene ja stets nahezu

---

[1] Das erstere ist das von ABBE für seinen Apparat adoptierte, s. unten. Wenn man nicht sehr enge Strahlenbüschel wirken läßt, so wird man bei einem System, dessen Bildabstand viel größer ist als der Objektabstand (z. B. einem Mikroskopobjektiv) das Verfahren (6b) in der normalen Gebrauchslage des Systems anwenden und (6a) eventuell zur Kontrolle in der umgekehrten Lage desselben (Bild- und Objektseite vertauscht). Umgekehrt, wenn das System für großen Objekt- und kleinen Bildabstand korrigiert ist.

koinzidierenden Augenpunkt des Instruments und mißt man die Vergrößerung der virtuellen Bilder bei zwei verschiedenen Entfernungen des Projektionsschirmes, so kann man aus der absoluten Entfernung des Schirmes vom Augenpunkt oder aus dem gegenseitigen Abstand der beiden Schirmlagen und dem in ihnen stattfindenden Vergrößerungsverhältnisse wie in Methode 5. und 6b. die Gesamtbrennweite des Mikroskops berechnen[1].

8. Eine andere Methode, bei welcher die Bestimmung der Brennpunktsörter umgangen wird, wandte MEYERSTEIN[2] an. Er stellte eine Skala O und ein Mikrometermikroskop M fest auf. Die Pointierungsebene des letzteren O' war dabei um die meßbare Größe c entfernt von der Skala. Das zu untersuchende Linsensystem S wurde zwischen O und O' so lange verschoben, bis in O' ein scharfes Bild von O entstand, dessen Vergrößerung β mit M bestimmt wurde; außerdem wurde der Abstand a eines mit dem System fest verbundenen Punktes (Index am Fuße des Trägers auf der optischen Bank) von der Skala O gemessen. Die letztere Operation wurde wiederholt, nachdem das System S um 180° gedreht war (Objekt- und Bildseite vertauscht) und dasselbe in seiner neuen Lage wiederum verschoben, bis das Bild in O' scharf war und von gleicher Größe wie vorher. Die Entfernung des Index, durch welchen die Drehachse des Systems geht, von O sei jetzt b. Dann liegt der zweite Brennpunkt des Systems jetzt an der gleichen Stelle wie vorher der erste und *vice versa*. Hieraus leitet man ab

$$f = \frac{c - (a + b)}{\beta - 1/\beta} \quad . \tag{5}$$

8a. Eine Modifikation dieser Methode bildet die (ältere) von E. HOPPE[3], welcher in der zweiten, umgekehrten Lage des Systems nicht den Abstand des Fixpunktes D desselben (er wählt hierzu die Ebene des einen Fassungsrandes) von O, sondern denjenigen von O' bestimmt, $DO' = b'$. Er erhält dann aus a, b', c und β

$$f = \frac{\beta(a - b')}{\beta^2 - 1} \quad , \tag{6}$$

und ebenso lassen sich dann aus einfachen Gleichungen die Örter der Brenn- und Hauptpunkte gegen O und O' oder gegen D berechnen, z. B.

$$OF = \frac{\beta^2(a - b')}{\beta^2 - 1} \quad ; \qquad F'O' = \frac{a - b'}{\beta^2 - 1} \quad ; \qquad DH = \tfrac{1}{2}(c - a - b') \text{ u. s. w.}$$

8b. Eine andere Modifikation ist die erste der drei von MAC GILLAVRY[4] vorgeschlagenen Bestimmungsweisen (die zweite und dritte sind fast identisch mit den unter 6a. und 6b. angeführten). Bei dieser mißt er die Vergrößerungen β_1, β_2 eines Systems in zwei Stellungen zu Objekt und Bild ohne Umkehrung des Systems, und die Differenz d der Entfernungen von Objekt und Bild in den beiden Fällen. Hieraus berechnet sich die Brennweite

$$f = \frac{d\,\beta_1\,\beta_2}{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_1\,\beta_2 - 1)} \tag{7}$$

und ebenso genügen die Messungsdaten auch für die Berechnung der Brennpunktsörter und Hauptpunktsabstände.

---

[1] Diese Methode wurde zu sehr exakter Ausführung gebracht (die Projektionsschirme an den Fernrohrträgern eines Kathetometers angebracht, ihre absoluten und gegenseitigen Entfernungen an dessen Teilung abgelesen) von C. M. GARIEL, Séanc. Soc. franç. de phys., p. 186. 1887. — [2] MEYERSTEIN, WIED. Ann. **1.** 315. 1877; CARLS Repert. **14.** 363. 1877. — [3] E. HOPPE, POGG. Ann. **160.** 169. 1876. — [4] MAC GILLAVRY, Maandblad voor Natuurwetensch. **5.** 73. 1875.

9. Statt die in konjugierten Ebenen stattfindenden Vergrößerungsverhältnisse zu messen, kann man einfache Zahlen (1, 2, 3, 4 oder $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$) für dieselben wählen. Alsdann hat man nur die Koinzidenz von Strichen in der Objekt- mit solchen in der Bildskala herbeizuführen und als Kriterium zu benutzen. In dieser Weise verfuhren Hansen[1] und Mergier[2], von denen der letztere auf mechanischem Wege die Stellungen der Linse und Skala, wo die Vergrößerung = 1, 2, 3 . . . ist, herbeiführte. Die Bildebenen, in welchen die Vergrößerung = 1, 2, 3 ist und ebenso die Objektebenen, denen im Bilde die Vergrößerungen 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ . . . entsprechen, sind von einander je um f entfernt. (Vgl. Figur 11.)

Auf demselben Prinzip beruhen auch die Methoden von Donders[3] und Snellen[4] zur Bestimmung der Stärke von Brillengläsern.

Endlich bilden ebenfalls nur Modifikationen des hier genannten Verfahrens die Methoden, bei welchen zuerst die Lage der Brennebenen (wo die Vergrößerung = 0 ist) und dann die der negativen Hauptebenen (Vergrößerung = — 1) aufgesucht und der Abstand dieser beiden gemessen wird[5]. Diese sind ebenfalls je um f entfernt.

Es hat kaum einen Zweck, die verschiedenen anderen sich hier darbietenden Möglichkeiten aufzuzählen. Eine andere Grundlage besitzt jedoch

10. die Methode, die von der Ermittelung der positiven Hauptebenen ausgeht, oder genauer der positiven Knotenpunkte, die ja mit den Hauptpunkten in den hier allein interessierenden Fällen zusammenfallen. Da in den Knotenpunkten das Konvergenzverhältnis der Strahlen = 1 ist, so muß bei einer Drehung eines Objekts um den ersten Knotenpunkt eine gleichgroße Drehung des Bildes um den zweiten entsprechen. Wählt man genügend entfernte Objekte, so ist der Mittelpunkt ihrer Drehung für deren Betrag unwesentlich und man kann etwa sagen, daß Drehungen des entfernten Objekts und des Bildes um den zweiten Knotenpunkt gleiche Beträge haben. Dann darf man aber auch statt der Drehung der Objekte und Bilder eine Drehung des Systems um denselben Punkt setzen; also folgt, daß eine Drehung des Systems um den zweiten Knotenpunkt den Bildort eines entfernten Objekts nicht ändert. Nach diesem Prinzipe wird bei dem „tourniquet“ von Moessard[6] die Lage der Knotenpunkte bestimmt, dasselbe ist u. a. auch bei dem oben genannten Apparate von Beck wieder aufgenommen.

Findet in einem achsensymmetrischen System eine Spiegelung oder eine ungerade Anzhl von Spiegelungen statt, so besitzen nicht mehr die Knotenpunkte, in denen $\gamma = + 1$ ist, sondern die, in denen $\gamma = - 1$ ist (vgl. p. 62 und 76) die Eigenschaft, daß einer Drehung der Objekte um den einen Punkt eine gleich große Drehung der Bilder um den konjugierten Punkt entspricht. Nun fallen aber bei solchen katoptrischen oder katadioptrischen Systemen (wofern alle vor einer spiegelnden Fläche gelegenen brechenden Flächen, wie gewöhnlich, eine gerade Anzahl von Malen durchsetzt werden) die Brennebenen zusammen, und da die Brennweiten gleich sind, fallen auch die Knotenpunkte zusammen, z. B. bei einem Spiegel in

---

[1] P. A. Hansen, Abh. Sächs. Ges. d. Wiss. **15.** (10) 1874 (nach Thompson). — [2] Mergier, Séances de la Soc. franç. de phys. 1887. p. 193. — [3] F. C. Donders, Versl. en Mededeel. **15.** 402. 1863. — [4] M. Snellen, Maandb. voor Natuurwetensch. **7.** 23. 1876. — [5] Z. B. H. Schröder, Photogr. Mitteilgn., hrsg. von H. W. Vogel, **23.** 254. 1887. Im wesentlichen die gleiche Methode ist die von S. P. Thompson, Journ. Soc. of Arts **40.** 22. 1891, bei welcher die Lagen beider Brennebenen eines Systems durch Mikrometer markiert und letztere auf mechanischem Wege (rechts- und linksgängige Spindel) in die symmetrischen Ebenen übergeführt werden, in welchen die Vergrößerung = — 1 ist. Anwendung dieser Methode auf dispansive Systeme von A. Anderson, Phil. Mag. (5) **31.** 511. 1891. Auf die Bestimmung der Distanz der positiven wie negativen Hauptebenen haben, wie Thompson zeigt, die Fokussierungsfehler einen geringeren Einfluß, als auf die Bestimmung der Entfernung jedes anderen Paares konjugierter Ebenen. — [6] P. Moessard, Bull. Soc. Franç. de Phot. (2) **5.** 124. 1889; s. a. G. Pizzighelli, Phot. Corr. **26.** 541. 1889.

den Kugelmittelpunkt, bei einer Linse mit hintergesetzten ebenen Spiegel in den Brennpunkt der Linse. Um diesen Punkt herum drehen sich also alle Objekte und Bilder um gleiche Beträge, oder eine Drehung des Systems um ihn verändert die Lage keines Bildes fester Objekte. So bestimmt DÉVÉ[1] die Krümmungsmittelpunkte spiegelnder Flächen; oder die Brennpunkte von Linsen, hinter die er einen Planspiegel setzt, durch die Lage der Achsen, um die das System ohne Bildverschiebung gedreht werden kann.

C. Methoden, welche bloß auf der Ermittelung der Örter konjugierter Punkte auf der Achse beruhen.

Die Brennweite eines Systems läßt sich, wie schon bemerkt, auch aus jeder anderen Gleichung, in welcher sie in irgend welcher Verbindung mit anderen Größen auftritt, bestimmen, indem man diese anderen Größen mißt[2]. Namentlich die Grundgleichung für die Örter konjugierter Punkte auf der Achse

$$x x' = -f^2 \tag{8}$$

kann zu solchen Bestimmungen dienen und ist vornehmlich zur Grundlage von solchen benutzt worden. GAUSS[3] diskutierte ziemlich vollständig die verschiedenen Möglichkeiten, auf Grund jener Gleichung f zu bestimmen, und ihre Vorteile oder Nachteile.

11. Wenn die Lage der Brennpunkte F, F' unbekannt ist, ihre Entfernungen von einem festen Punkte D des Systems, in der Richtung des einfallenden Lichtes positiv gerechnet, $DF = z$, $DF' = z'$ gesetzt werden, die Entfernungen eines Objektpunktes O und seines Bildpunktes O' von demselben Punkte D, im selben Sinne gemessen, DO mit a und DO' mit a' bezeichnet werden, so sind zur Ermittelung von f, z und z' stets drei Versuche nötig. Seien die bei denselben erhaltenen Werte von a und a' durch Indizes unterschieden, so ergibt die dreimalige Anwendung der Gleichung (10), wenn berücksichtigt wird, daß $x = FO = a - z$ und $x' = F'O' = a' - z'$ ist, also die Gleichung

$$(a_k - z)(a_k' - z') = -f^2 \tag{9}$$

für $k = 1$, $k = 2$ und $k = 3$ nach bekannten Verfahrungsweisen die Werte von z, z' und f^2 (GAUSS, l. c., p. 23/24). Das Vorzeichen von f bestimmt sich aus der aufrechten oder verkehrten Lage des Bildes zum Objekte im Verhältnis zum Vorzeichen von $x' = a' - z'$ in einem der drei Versuche.

12. Sowohl an einer einfachen Linse als an einer solchen, die aus zwei oder mehreren sehr nahe zusammenliegenden zusammengesetzt ist (wie an achromatischen Fernrohrobjektiven von der gewöhnlichen Einrichtung) stehen die beiden Hauptpunkte in geringer Entfernung von einander. Dürfte man diese Entfernung $HH' = l$ wie eine bekannte Größe betrachten, so würden zwei Versuche hinreichend sein, indem die Gleichung

$$z' - z = 2f + l \tag{10}$$

die Stelle des dritten Versuches vertritt. Verbindet man mit derselben die für die beiden ersten Versuche geltenden

$$(a_k - z)(a_k' - z') = -f^2 \tag{9}$$

so erhält man nach Elimination von z und z' zur Bestimmung von f eine quadratische Gleichung, welche aber in eine lineare übergeht, wenn $a_2' - a_2 = a_1' - a_1$,

[1] CH. DÉVÉ, C. R. **128**. 1561. 1899. — [2] Natürlich kann auch jede dieser Gleichungen als Definitionsgleichung der Brennweite benutzt werden. Nach der hier vertretenen Auffassung aber sind diese Definitionen für die Brennweite weniger charakteristisch als die von uns stets festgehaltene. — [3] K. F. GAUSS, Dioptr. Unters. Göttingen 1841. p. 23 ff.

d. h. wenn die beiden Versuche so angeordnet sind, daß die Entfernung des Bildes vom Objekt in beiden dieselbe bleibt, während die Linse in ihnen zwei verschiedene Stellungen einnimmt. Sei jene Entfernung $OO' = c$, also $a_1 = a_1' - c$, $a_2 = a_2' - c$, so wird

$$f = \tfrac{1}{4}(c - l) - \frac{(a_2' - a_1')^2}{4(c - l)} \quad . \tag{11}$$

Man hat also außer c nur $(a_2' - a_1')$, d. i. die Verschiebung des Systems vom einen Versuch zum andern zu messen. Wenn $OO' =$ const. ist, so ist auch $x + x' =$ const. Aus dieser Gleichung in Verbindung mit $x \cdot x' = (-f^2) =$ const. ist zu schließen, daß bei den zuletzt beschriebenen Versuchen $x_1 = -x_2'$, $x_2 = -x_1'$ ist, also die Brennpunktsabstände des Bildes und Objekts in beiden Versuchen der Größe und dem Vorzeichen nach mit einander vertauscht werden[1].

13. Bei derjenigen Stellung des Systems, wo $x = -f$ wird, d. h. wenn der Gegenstand in die negative erste Hauptebene rückt (vgl. p. 48), rückt das Bild in die zweite negative Hauptebene, also ist $x' = +f$ und der Abstand zwischen Objekt und Bild

$$OO' = c = 4f + l \tag{12}$$

wird ein Minimum. Infolge dieser Minimumeigenschaft ändert in der Nähe dieser Lage eine kleine Verschiebung des Objekts die Lage des Bildes um denselben Betrag ($\alpha = 1$, p. 48), daher der Abstand beider sich besonders bequem und genau ermitteln läßt.

Diese Methode war früher unter Vernachlässigung von l in der praktischen Optik beliebt. Man wird bemerken, daß sie ebenso wie die unter 12. angegebene sehr „sperrig" ist, d. h. einen großen Raum beansprucht, da der zu messende Abstand OO' mehr als das Vierfache der zu ermittelnden Brennweite beträgt. Das gleiche gilt auch von den oben angeführten Methoden von HANSEN, S. P. THOMPSON und der von SILBERMANN[2], welche letztere im wesentlichen die gleiche ist wie 13., nur daß SILBERMANN statt des Minimalabstandes selbst die Gleichheit von Objekt und Bildgröße als Kriterium benutzt.

14. Bei den unter 12. und 13. angeführten Methoden ist l als bekannt bezw. $= 0$ angenommen. Will man sich mit einer ungefähren Kenntnis des Wertes von l nicht begnügen, so kann zu seiner Ermittelung und gleichzeitig zur Bestimmung der Brennweite selbst folgendes Verfahren von GAUSS dienen: Man bestimme nach einer der p. 437 ff. angegebenen Methoden die Lage der beiden Brennpunkte des Systems gegen einen festen Punkt desselben, d. h. die Größen z und z' in Gleichung (9) p. 446, sowie den Abstand eines (am besten in der Nähe des Systems befindlichen) Objekts sowohl gegen jenen festen Punkt ($DO = a$) als gegen sein vom System entworfenes Bild $OO' = c$. Man hat dann unter Berücksichtigung, daß $DO' = a' = c + a$ ist,

$$(z - a)(z' - a') = f^2 \quad \text{und} \quad l = z' - z - 2\sqrt{(z - a)(z - a')} \quad . \tag{13}$$

Nach diesem Verfahren, dessen praktische Realisierung GAUSS näher darlegt[3], wird l, wie er zeigt, besonders genau bestimmt, so daß man es für die

---

[1] Diese Methode wurde unter Vernachlässigung von l von BESSEL benutzt. Astron. Unters. **1.** 136; Astron. Nachr. **17.** Nr. 403. Unter Berücksichtigung des Hauptpunktabstandes wurde sie von GAUSS entwickelt und von HASSELBERG sehr sorgfältig ausgeführt. Mél. math. et astr. de Petersb. **6.** 669. 1888 (vgl. S. CZAPSKI, Ztschr. f. Instrumentenk. **9.** 16. 1889); s. auch J. A. CHR. OUDEMANS, Arch. Néerl. **13.** 149. 1877. — [2] SILBERMANN, C. R. **14.** 340. 1830. J. B. BIOT, Traité élem. d'astron. physique **3.** ed. Paris 1841. I, p. 646; s. auch T. W. WEBB, Month. Not. **17.** 269. 1857. — [3] Von THOMPSON fälschlich als PENDLEBURYS Methode namhaft gemacht. Auch die Methoden von A. MARTIN, Ann. Chim. Phys. (4) **10.** 385. 447. 1876 und CORNU, Journ. de Phys. **6.** 276. 1877 sind fast genau identisch mit der

Bestimmung dieser Größe allein vorteilhaft als Hilfsverfahren zu einer der Methoden 12. und 13. benützt. Auch wenn die Brennpunkte nicht genau ermittelt sind, kann man, wie er des weiteren zeigt, entweder aus einer genäherten Kenntnis der drei Größen f, p, p' eine einfache Korrektion der erhaltenen Werte berechnen oder die Methode in etwas abgeänderter Form zur Anwendung bringen, nämlich

15. Man bestimmt die Größen a und a' für irgend welche Entfernung des Objekts bei zwei Stellungen des Systems, in welchen Objekt und Bild im Raume dieselbe Lage haben, das System aber um 180^0 gedreht (Objektseite mit Bildseite vertauscht) ist; dann ist $a_1 = - a_2'$, $a_2 = - a_1'$. Man erhält aus diesen beiden Versuchen — denen wieder zwei Gleichungen von der Form (9) entsprechen — in Verbindung mit dem unter 14. genannten zur Bestimmung der Größen a und c bei kleinem Betrage von c dienenden Versuche entweder die Größen z und z' und aus diesen durch Anwendung der Gleichung (9) auf eine der beiden bei entfernten Objekten ausgeführten Messungen die Größe von f — oder die Lage der beiden Hauptpunkte des Systems gegen den festen Punkt D.

Die Genauigkeit der verschiedenen Bestimmungsweisen der Abbildungkonstanten in ihrer Abhängigkeit

a) von dem zu untersuchenden System.

Die Genauigkeit ist natürlich bedingt

1. von den Dimensionen des Systems,

2. von seinem Korrektionszustande. Wir haben früher gesehen, daß eine Abbildung zunächst nur in dem fadenförmigen Raume längs der Achse zustande kam und haben diese Abbildung im allgemeinen nur für eine bestimmte Objekt- und Bildlage erweitert. Von der Güte dieser erweiterten Abbildung wird die prinzipiell mögliche Schärfe in der Bestimmung der Abbildungskonstanten dann abhängen, wenn wir nur diese Objekt- und Bildlage bei der Ermittelung der Konstanten benutzen. Diese Beschränkung ist möglich, wenn das System für die unendlich ferne Ebene korrigiert ist. Man wird dann wenigstens eine Brennebene, eben die, für die die Korrektion ausgeführt ist, durch eine der oben genannten Pointierungsmethoden bestimmen; und bei derselben Objekt- und Bildlage nach einer der Methoden unter A. auch die Brennweite.

Ist hingegen das System nur für eine endliche Objekt- und Bildentfernung korrigiert, so gibt es nicht nur zur Bestimmung der Brennebene, sondern sogar zur Ermittelung der Brennweite keine Methode, die nicht den Gebrauch des Systems mit solchen Objektlagen nötig machte, für die es nicht korrigiert ist.[1] Entweder gebraucht man es mit zwei endlichen Objekt- und Bildentfernungen oder mit einer endlichen Objekt- und Bildentfernung und außerdem unendlicher

von GAUSS angegebenen. CORNU markiert die Scheitel der der äußersten brechenden Flächen, S_1 und S_2, etwa mit Tusche und benutzt z. B. S_1 gleichzeitig als Bezugsebene (oben D) und Objekt (oben O), so daß nun $DO = a = 0$ und $c' = a'$ wird. Er bestimmt die Abstände der Brennebenen von den nächstgelegenen Marken, also $b_1 = S_1 F = z$, $b_2 = S_2 F' = S_1 F' - S_1 S_2 = z' - S_1 S_2$; und den Abstand zwischen S_2 und dem Bilde S_1' von S_1, $\varepsilon = S_1' S_2$; da $\varepsilon = S_1 S_2 - S_1 S_1' = S_1 S_2 - c = S_1 S_2 - a'$ ist, so geht hier die erste Gleichung (13) über in

$$b_1 (b_2 + \varepsilon) = - f^2 \quad .$$

Dasselbe Prinzip findet sich wieder bei TH. H. BLAKESLEY [Phil. Mag. (5) **49.** 447. 1900]; es wird auch bei dem zu verschiedenartigen schnellen Messungen geeigneten Apparate von R. DONGIER (Journ. d. Phys. **10.** 266. 1901) benutzt.

[1] Die Sonderstellung von Systemen, die für die unendlich ferne Ebene korrigiert sind, ist eine Folge der Tatsache, daß ein Paar konjugierter Ebenen eine Abbildung auch bei $f = \pm f'$ nicht bestimmt, und zugleich der willkürlichen Wahl des Ortes der Brennebene und der Brennweite als der die Abbildung charakterisierenden Konstanten.

Entfernung des Objekts oder Bildes. Man wird dann eine Veränderung der zu bestimmenden Konstanten erhalten, wenn man verschiedene Zonen der Öffnung und wenn man verschiedene Teile des Gesichtsfeldes benutzt. Man nimmt auf diese Variationen am besten Rücksicht, indem man sie bestimmt und durch Rechnung oder graphisch den für den paraxialen Raum gültigen Wert ableitet (Abbe, s. u.). Diese Betrachtung wurde auf die Verzeichnung schon von Grubb (zit. p. 440 u. 471) angewandt.

b) von der instrumentellen Anordnung.

Es kann sich hier nicht darum handeln, die Hilfsmittel zur Ausführung der obigen Methoden vollständig zu diskutieren. Man erkennt leicht, daß zur Ausführung gelegentlicher Messungen, die der berufsmäßige Benutzer eines Instruments ausführen will, ein Instrument derselben Gattung hinreicht, das er nach denselben Verfahrungsweisen benutzen kann, die der Gebrauch des Instruments ohnehin mit sich bringt. So kann ein gut konstruiertes Mikroskop zu Messungen der Brennweiten u. s. w. von Mikroskopobjektiven und Okularen, ein Fernrohr zu der von Fernrohrobjektiven, ebenso eine photographische Kamera für die von Projektionssystemen unter Hinzunahme nur weniger Hilfseinrichtungen mit bestem Vorteil benutzt werden.

Da die Genauigkeit der mechanischen Hilfsmittel hier außer Betracht bleiben muß, so bleiben für eine Diskussion nur die optischen übrig, die bei den aufgeführten Methoden zwei Zwecke verfolgen: Die Lage von Bildern festzustellen auf sie zu pointieren) oder Bilder zu messen.

α) *Die Methoden zur Einstellung und die Bedingungen ihrer Schärfe.*

1. Das Einstellen (Fokussieren, Pointieren) mit bloßem Auge oder mittels eines einfachen oder zusammengesetzten Mikroskops M. Die Ebene, welche der Netzhaut des Auges in bezug auf dieses Mikroskop samt dem optischen Apparat des Auges selbst konjugiert ist, ist die Pointierungsebene. Meist sucht man sie körperlich zu markieren, beim Einstellen mit bloßem Auge durch eine matte Glastafel oder indem man beim einfachen Mikroskop (Lupe) in oder nahe an dessen Brennebene, beim zusammengesetzten Mikroskop in die untere Brennebene des Okulars oder des Augenglases ein Spinnwebfadenkreuz, ein auf einer dünnen Glasplatte mit Diamant eingerissenes Strichkreuz oder für Meßzwecke eine feine Skala anbringt. Diese Marken- oder Mikrometerebene — beim Mikroskop die ihr in bezug auf das Objektiv oder Objektiv plus Kollektiv konjugierte — wird dann als Ort des Bildes angesehen.

Sie ist aber offenbar mit der wirklichen oben definierten Pointierungsebene nur dann identisch, wenn die Einstellung des Systems oberhalb der Marken auf diese und die des Gesamtsystems auf das zu pointierende Bild eine absolut vollkommene ist und während aller Versuche bleibt; also u. a. wenn Schwankungen des Akkommodationszustandes des Auges gänzlich ausgeschlossen sind. Dies ist im allgemeinen natürlich nicht der Fall; daher ist der Ort der Pointierungsebene im allgemeinen verschieden von der Mikrometerebene.

Es ist aber auch der Ort des Bildes im allgemeinen nicht die Pointierungsebene, da jede Einstellung infolge der begrenzten Sehschärfe um einen bestimmten Tiefenraum schwankt. Wir haben früher gesehen (p. 257 ff.), daß die Einstellungsgenauigkeit als Reziprokes der dem Instrument S eigentümlichen und von der Sehschärfe des Auges mit bedingten Fokustiefe direkt proportional ist der mit dem Instrument erzielten absoluten Vergrößerung V, der Tangente des halben Öffnungswinkels auf der Objektseite u, und direkt proportional der Sehschärfe des Auges,

letztere ausgedrückt durch den reziproken Wert des Durchmessers des unter der Grenze der Wahrnehmung bleibenden Zerstreuungskreises ε. Es war der Spielraum der Einstellung beiderseits von der Objektebene (p. 257)

$$2\,\Delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{V \cdot \operatorname{tg} u} \quad (14)$$

Der andere Bestandteil der Einstellungsunsicherheit, vom Akkommodationsvermögen $1 : A$ des Auges herrührend, ergab den Spielraum

$$\Delta_A = \frac{n}{n'} \frac{1}{A V^2} \quad (15)$$

Der letztere fällt bei stärkerer Vergrößerung von selbst mehr und mehr fort. Bei schwachen Vergrößerungen, wo er eine erhebliche Rolle spielen könnte (vgl. die Tabelle p. 260) wird er durch die Anbringung einer Marke im Sehfeld der Lupe oder des Okulars fast völlig eliminiert. Man bringt daher eine Marke auch dann an, wenn sie nicht eigentlich dazu dienen soll, die Einstellungsebene festzulegen.

Nach Gleichung (1) ist die Pointierung eine desto genauere, je größere Beträge die Gesamtvergrößerung und der Öffnungswinkel des zur Einstellung dienenden Hilfssystems M haben.

Hierzu ist jedoch zu bemerken 1. daß der im Pointierungssystem M wirksame Öffnungswinkel natürlich höchstens gleich demjenigen sein kann, welchen das der Messung unterzogene System gemäß den ihm vorhandenen Blenden für den betreffenden Bildort besitzt, 2. daß auch die Vergrößerung des Pointierungssystems aus den p. 348 und 354 angegebenen Gründen nicht unabhängig von dem Öffnungswinkel beliebig gesteigert werden kann, sondern in ziemlich enge von ihm abhängige Grenzen eingeschlossen ist, und 3. daß bei Ableitung der Gleichung (1) die Voraussetzung vollkommen aberrationsfreier Abbildung durch das System S zugrunde gelegt war. Da die letzte Voraussetzung niemals völlig erfüllt ist, so ist der Spielraum der Einstellung auch nicht genau durch jene Gleichung angegeben. Insbesondere aber verträgt infolgedessen das von S entworfene Bild in noch viel geringerem Maße eine weitere Vergrößerung durch M, als ein reales Objekt. In jedem Falle ist zu beachten, daß ein System nur ein Paar aplanatische Punkte besitzen kann, daß daher allenfalls nur bei der Einstellung auf den einen dieser Punkte die volle ihm zugehörige Apertur des Systems wirksam sein darf, bei der Einstellung auf andere Stellen der Achse aber die Apertur von S oder M desto mehr eingeschränkt werden muß, je weiter diese Stellen von den aplanatischen entfernt sind.

Diese Gesichtspunkte sind bei jeder Einstellung auf Bilder mittels anderer Systeme — auch mittels des Auges allein — zu beachten. Im übrigen ist selbstverständlich, daß Lupen mit vor den Linsen gelegener Markierungsebene nur zur Pointierung auf reelle Bilder dienen können und daß man zusammengesetzte Mikroskope mit um so weiter abliegendem Objektpunkt anwenden muß, — die also bei größeren Abständen dieses schon mehr Fernrohre sind — je weiter das zu beobachtende Bild vor der letzten Fläche des Systems S liegt. (Im letzteren Falle verringert sich der Öffnungswinkel und damit die Einstellungsgenauigkeit von M proportional jener Entfernung.)

Soll das Bild im Unendlichen liegen und stellt man daher mit einem Fernrohr darauf ein, so ist der nächste endliche Punkt, der vermöge der Fokustiefe noch nicht unscharf erscheint, um eine Strecke ξ_ε entfernt, die durch

$$\frac{1}{\xi_\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\Gamma \cdot p} \quad (14a)$$

geliefert wird, wenn Γ die Vergrößerung und p die Öffnung des Fernrohres bezeichnet; der

nächste durch die Akkommodation sichtbare ist, wenn ξ_N' den Abstand des Nahepunktes eines emmetropischen Auges angibt, um eine Strecke ξ_A entfernt, die durch

$$\frac{1}{\xi_A} = \frac{1}{\xi_N' \cdot \Gamma^2} \tag{15a}$$

gemessen wird. Hierbei sind ξ_e und ξ_A von der A.-P. des Fernrohres aus gerechnet.

Die oben für die Einstellung auf ein endlich entferntes Objekt gezogenen Schlüsse lassen sich also auf diesen Fall übertragen, wenn man für die angulare Öffnung des Mikroskops die lineare des Fernrohres setzt.

Obwohl die Gültigkeit der Gleichung (14) für die Genauigkeit der Einstellung bestimmend bleibt, soweit die geometrische Auffassung zulässig ist, so macht man doch gewöhnlich von zwei sehr einfachen Verfahren mit großem Vorteil Gebrauch, die man in diesem Zusammenhange als Mittel zur besseren Ausnutzung der Empfindlichkeit des Auges, zur Verkleinerung von ε', auffassen kann, demselben Zwecke, den man auch durch passende Wahl der Objekte (Testobjekte mit scharfen Grenzen zwischen durchsichtigen und undurchsichtigen Stellen) zu erreichen sucht.

Das eine besteht in seitlichen Bewegungen des Auges. Hierdurch wird der Schwerpunkt des Zerstreuungskreises eines nicht eingestellten Punktes nach rechts oder links verlegt, infolge der seitlichen Verlegung der allein oder mit den Blenden des Systems S oder des Mikroskops M als A.-P. wirkenden Augenpupille. Die so entstehende scheinbare Bewegung des nicht eingestellten gegen einen eingestellten Punkt ist auffälliger als das Vorhandensein eines Zerstreuungskreises und ihr Fehlen sicherer als das gleichzeitige scharfe Erscheinen beider Punkte zu konstatieren. Man erkennt aber sofort, daß den Bewegungen der Augenpupille durch die A.-P. des Systems S oder M begrenzt sind, und daher die Gleichung (14), etwa mit einem kleineren ε', gültig bleibt, wenn unter u der maximale Öffnungswinkel der aus M austretenden Büschel verstanden wird.

Ganz ähnlich ist der Vorgang bei den Methoden, wo die Ruhelage eines Bildes gegenüber Drehungen des Systems festgestellt werden soll (p. 446, 447, MOESSARD, DÉVÉ).

Das zweite Verfahren besteht in einer Spaltung des Zerstreuungskreises, die man erhält, wenn man die Mitte der Aperturblende oder ihrer Bilder verdeckt.[1] Sind die seitlich übrigbleibenden Öffnungen klein genug, so erhält man in den Nachbarebenen des wahren Bildortes zwei Bilder, wie dies besonders beim SCHEINERschen Versuch (p. 253) bekannt ist. Auch dieses Auftreten von Doppelbildern ist nur auffälliger als der Zerstreuungskreis und ändert nichts an der Gültigkeit der Gleichung (14) bei passender Bestimmung von ε'.

2. Das HARTMANNsche Einstellungsverfahren[2]. Statt nun nach diesem Verfahren die Stelle aufzusuchen, wo zwei von einem Achsenelement ausgehende exzentrische Strahlenbüschel den kleinsten gemeinsamen Querschnitt haben, kann man auch den Abstand der Mittelpunkte ihrer Zerstreuungskreise in zwei beliebigen Ebenen e_1 und e_2 und die Abstände dieser Ebenen von einem festen Punkte, A_1 und A_2, bestimmen. Der Schnittpunkt liegt dann von dem festen Vergleichspunkt entfernt um

$$A = A_1 + \frac{e_1}{e_1 + e_2}(A_2 - A_1) \quad ,$$

der mittlere Fehler[3] in der Bestimmung von A wird hier, wenn der Fehler in

---

[1] Vgl. H. SCHRÖDER, Die Elemente der photographischen Optik. Berlin 1891. p. 171. Ein von W. STROUD (Phil. Mag. **45.** 91. 1898) vorgeschlagenes Verfahren, sein Telemeter zur Einstellung zu benutzen, dürfte sich den oben besprochenen Grundsätzen ebenfalls unterordnen. — [2] J. HARTMANN, Ztschr. f. Instrumentenk. **20.** 51. 1900. S. a. die weiter unten zitierten Arbeiten von HARTMANN, LEHMANN, WILSING. — [3] J. HARTMANN, Ztschr. f. Instrumentenk. **24.** 11. 1904.

der Bestimmung von e etwa de ist, und wir wie gewöhnlich bei kleineren Öffungsverhältnissen die Fehler von A_1 und A_2 vernachlässigen können

$$dA = \sqrt{\left(\frac{e_1}{e_1 + e_2}\right)^2 + \left(\frac{e_2}{e_1 + e_2}\right)^2} \left(\frac{de}{2 \operatorname{tg} u}\right) \quad , \tag{14c}$$

wenn u wieder der Öffnungswinkel der benutzten Büschel ist; also bei symmetrischer Lage der beiden Schnittebenen zum Bilde

$$dA = 0{,}35 \frac{de}{\operatorname{tg} u} \quad .$$

Der Vergleich mit (14) zeigt, daß der Fehler etwa von derselben Größe ist als der mehrerer gewöhnlicher Einstellungen, wenn $de = \varepsilon / V$, d. h. gleich der Größe des eben noch erkennbaren Zerstreuungskreises. HARTMANN gibt $de = 0{,}008$ mm an[1]; die Gleichung würde für $1 : V = 25$ mm, also zehnfache Vergrößerung und $\varepsilon = 1'$ erfüllt sein. Danach dürfte der Vorteil der Methode, der in neuester Zeit ihre überaus häufige Anwendung veranlaßt hat, weniger in der erhöhten Genauigkeit als darin liegen, daß sie an die Stelle des Aufsuchens einer „Nulllage", einer allgemeinen Regel der Meßtechnik folgend, die Messung benachbarter Werte der zu beobachtenden Größe setzt. Dies ist von besonderem Werte in den Fällen, wo ein stetiges Durchwandern verschiedener Einstellungsebenen überhaupt unmöglich ist, nämlich wenn man Bilder für die photographisch wirksamen Wellenlängen einstellen will, wo das Auge versagt und man bisher auf eine möglichst dichte, aber unstetig fortschreitende Reihe von Einstellungen angewiesen war. Im Zusammenhange mit der Möglichkeit der photographischen Festlegung der Abstände e_1 und e_2 steht der andere Vorteil, durch zwei Aufnahmen gleichzeitig verschiedene Zonen, ja diese auch für verschiedene Azimute oder für verschiedene Farben untersuchen zu können, wodurch die mit dem Hintereinander der Einstellungen verbundenen, für Differenzenmessungen besonders gefährlichen Fehler fortfallen (vgl. unten: Methoden zur Prüfung der Korrektion). Übrigens wird auch die optische mikrometrische Ausmessung von e_1 und e_2 mit Erfolg ausgeführt. Der wichtigste Vorteil der Methode, die Kleinheit des benutzten Teiles der Systemöffnung, kommt ebenfalls erst bei der Untersuchung der Korrektion in Betracht.

3. Untersucht die HARTMANNsche Einstellungsmethode die Lichtverteilung bereits in intra- und extrafokalen Ebenen, so stellt die FOUCAULTsche für eine spezielle Anwendung bereits genannte Schneidenmethode die vollständige Vertauschung von Öffnung und Bild (von A.-P. und A.-L., p. 217) vor, indem das Bild eines leuchtenden Elements dadurch definiert wird, daß es die gemeinsame Basis der von den Punkten der A.-P. ausgehenden Büschel bildet. Benutzt man das Bild als Blende für ein Auge, das nach der Öffnung hinsieht, so muß beim Bedecken dieser Blende, etwa durch Verschieben einer Schneide, eine gleichmäßige Schwächung, und wenn das Bild sehr klein ist, ein gleichzeitiges Verlöschen des Leuchtens der ganzen Öffnung herbeigeführt werden. Liegt die Schneide nicht im Bilde, so tritt bei ihrem Vorschieben eine einseitige Verdunkelung der Öffnung ein, die sich von der Seite her als ein Schatten vorschiebt, und zwar im gleichen Sinne wie die Schneide, wenn diese zu nahe, im entgegengesetzten, wenn sie zu weit von der Öffnung entfernt ist. Je kleiner das Bild ist, desto schärfer begrenzt erscheint der Schatten. Auch diese Pointierungsmethode ist besonders für die Bestimmung der Korrektion wichtig geworden und wird dort wiederum (samt einer Art von Umkehrung der FOUCAULTschen Anordnung) besprochen werden.

---

[1] Freilich für die photographische Benutzung der Methode, wo der Vergrößerung auch durch das Korn der Platten eine Grenze gesetzt wird. Wie hoch man bei direkter optischer Ausmessung der Größen e_1 und e_2 mit der Vergrößerung gehen darf, ist mir nicht bekannt.

β) Die Genauigkeit der Ausmessung optischer Bilder

ist bereits früher (p. 229—231) vollständig diskutiert worden. Der mögliche Fehler entsteht durch die oben diskutierte Einstellungsungenauigkeit, wenn die Hauptstrahlen, die Achsen der bildformierenden Büschel, gegen die Systemachse geneigt sind. Das Aushilfsmittel war die „telezentrische" Einrichtung des Strahlenganges, die in unserem Falle auf der Bildseite hergestellt werden muß: Die bildseitigen Hauptstrahlen müssen der Achse parallel sein. Anderenfalls ist der entstehende Fehler durch die Formeln (1) und (2) von p. 230 gegeben.

Der Apparat und die Methoden zur Brennweitenbestimmung von Abbe[1].

Die Betrachtungen über die Fehlerquellen, die sich ABBE[2] aus seiner Theorie der Strahlenbegrenzung ohne weiteres ergaben, führten ihn dazu, für die Konstruktion seines Apparates die folgenden Gesichtspunkte aufzustellen:

1. Die Messung darf nicht abhängig gemacht werden von der Auffassung des Ortes eines optischen Bildes — wegen des unvermeidlichen Spielraumes, der bei solchen Einstellungen bestehen bleibt und desto größer ist, je mehr man das System abblendet, um dessen Aberrationen zu reduzieren und die für die zentrale Zone geltenden Faktoren zu erhalten (gemäß dem p. 451) Ausgeführten).

2. Es darf auch indirekt die Messung nicht von einer Einstellung abhängig, der Strahlengang muß nach der Bildseite telezentrisch sein, indem eine im vorderen Brennpunkt des Systems befindliche axiale Blende die Hauptstrahlen der austretenden Büschel der Systemachse parallel macht. Es ist dann die Größe des Bildes gänzlich unabhängig von der Stelle, an welcher es — scharf oder unscharf — eingestellt wird.

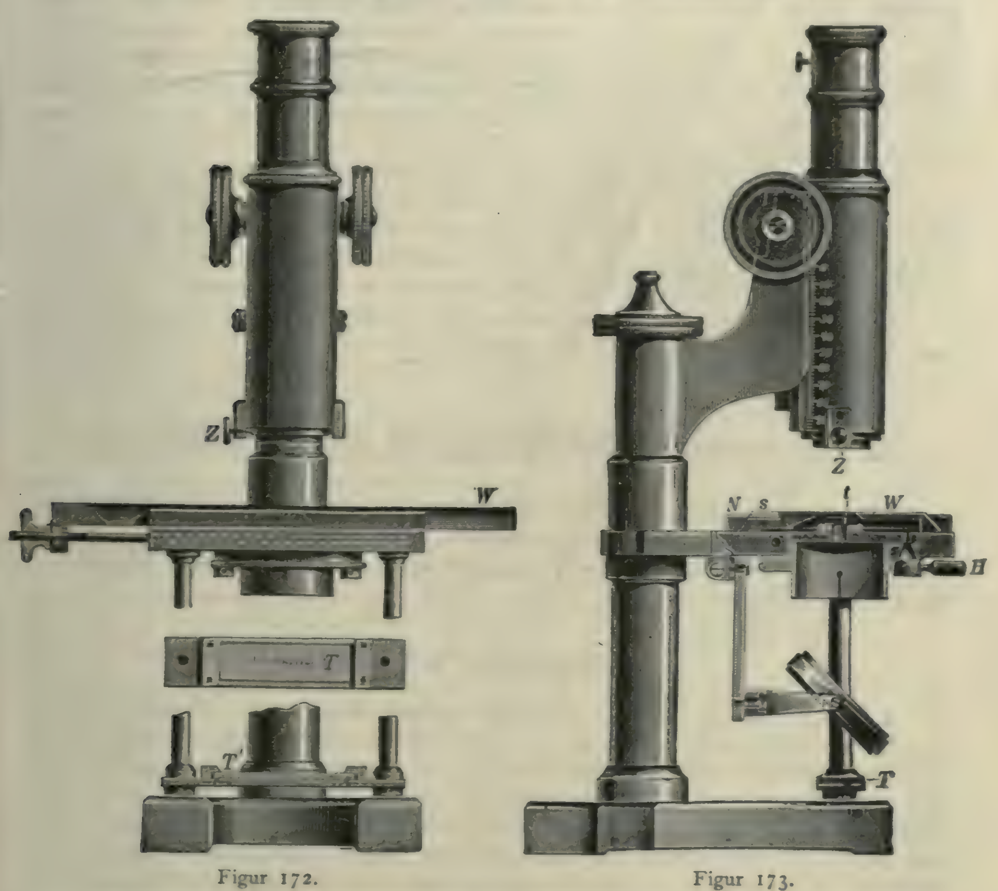
3. Da die dioptrischen Konstanten eines Systems (Vereinigungsweiten, Vergrößerung) im allgemeinen von Zone zu Zone variieren, das zu zweit genannte Element auch noch mit der absoluten Größe des Bildes bezw. Objekts selbst (Verzerrung), so ist es notwendig, diese Variationen zu ermitteln, indem man der Messung an jeder Stelle der Achse verschieden große Bilder unterwirft und den Fundamentalwert der Vergrößerung, der der zentralen Zone des Bildes und der Öffnung entspricht, durch Rechnung ableitet.

Diesen Anforderungen entsprechend gründet sich die Methode von ABBE wie die oben unter (6a) angeführte auf die Bestimmung der Vergrößerungen, welche ein System in gegebener Lage bei telezentrischem Strahlengang von zwei auf derselben Seite in genau meßbarer Entfernung von einander befindlichen Skalen entwirft. Der telezentrische Strahlengang wird hierbei nicht durch eine Blende in dem — von vornherein ja unbekannten — Brennpunkt des Systems erreicht, sondern dadurch, daß das Bild durch ein Hilfsmikroskop beobachtet wird, dessen Achse parallel der des Systems verschoben wird. Diese letztere Parallelverschiebung ermöglicht die Beobachtung des Bildes in größerer Ausdehnung als irgend ein feststehender optischer Apparat sie gestatten würde. Da jedoch ihre Verwirklichung in mechanischer Beziehung große Schwierigkeiten verursachen und eine komplizierte Konstruktion notwendig würde, so ist der Ausweg gewählt, daß nicht das Mikroskop parallel über das zu untersuchende System hingeführt, sondern umgekehrt dieses in einem Schlitten unter dem Mikroskop fortgeführt wird, wobei die Skalen ebenfalls ihre Lage zum Beobachtungsmikroskop behalten. Diese Veränderung vermeidet die angedeutete Schwierigkeit unter Anwendung sehr geringer mecha-

[1] S. CZAPSKI, Ztschr. f. Instrumentenk. **12.** 185. 1892. — [2] E. ABBE, Sitzber. Jen. Ges. f. Med. u. Naturw. 1878; Ges. Abhandl. **1.** 165. Jena 1904.

nischer Hilfsmittel vollständig und verursacht nur eine geringfügige Änderung in den Formeln für die Berechnung der Vergrößerung.

Der Apparat besteht demgemäß in der Form, in welcher er von der optischen Werkstätte von C. ZEISS in Jena fabrikmäßig ausgeführt wird, im wesentlichen in einem Mikroskop größeren Modells mit ausziehbarem Tubus, dessen



Figur 172.
Das ABBEsche Fokometer (Vorderansicht).

Figur 173.
Das ABBEsche Fokometer (Seitenansicht).

Tisch *W* eine in Schlittenführung von rechts nach links um meßbare Beträge (Skala *s*, Nonius *N*, Ablesung auf 0,02 mm) beweglich ist. Nahe unter der Tischebene befindet sich eine mittels Hebels *H* beiseite zu schlagende fein (auf 0,1 mm) geteilte Glasskala *t*, oberhalb des Fußes eine zweite, gröber geteilte (0,5 mm) *T*; die Entfernung beider (ca. 100 mm) wird vom Verfertiger ein für allemal oder mittels eines beigegebenen Tiefentasters vom Beobachter bestimmt. Dem Mikroskop sind fünf Objektive beigegeben, die gestatten, unter Zuhilfenahme des Tubusauszugs auf alle Entfernungen von der Tischebene bis Unendlich einzustellen, so daß stets das von dem System entworfene Bild auch der unteren Skala beobachtet werden kann.

Die Einrichtung dieses Fokometers, welches in der ausgeführten Form und unter Benutzung der beschriebenen Methode zunächst für Linsen von etwa 20 bis 100 mm Durchmesser bestimmt ist — in größeren Dimensionen für entsprechend größere — ist eine derartige, daß auch die Bestimmung von Systemen kürzerer Brennweite, z. B. der Okulare und Objektive von Mikroskopen, nach den oben

genannten für solche Systeme geeigneten Methoden auf das bequemste ausführbar ist. Dazu hat das Tubusauszugsrohr eine Millimeterteilung erhalten, die die Gesamtlänge des Tubus, von der unteren Ansatzfläche des Objektivgewindes bis zum Auflagerand der Okulare, angibt, und auch der Haupttubus trägt eine Teilung, die an festem Index die axiale Verschiebung des Gesamttubus zu messen gestattet. Diese Verschiebung kann außerdem innerhalb kleinerer Intervalle (5 mm) durch die mit geteiltem Kopfe versehene Mikrometerschraube, die zur feinen Einstellung dient, sehr genau gemessen werden (0,003 mm). Die Brennweite von Systemen mittlerer Dimension (etwa 50 mm Öffnung) kann mittels des Apparates bei wenigen Wiederholungen leicht mit einer Genauigkeit von 0,1 % bestimmt werden.

Für größere Objektive (von 100—500 mm Durchmesser) ist ein auf denselben Prinzipien beruhendes Fokometer von O. LUMMER[1] konstruiert und von C. BAMBERG in Friedenau ausgeführt worden. Hierbei mußte auf die Vorteile der Verschiebung des Objektivs verzichtet und das Mikroskop verschiebbar gemacht werden, um die Tischplatte nicht allzugroß werden zu lassen.

Auf die Verwendung des Apparates zur Bestimmung von Vergrößerungen und Aperturen ist im folgenden hingewiesen.

III. Die empirische Bestimmung der Strahlenbegrenzung.

Nächst der Bestimmung der Grundfaktoren ist es die der Strahlenbegrenzung, die bei optischen Instrumenten interessiert, also erstens die Bestimmung der Apertur und zweitens die des Gesichtsfeldes, mit der die der Vergrößerung Hand in Hand geht.

1. Die Bestimmung der Apertur.

1. Wenn die wirksamen Büschel auf der einen Seite nahezu parallelstrahlig sind, so ist es notwendig und genügend, auf dieser Seite die lineare Größe der wirksamen Öffnung zu ermitteln. Liegt diese Öffnung außerhalb des Linsensystems, so hat man einfach mit einem geeigneten Meßwerkzeug (Maßstab, Schublehre oder dgl.) ihren Durchmesser zu bestimmen. Am genauesten geschieht dies natürlich mit einem Komparator. Als solcher kann bis zu Dimensionen von 10 mm der oben beschriebene Brennweitenmeßapparat von ABBE ohne weiteres benutzt werden, indem man das System S mit der Blende nach oben annähernd zentrisch auf den Schlitten W legt und mit dem mit Fadenkreuz versehenen Mikroskop erst auf den einen und dann, durch entsprechende seitliche Verschiebung des Schlittens, auf den anderen Rand der Blende einstellt. Die Differenz der Ablesungen des Nonius N an der mit dem Schlitten verbundenen Skala s ist dann unmittelbar gleich der Größe der Verschiebung des Schlittens, d. i. gleich dem Durchmesser der Blende.

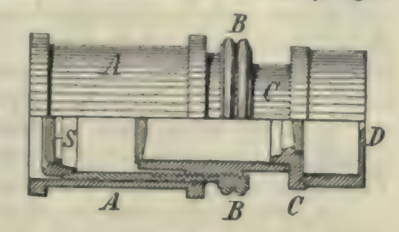
Das letzte Verfahren ist auch dann in unveränderter Weise anwendbar, wenn die betreffende Blende zwischen den Linsen liegt, also ihr vom davorliegenden Teil des Systems entworfenes Bild die Eintrittspupille des Systems bildet. Ist jetzt das Mikroskop des Fokometers auf das durch das System S hindurch erscheinende Bild der Blende scharf eingestellt, so ergibt genau das gleiche Verfahren wie bei außerhalb liegender Blende den Durchmesser der Eintrittspupille in diesem Falle. Da das Mikroskop der Achse des Systems parallel

[1] O. LUMMER, Optik, 2. Band von MÜLLER-POUILLETS Lehrb. d. Physik. Braunschweig 1897. p. 877.

bleibt, so wird hierbei das Bild der Blende sogar mit dem richtigen Strahlengang gemessen, indem die Hauptstrahlen bei der Messung identisch sind mit den bildformierenden Strahlen beim Gebrauch des Systems und umgekehrt.

Dies Verfahren zur Bestimmung der Eintrittspupille bei Systemen von mittleren und größeren Dimensionen (z. B. photographischen Objektiven) ist so einfach, daß wir die anderen zu dem gleichen Zweck vorgeschlagenen füglich ganz übergehen können.

Bei sehr kleinen Dimensionen des zu untersuchenden Systems oder seiner Blende, kann die Messung ihres wirklichen Durchmessers oder desjenigen ihres durch den über ihr liegenden Teil des Systems entworfenen Bildes besser mikrometrisch bei feststehendem Mikroskop erfolgen. (Natürlich wird man hier vorteilhaft wieder am Objektiv des Mikroskops eine Blende in dessen hinterem Brennpunkt anbringen, um es nach vorn telezentrisch zu machen und auf diese Weise die aus ungenauer Einstellung entspringenden Fehler in der Bestimmung der Größe der Blende möglichst auszuschließen).



Figur 174.
Das RAMSDENsche Dynameter (oder Dynamometer?).

Man stellt zuerst mit der (durch die Blende *D* nach vorn telezentrisch gemachten) Lupe *C* auf die feine Skala *S* scharf ein. Dann bringt man diese Skala zur Koinzidenz mit der Austrittspupille, indem man die Hülse *B* gegen *A* verschiebt, während man den äußeren Rand von *A* gegen das Okular des zu untersuchenden Fernrohres schwach angedrückt hält.

So wird die Blende oder das Blendenbild, wenn sie im zugänglichen Raumteile liegen, oft mittels des RAMSDENschen Dynameters gemessen. Eine Diskussion der Fehler von Dynametermessungen und die Beschreibung eines von S. CZAPSKI herrührenden Mikroskopdynameters, das in den Fällen zur Anwendung kommt, wo die A.-P. nicht zugänglich ist, oder wo überhaupt ein nicht zugängliches Blendenbild gemessen werden soll, wie z. B. beim Mikroskop mit negativem Okular oder holländischen Fernrohr s. bei KELLNER, Ztschr. f. Instrumentenk. **20.** 43. 1900.

2. Die angulare Apertur — in ihrem rationellen Maß als numerische Apertur — auf der Objekt- oder Bildseite kann so gemessen werden, daß man den Durchmesser der Eintritts- oder Austrittspupille und die Entfernung des Objekts oder Bildes von ihr bestimmt. Die Anhaltspunkte für ein solches Verfahren sind in dem Voranstehenden bereits vollständig gegeben. Bei Systemen von größerer Dimension; wie den Objektiven von Fernrohren und den photographischen Systemen, dürfte dieses Verfahren das angemessenste sein. Bei Systemen von kleinen Dimensionen aber ist es in den meisten Fällen einfacher, bei sehr kurzen Brennweiten ist sogar kaum etwas anderes möglich, als diese Apertur unmittelbar nur nach dem Sinus des Sehwinkels zu bestimmen, unter welchem die Pupille von O oder O' aus erscheint.

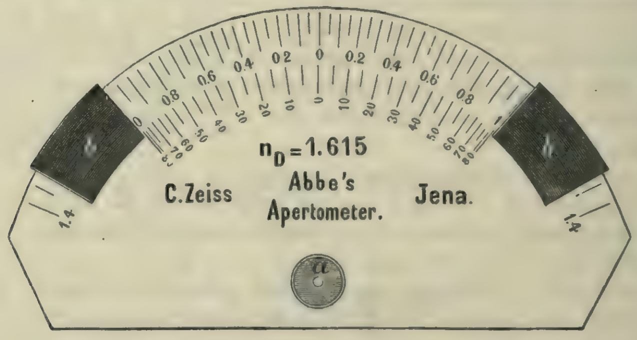
a) Bei Aperturen unter 0,5 kann man zu diesem Zweck nach folgendem Prinzipe verfahren: Man läßt die im System vorhandene Begrenzung sich durch den zentralen Teil des Objekts bezw. Bildes virtuell auf eine beliebig angenommene äußere Fläche projizieren und bestimmt Durchmesser und Entfernung dieser Projektion.

In gemessener Entfernung von dem Punkt, in bezug auf den die Apertur bestimmt werden soll — also bei Mikroskopobjektiven dem mittleren Objekt, bei photographischen Systemen und astronomischen Objektiven dem Bildpunkt — wird eine zur Achse des Systems senkrechte Skala angebracht. Es handelt sich dann nur darum, zu beurteilen, in welcher Ausdehnung diese Skala durch das System kraft der in diesem vorhandenen Begrenzung abgebildet wird mit

Strahlenbüscheln, welche sich im mittleren Objektpunkt kreuzen[1]. Zu diesem Zwecke muß also entweder in der Objektebene eine wirkliche Blendscheibe mit zentralem Loch angebracht sein oder eine Blende optisch daselbst eingeführt werden. Das letztere kann, wie wir früher sahen, in einfacher Weise dadurch geschehen, daß eine Blende in der dem Objekt in bezug auf das System konjugierten Ebene angebracht wird. Bei Mikroskopsystemen z. B. geschieht dies, indem man das Bild der Skala über dem System S vom oberen Ende des Tubus aus beobachtet. Die Pupille des Auges ist dann die an richtiger Stelle befindliche Blende. Oder man beobachtet jenes Bild mit dem Hilfsmikroskop, dessen Objektiv nach der Objektseite nahezu telezentrisch gemacht ist, genauer: dessen Blende in bezug auf sein Objektiv samt dem System S der Objektebene konjugiert ist[2]. Bei einem System, welches nach der anderen Seite hin mit parallelen Strahlenbüscheln benutzt wird, wie ein Fernrohrobjektiv oder photographisches System, wird das Bild der Skala auf dieser Seite ebenfalls am besten mittels eines seinerseits nach der Objektseite telezentrischen Hilfssystems beobachtet, z. B. in der durch das Abbesche Fokometer gegebenen Einrichtung.

Aus dem Durchmesser des durch das System S abgebildeten Teils der Skala und ihrer Entfernung vom Objektpunkt kann dann zunächst die Tangente und aus dieser weiter der Sinus des halben Winkels berechnet werden, unter welchem die Skala von hier aus erscheint.

b) Bei Aperturen, welche über 0,5 gehen, ist es bequemer und genauer, bei Aperturen über 1,0 sogar unerläßlich, von der virtuellen Projektion der im

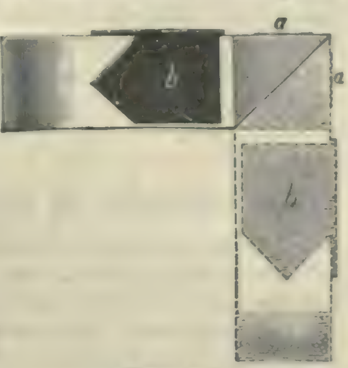


Figur 175.

System vorhandenen Blende auf eine im äußeren Luftraum gelegenen Schirmebene abzusehen und statt Luft ein Medium von höherem Brechungsindex einzuführen. Man erreicht dies dadurch, daß man unter dem Tisch des Mikroskops — um die Objektive von solchen kann es sich jetzt allein noch handeln — eine Halbkugel von bekanntem Index mit der planen Seite nach oben zentrisch befestigt und die Änderung des Winkels in Anschlag bringt, welche die von den Punkten der Skala ausgehenden Strahlen durch Brechung in der Halbkugel erfahren[3]. Vorzuziehen ist die Anwendung eines Apparates, bei welchem einerseits das Zentrum der Winkelmessung genau markiert ist und andererseits die Richtungen der Strahlen sicherer bestimmt sind als durch Brechung der entfernten Skala an der Halbkugel im obigen Falle. Einen solchen Apparat erhält man[4] nach Abbe folgendermaßen (Figur 175 und 176).

[1] Die Grenzen des abgebildeten Skalenbereichs müssen durch deutliche Marken, die man langsam nach außen verschiebt, gekennzeichnet werden, etwa durch die Ränder geschwärzter Blechscheiben oder dgl. — [2] s. E. Abbe, Journ. Roy. Micr. Soc. **3.** 20. 1880; deutsch in Abbes Ges. Abh. I. p. 227. — [3] Derselbe, l. c. p. 30. H. L. Smith, Am. Quart. Micr. Journ. **1.** 194. 1879 — [4] Carl Zeiss, Description of Prof. Abbes Apertometer etc.; Journ. Roy. Micr. Soc. **1.** 19. 1878; übersetzt in E. Abbe, Ges. Abh. I. p. 113. s. auch E. Abbe, l. c.

Auf einer überhalbkreisförmigen Zylinderscheibe wird der Mittelpunkt *a* durch ein in Silber ausgekratztes kleines Loch markiert, nahe der Peripherie die diesem Zentrum entsprechende Teilung, ebenfalls auf der Planfläche der Scheibe, aufgetragen. Die von ZEISS in Jena gefertigten Apparate tragen eine solche nach der numerischen Apertur fortschreitende Teilung — wie sie sich aus dem Winkel der Strahlen innerhalb des Glases und dessen Brechungsexponenten berechnet — und eine zweite nach innen gelegene, die die den Glaswinkeln entsprechenden Luftwinkel angibt. An der Platte lassen sich zwei aus schwarzem Blech gebogene Indizes *b* verschieben, deren Form Figur 176 genauer zeigt. Ihre geradlinige Kante dient zur Ablesung der Teilung. Die an der Zylinderwand anliegende in derselben vertikalen Ebene liegende Spitze dient als Objekt für die Beobachtung in der hinteren Brennebene des Mikroskopobjektivs. Ein Bild von ihr wird dadurch in das System übergeführt, daß an dem Durchmesser der Scheibe unter 45° eine Facette angeschliffen ist (siehe Figur 176), durch die die von der Peripherie horizontal auf sie fallenden Strahlen nach oben gespiegelt werden. Durch die Spiegelung an dieser Facette entsteht eine virtuelle, vertikal nach unten liegende Halbzylinderscheibe (in der Figur gestrichelt).



Figur 176.
Die Apertometerplatte von der Seite gesehen. Der gestrichelte Teil ist das an der Facette gespiegelte Bild der Platte.

Das Verfahren mit diesem Apparat ist nun folgendes:

Man legt die halbkreisförmige Apertometerplatte, mit der Teilung nach oben, auf den Objekttisch des Mikroskops und stellt mit dem zu untersuchenden Objektiv — wenn es ein Immersionssystem ist, nach Zwischenfügung der Immersionsflüssigkeit — auf das kleine Loch in dem kreisförmigen Silberscheibchen mit einem beliebigen Okular grob ein. Die Tubuslänge muß bei dieser Einstellung dieselbe sein, mit der man das System im gewöhnlichen Gebrauche benutzt.

An den Rand der Apertometerplatte und zwar nahe der Mitte des Halbkreises legt man bie beiden Indizes, und zwar so, daß die mit einer Spitze versehenen Seiten an dem vertikalen, zylindrischen Rand, die anderen, geradlinig begrenzten, an der ebenen Oberfläche der Platte anliegen, wobei am besten die Spitzen von einander weg, nach außen gekehrt sind, wenn das zu untersuchende System relativ stark ist (numerische Apertur größer als 0,6—0,7), oder zu einander, nach innen, wenn das System schwächer ist.

Nun schraubt man in das untere Gewinde des Tubusauszugs das dem Apparat beigegebene Hilfsobjektiv, dessen mit einem Diaphragma geschlossenes Rohr hierbei in das Innere des Tubus zu liegen kommt. In das andere Ende des Auszugs steckt man ein Okular und stellt mit dem so erhaltenen Hilfsmikroskop durch Hineinschieben in den Haupttubus auf das in ihm erscheinende Bild der Indizes ein.

Man verschiebt nun die Indizes — stets darauf achtend, daß sie an der Platte möglichst gut anliegen — bis ihre Spitzen die Peripherie des hellen Kreises von innen bezw. außen eben berühren. Wenn nötig, korrigiert man noch die Einstellung des Hilfsmikroskops so, daß die Indexspitzen und der Rand des hellen Kreises etwa gleich scharf werden. Ist auf diese Weise die richtige Stellung der Indizes erreicht, so liest man bei beiden die Lage derjenigen oberen Blechkante, welche mit der Spitze in derselben Vertikalebene liegt, an einer der beiden Skalen auf der Glasplatte ab. Die halbe Summe der beiden Ablesungen an der äußeren, dem Rande näher liegenden Skala, ist dann der gemessene Wert der numerischen Apertur des untersuchten Objektivs. Die Summe der beiden Ablesungen an der inneren, Gradskala, ist der Wert des Öffnungswinkels in Luft (oder sein Wert auf Luft bezogen).

Will man sich für die Bestimmung niedriger Aperturen (unter 0,4 oder 50°) — denen gewöhnlich auch entsprechend lange Brennweiten (7 mm und mehr) zugehören — auch des Apertometers bedienen, so stellt man die Beobachtung der Indexbilder u. s. w. ohne Hilfsmikroskop, mit bloßem Auge an. Man entfernt also, nach der Einstellung des Mikroskops auf das Loch in der Silberschicht, das Okular und bringt an seiner Stelle ein Scheibchen aus Blech oder Pappe mit einem kleinen axialen Loch an, um eine konstante zentrale Stellung des Auges zu erreichen, mit welchem man dann durch dieses Loch einfach nach dem Objektivsystem hinsieht.

c) Ein drittes Verfahren endlich zur Bestimmung der Apertur besteht darin, daß man erst die Brennweite des Systems S nach einer der hierfür angegebenen Methoden bestimmt. Mißt man dann mittels eines Hilfsmikroskops die Größe des Kreises, welcher bei voller Beleuchtung als lichte Öffnung des Systems über demselben erscheint, mikrometrisch, so folgt aus diesem, $2p'$, und der Brennweite, f', des Systems dessen Apertur a gemäß Gleichung (5a), p. 235,

$$a = \frac{p'}{f'} \quad .$$

2. Die Bestimmung des Sehfeldes und der Vergrößerung virtueller Bilder.

Die Bestimmung des linearen Sehfeldes sowohl als der linearen Vergrößerung bei Projektionssystemen, also in reellen Bildern auf Schirmen, bedarf keiner Erläuterung; wir wollen uns daher hier ausschließlich mit ihrer Bestimmung bei den zu subjektivem Gebrauch dienenden Instrumenten beschäftigen. Die Verfahren zur Bestimmung des Sehfeldes hängen eng mit denjenigen zur Bestimmung der Vergrößerung zusammen. Wir wollen zuerst die Bestimmung der Vergrößerung betrachten. — Daß man die Vergrößerung eines Mikroskops (seine Brennweite) oder Fernrohres in früher erörterter Weise durch Ermittelung der Brennweiten und Lage der Brennpunkte der Bestandteile erhält, braucht hier nicht nochmals auseinandergesetzt zu werden.

a) Ein Verfahren, mehr zur Schätzung als zur Messung, ist dasjenige, welches die ersten wissenschaftlichen Benutzer des Fernrohres[1] und zusammengesetzten Mikroskops[2] anwendeten:

Beim Fernrohr ist dies Verfahren folgendes: Blickt man mit dem einen Auge durch das Instrument auf einen Gegenstand von periodischer Struktur (Gitter, Zaun, Mauerwerk oder dgl.) und mit dem anderen gleichzeitig auf denselben Gegenstand ohne Instrument, so kann man durch scheinbare Übereinanderlegung des Bildes und Gegenstandes feststellen, wieviel Elemente des einen auf eine bestimmte Anzahl Elemente des anderen fallen. Das Verhältnis beider Zahlen ist die angulare Vergrößerung. Eine Modifikation dieses Verfahrens ist von WALTENHOFEN[3] angegeben worden, die es im Laboratorium auszuführen erlaubt. Sie ist jedoch ebenfalls nicht bei Messungen anwendbar, an welche einige Ansprüche in bezug auf Genauigkeit gestellt werden.

Achtet man darauf, auf einen wie großen Teil des Gegenstandes sich bei dieser Beobachtungsweise die Begrenzung des Sehfeldes (das Bild der Sehfeldblende) projiziert, so kann man aus der Größe und Entfernung des Gegenstandes auch die angulare Größe des Sehfeldes berechnen.

Beim Mikroskop benutzt man als Objekt am besten ein solches von bekannten absoluten Dimensionen, z. B. ein Objektmikrometer. Indem man dann wieder darauf achtet, wieviel Teile dieses, durch das Instrument gesehen, sich auf eine in bestimmter Entfernung gehaltene mit dem anderen, unbewaffneten, Auge betrachtete Skala von ebenfalls bekannter Teilung projizieren, erhält man das in der Ebene der Teilung stattfindende lineare Vergrößerungsverhältnis. Ist die Entfernung der Skala hierbei gleich k mm, so ist die in der normalen Entfernung $l = 250$ mm stattfindende lineare Vergrößerung im Verhältnis von $l:k$ größer als jene in der Entfernung k stattfindende.

b) Genauer werden beide Verfahren, wenn man die Projektion des virtuellen Bildes auf den Schirm nicht mit dem anderen Auge ausführt, dessen Haltung niemals ruhig genug ist, sondern mit demselben Auge mit Hilfe einer Spiegelvorrichtung, wie sie zum Zeichnen von virtuellen Bildern dient.

---

[1] G. GALILEI, Nuncius sidereus. p. 11. — [2] HOOKE, Micrographia. — [3] WALTENHOFEN, CARLS Repert. f. exper. Physik. 8. 184. 1872.

Bei diesen Vorrichtungen (Zeichenapparat, *Camera lucida*), die zuerst von WOLLASTON, AMICI und SÖMMERING vorgeschlagen und konstruiert worden sind, wird in die Austrittspupille eine unter 45° gegen die Achse geneigte spiegelnde Fläche eingeschaltet. Entweder eine solche, die etwa die Größe dieser Austrittspupille hat, jedenfalls aber kleiner ist als die normale Augenpupille, so daß das Bild durch die Spiegelung an jener Fläche, ein außen befindliches Objekt (Schirm, Skala) aber direkt durch die rings um den Spiegel herum in die Pupille des Auges eintretenden Strahlen gesehen wird (SÖMMERINGS Spiegel). Oder es wird umgekehrt in der Belegung eines etwas größeren Spiegels ein zentrales Loch ausgekratzt, welches kleiner als die Augenpupille ist und das Licht der A.-P. des Instruments ganz oder teilweise zum Auge gelangen läßt; dann sieht man das Bild durch dieses Loch hindurch direkt an, den äußeren Schirm durch Vermittelung der Spiegelung (ABBEscher Zeichenapparat). Bei anderen solchen Apparaten wird mit einem Spiegel oder Reflexionsprisma die Austrittspupille bis zur Hälfte bedeckt, so daß man das Bild durch die freie Hälfte hindurch, den Schirm mittels der Spiegelung sieht (oder umgekehrt). Bei einer letzten Klasse endlich wird ein halbdurchsichtiger Spiegel (Neutralglas, dünnes Glasplättchen) vor die ganze Austrittspupille gestellt, so daß man das Bild durch partielle Reflexion an diesem Spiegel, den Gegenstand durch ihn hindurchscheinend sieht (oder abermals umgekehrt).

Bei allen diesen Vorrichtungen wird also das virtuelle vom System gelieferte Bild seinerseits virtuell in die Ebene eines außerhalb liegenden Schirmes projiziert. In diesem kann man die Dimensionen des Bildes genauer markieren, z. B. auch das Bild erst nachzeichnen und hinterher ausmessen. Kennt man noch die Entfernung des Schirmes von der Austrittspupille, so berechnet sich beim Fernrohr der Sehwinkel des Bildes oder der Gesichtsfeldblende, das scheinbare Gesichtsfeld, beim Mikroskop die in der nämlichen Entfernung statthabende lineare Vergrößerung[1].

Die Anwendung dieser Methode auf KEPLERsche und holländische Fernrohre, die dazu dienende mechanische Einrichtung und eine Diskussion der Fehler der Methode s. in KELLNERS[2] Zusammenstellung von Methoden zur Konstantenbestimmung beim Fernrohr, wo hauptsächlich auf genaue und schnelle Prüfung fabrikmäßig hergestellter Instrumente Rücksicht genommen wird.

c) GAUSS bestimmte mittels eines Theodoliten die angulare Größe eines geeigneten sehr entfernten Objekts einmal direkt und dann durch das umgekehrte Fernrohr hindurch. In diesem erscheint das Bild dann so viel Mal verkleinert, als das Fernrohr im gewöhnlichen Gebrauch vergrößert.

Da aber bei diesem Verfahren das Fernrohr mit ganz anderer Strahlenbegrenzung in Anspruch genommen wird, als für die es eingerichtet ist, so werden Aberrationsrechte erheblichen Einfluß auf das Resultat gewinnen müssen[3].

d) Endlich kann bei Teleskopsystemen die Bestimmung auch auf den Satz von LAGRANGE, auf die metrischen Beziehungen gegründet werden, welche zwischen Pupille und Blende in solchen Systemen statthaben (p. 234, 388). Wir fanden a. a. O., daß bei Systemen, die beiderseits von Luft begrenzt sind, die angulare Vergrößerung gleich dem Verhältnis der linearen Durchmesser von Eintritts- und Austrittspupille ist, $\Gamma = p/p'$. Mißt man also nach dem oben angegebenen Verfahren die Eintrittspupille und, am einfachsten mittels des hierzu von seinem Erfinder vorgeschlagenen RAMSDENschen Dynameters (s. o. p. 457) die Austrittspupille des Teleskops, so ist ihr Verhältnis gleich der angularen Vergrößerung.

[1] J. F. v. JACQUIN, BAUMGARTNER u. v. ETTINGHAUSENS Ztschr. **4**. 1. 1828, hat diese Methode wohl zuerst angewandt. — [2] H. KELLNER, Ztschr. f. Instrumentenk. **20**. 1. 33. 1900. In dieser Arbeit ist auf die Augendrehung (p. 267, 393) noch keine Rücksicht genommen. — [3] Die Anwendung eines Spektrometerfernrohres ist zwar methodisch einwandsfrei, aber praktisch unbequem, außer bei vorhandenen Hilfseinrichtungen, s. folgende Seite.

Eine nicht zu vernachlässigende Vorsicht namentlich bei terrestrischen Fernrohren ist bei diesem Verfahren, daß man sich durch Betrachtung der Eintrittspupille mit der Lupe (z. B. mit dem Dynameter selbst) davon überzeugt, ob die äußere Objektivfassung wirklich die Eintrittspupille vorstellt, und nicht etwa weitere innerhalb des Systems angebrachte Blenden die Apertur begrenzen. Man setzt daher vorteilhaft vor die Öffnung des Objektivs nach einander mehrere Blenden von verschiedenem bekannten Durchmesser und mißt die Größe ihres Bildes in der Austrittspupille. Das Vergrößerungsverhältnis der Pupillen muß dann in einem aplanatischen System unabhängig von ihrer absoluten Größe konstant sein.

Zur Messung des wahren und scheinbaren Gesichtsfeldes von Fernrohren sind in der zitierten Kellnerschen Arbeit noch einige Methoden und Apparate angegeben und diskutiert, die ihrerseits wieder natürlich auch zu Bestimmungen der Vergrößerung führen:

e) Das wahre Gesichtsfeld des Fernrohres kann man nach Kellner ermitteln, indem man durch einen Kollimator eine Skala ins Unendliche abbildet und mit dem Fernrohr betrachtet.

f) Das scheinbare Gesichtsfeld eines Keplerschen Fernrohres erhält man nach Abbe, indem man in gemessener Entfernung von seiner A.-P. eine Skala aufstellt, diese, wie bei Gauss, vom Objektiv aus betrachtet, aber vorher noch ein zweites Fernrohr einschiebt, durch das man in der gewöhnlichen Richtung sieht; hierdurch wird erreicht, daß das zu untersuchende Fernrohr mit der gewöhnlichen Strahlenbegrenzung benutzt, und daß die Verkleinerung des Bildes aufgehoben wird. Das wahre Gesichtsfeld des Hilfsfernrohres muß größer sein, als das des zu untersuchenden Fernrohres.

g) Nach S. Czapski kann man das wahre wie das scheinbare Gesichtsfeld eines Fernrohres messen, indem man den Winkel, unter dem sich die Hauptstrahlen in der E.-P. oder A.-P. kreuzen, direkt mit einem mit Teilkreis versehenen Fernrohr mißt. In diesem Fernrohre erblickt man die Gesichtsfeldblende des zu untersuchenden Fernrohres und stellt zuerst auf den einen, dann auf den andern Rand dieser Blende ein. Man muß aber dafür sorgen, daß der Mittelpunkt des Teilkreises in der E.-P. oder A.-P. des zu prüfenden Fernrohres liegt.

Durch die Strahlenbegrenzung ist nach den auf p. 235 ff. abgeleiteten Regeln die Lichtstärke optischer Instrumente bestimmt, soweit sie von geometrischen Faktoren abhängt. Die auf p. 238 erwähnten Verluste machen aber bei fertigen Instrumenten oft eine direkte Bestimmung notwendig. Die Beleuchtungsstärke projizierter Bilder kann nach irgend einem der gewöhnlichen photometrischen Verfahren gemessen werden; die in der Photographie üblichen sogen. Expositionsmesser[1] stellen sich dieselbe Aufgabe. Die Helligkeit von Instrumenten zum subjektiven Gebrauch, nämlich von Fernrohren, ist neuerdings von Krüss[2] nach mehreren Methoden ermittelt worden. Doch gehören diese Untersuchungen, wie erwähnt, dem Gebiete der geometrischen Optik nicht mehr an.

IV. Die empirische Bestimmung des Korrektionszustandes.

Die unmittelbare Betrachtung des Bildes.

Die Testobjekte. Die einfache Betrachtung eines Bildes liefert in sehr vielen Fällen, besonders dem Laien, kein sicheres Urteil über die Güte der Strahlenvereinigung des Systems; bei merklichen Mängeln keine Kenntnis der

[1] Eders Handb. d. Photogr. 2. Aufl. **1.** I. Abt.; Eders Jahrb. f. Photogr. **5.** 415. 1891; **8.** 361. 1894. — [2] H. Krüss, Ztschr. f. Instrumentenk. **23.** 8. 1903.

Ursache. Um wenigstens die Bildgüte beurteilen zu können, ohne allzu zahlreiche Versuche mit verschiedenen Objekten machen zu müssen, hat man für mehrere Klassen von Instrumenten sogen. Probe- oder Testobjekte ausgewählt oder hergestellt. Eine Anzahl von diesen dienen zwar ursprünglich zur Ermittelung des Auflösungsvermögens, aber auch diese sind natürlich meist für die Beurteilung der Bildgüte geeignet, ebenso diejenigen Objekte, die besonders die scharfe Einstellung eines optischen Systems ermöglichen sollen.

Die natürlichen Probeobjekte für das Mikroskop findet man in den Lehrbüchern der Mikroskopie (p. 373, z. B. bei DIPPEL, I. p. 367); von den künstlichen seien die NOBERTsche Platte (zur Bestimmung des Auflösungsvermögens hergestellt; in Glas geritzte Strichsysteme) und die ABBEsche Testplatte (s. w. u.) erwähnt.

Bei den Fernrohren benutzt man scharf begrenzte, entfernte, irdische Objekte (die erste Anwendung eines regelmäßigen Strichsystems zur Bestimmung des Auflösungsvermögens scheint von FOUCAULT[1] herzurühren), bei starken Vergrößerungen wird aber die Unruhe der Luft so störend, daß man auf hochstehende Sterne angewiesen ist und auch durch diese nur bei ruhiger Luft zu einem sicheren Urteil berechtigt wird, so daß trotz der dadurch erforderten großen Räume die Benutzung „künstlicher Sterne" vielfach vorgezogen wird[2].

Bei den Fernrohrobjektiven ist nun die direkte Betrachtung des Bildes eines solchen leuchtenden Punktes besonders ausgebildet worden und gestattet nicht nur die Leistungsfähigkeit des Systems zu beurteilen, sondern auch die Ursachen der Bildverschlechterung zum Teil mit der gleichen Sicherheit anzugeben, wie bei den unten angeführten Untersuchungsmethoden. Sie wird von FOUCAULT[3] als erstes der drei Verfahren angeführt, mit denen er die Gestalt seiner Spiegel untersuchte, und diente ihm hauptsächlich zur Prüfung von deren Achsensymmetrie; er zeigt aber auch, wie man aus dem Aussehen des Beugungsbildes, besonders aber auch aus dessen Veränderungen bei Verschiebungen des Okulars, die beim Heraus- und Hereinziehen zur Mittelstellung symmetrische Effekte ergeben müssen, die Art der Aberration beurteilen kann. Diese Methode wird außer bei fertigen Instrumenten auch während der Herstellung zur beständigen Korrektur einzelner Zonen und zur richtigen Justierung der Linsen benutzt. Die Firma COOKE & SONS[4] hat eine ausführliche Beschreibung der Justierung und Prüfung von Fernrohrobjektiven nach dieser Methode herausgegeben, worin die Erkennung und Unterscheidung der einzelnen bildverschlechternden Ursachen (sphärische, chromatische Aberration, schlechte Justierung, Verspannung u. s. w.) auseinandergesetzt wird.

Das Auge wird in seinen verschiedenen Akkommodationszuständen mit Buchstaben und Ziffern geprüft. Die konventionellen „Probetafeln" sind zusammengestellt in HELMHOLTZs Handb. d. physiol. Optik, p. 124, und bei HESS[5], p. 193, 204—207. Am bekanntesten sind die SNELLENschen Proben, die direkt die konventionelle „Sehschärfe" abzulesen gestatten.

Die empirische Untersuchung der Aberrationen

besteht wie die theoretische zunächst in der Beantwortung der Frage: Werden die von einem Punkte ausgehenden, von verschiedenen Teilen der Öffnung des Systems aufgenommenen Strahlen in einen Punkt vereinigt, oder wie große Ab-

---

[1] Recueil des travaux scientifiques de LEON FOUCAULT. Paris 1878. p. 261; C. R. **47.** 205. — [2] Vgl. H. GRUBB, Nature **34.** 85 ff. L. AMBRONN, Handb. d. astron. Instrumentenk. **1.** 339. Berlin 1899. — [3] L. FOUCAULT, vgl. p. 434. — [4] T. COOKE & SONS, Die Justierung und Prüfung von Fernrohrobjektiven; übers. von R. STRAUBEL, Ztschr. f. Instrumentenk. **14.** 113. 1894. — [5] Vgl. p. 261.

weichungen von punktmäßiger Vereinigung finden statt? Ist diese Frage experimentell gelöst, so werden die nachgeordneten Fragen nach der Ebenheit des Bildes ebener Objekte und nach der richtigen Zeichnung durch Untersuchung einer genügenden Anzahl von Punkten gelöst werden können. Für die Prüfung der Orthoskopie werden wir in Spezialfällen unten noch besondere Methoden kennen lernen. Wenn wir diese und die besonderen Prüfungsverfahren auf Konstanz des Sinusverhältnisses zunächst beiseite lassen, so bestehen also unsere Prüfungsmethoden für die monochromatischen Aberrationen in der Ermittelung des Ortes der Einzelbilder, die von den Teilen der Öffnung des Systems herrühren. Diese Einteilung der Öffnung wird in den meisten Fällen auch wirklich ausgeführt, indem vor die Öffnung mehrfach durchlöcherte Blenden gesetzt werden, die nur bestimmte Teile davon wirksam werden lassen. Die Ermittelung der chromatischen Aberrationen beruht auf demselben Prinzip; nur daß es sich dabei um die von den verschiedenen Farben herrührenden Partialbilder handelt, deren Lage ermittelt und verglichen wird.

Jedes der auf p. 450—453 besprochenen Verfahren der Ortsermittelung oder Einstellung liefert, auf jene Teilbilder angewandt, eine Methode zur Untersuchung des Korrektionszustandes. Die Genauigkeit dieser Einstellungsmethoden ist dort zum Teil bereits diskutiert worden; wir können im folgenden statt einer systematischen Untersuchung nur eine kurze Aufzählung der häufiger gebrauchten Methoden liefern, da von den meisten nur Beschreibungen ihrer Anwendung auf bestimmte Systeme vorliegen, und nur eine, die Hartmannsche, eine gründliche Prüfung und Ausbildung erfahren hat[1].

Man trifft nicht selten die Ansicht an, daß die im früheren genannten Methoden zur Ermittelung der Abbildungskonstanten gleichzeitig zur Bestimmung des Korrektionszustands dienen könnten, indem die Variationen jener Konstanten bei Benutzung endlicher Öffnungen und endlichen Gesichtsfeldes eine Prüfung der Korrektion ergäben. Schon aus dem p. 449 Gesagten geht hervor, daß dies nicht zutrifft. Wir haben gesehen (p. 108), daß auch in dem idealen Falle, wenn es gelingt, ein endliches Objekt mit endlicher Öffnung so abzubilden, wie es die geometrische Theorie des zweiten Kapitels vorschreibt, dennoch die Gesetze der Kollineation nur in dem paraxialen Raume bestehen bleiben, während in dem endlichen, von den abbildenden Strahlen erfüllten Raume diese Beziehungen nicht gelten und im allgemeinen kein zweites Paar von auf einander punktweise abgebildeten Ebenen existiert (vgl. z. B. p. 136, 152, 159). Wie wir andererseits auf p. 449 erwähnt haben, werden zur Bestimmung der Abbildungsfaktoren (einen Fall ausgenommen) mehrere Objekt- und Bildlagen herangezogen. Daher werden die Abbildungsfaktoren im allgemeinen auch bei ideal korrigierten Systemen innerhalb der endlichen Öffnung und des endlichen Gesichtsfeldes veränderlich sein.

Den Ausnahmefall bildete ein für ein unendlich entferntes Objekt (oder Bild) korrigiertes System. Hier werden in der Tat bei der Bestimmung der hinteren (bezw. vorderen) Brennebene und der Brennweite $f = h'/\operatorname{tg} u$ (bezw. $f' = h/\operatorname{tg} u'$) andere Objekt- und Bildlagen nicht gebraucht (vgl. die Anm. 1 auf p. 449). Alle Zonen der Öffnung und Teile des Gesichtsfeldes werden daher bei einem gut korrigierten Systeme dieselben Konstanten F' und f (bezw. F und f') liefern müssen, und deren Abweichungen werden das Maß für die Güte der Korrektion abgeben. Aber in diesem Falle ist eben auch die Bestimmung dieser beiden Konstanten für verschiedene Zonen und Gesichtsfeldwinkel nichts anderes als was wir oben allgemein als Einstellung auf das Bild verschiedener

---

[1] Auch war es unmöglich, die jüngsten Fortschritte dieser Methode ausführlich zu besprechen, da die eingehende Darstellung durch den Erfinder selbst während des Druckes dieses Buches erschien und nur in den Korrekturen benutzt werden konnte.

Zonen und als Prüfung auf Verzeichnung hingestellt haben, so daß der Fall keine besondere Behandlung erfordert. Sobald man aber auch in diesem Falle andere Objekt- und Bildlagen heranzieht, verschwindet die Konstanz der Abbildungsfaktoren.

Man sollte deshalb die beiden Gebiete der kollinearen Abbildung und der für eine bestimmte Objektlage erweiterten Abbildung auch in der Terminologie, sowie es in diesem Buche geschehen ist, getrennt halten, mag auch die Gefahr der Verwirrung bei den erfahrenen Fachleuten selber gering sein. Man bezeichnet mit den Worten Brennweite, Brennebene, Hauptebene, Knotenpunkt u. s. w. Konstanten der kollinearen Beziehung. Man gebrauche sie also nur dort, wo diese Beziehung auftritt, nämlich im paraxialen Raume und in den ebenen Elementarstreifen um irgend einen Hauptstrahl herum (p. 96 ff.), wie dies z. B. auf p. 131 geschehen ist. „Zonen", durch irgend einen Blendenausschnitt oder einen kreisförmigen Ring auf einer Fläche definiert, erzeugen im allgemeinen keine Kollineation[1], besitzen danach keine Brennweite, Brennebene u. s. w., man hat vielmehr zu fragen, ob sie den Bedingungen der Aufhebung der Aberrationen, also der sphärischen Korrektion, der Sinusbedingung u. s. w. genügen. Denn die irgendwie definierte Hauptebene u. s. w. einer Zone besitzt im allgemeinen nicht diejenigen Eigenschaften, wie die Hauptebene in einer Kollineation.

Wir können nach dem oben Gesagten die Prüfungsmethoden nach den Einstellungsverfahren einteilen, deren sie sich zur Festlegung der Einzelbilder bedienen.

I. Die Anwendung der Einstellungsverfahren, bei denen das Bild selbst betrachtet wird.

Hierfür können mit Vorteil Testobjekte verwandt werden. Die Einstellungsgenauigkeit ist auf p. 450—452 diskutiert worden.

1. Abbes[2] Verfahren zur Prüfung von Mikroskopobjektiven mit der Testplatte.

„Als Objekt dient dabei ein Präparat, welches nichts anderes als scharfe Grenzen zwischen vollkommen durchsichtigen und ganz oder fast ganz undurchsichtigen Teilen innerhalb einer einzigen Ebene darbietet und keinerlei merkliche Ablenkungen an den hindurchtretenden Strahlen hervorbringt. Man erhält ein solches in einer für alle Zwecke ausreichenden Vollkommenheit, indem man (mittels der Teilmaschine) gröbere und feinere Liniengruppen in eine Silber- oder Goldschicht einritzt, wie man solche in einer Dicke, die nur einen kleinen Bruchteil des Mikromillimeters ausmacht, nach bekannten Methoden auf Glas niederschlagen kann; Deckgläser von verschiedener, genau gemessener Stärke, auf ihren unteren Flächen mit solchen Teilungen (10—50 Linien pro Millimeter) versehen, werden neben einander mit Balsam auf einen Objektträger gekittet. Ein Präparat dieser Art dient für die stärksten wie für die schwächsten Objektive. Zu seinem Gebrauch gehört der Beleuchtungsapparat[3] . . . . oder irgend eine Vorrichtung, die gestattet, das Präparat von mehreren lichtstrahlenden Flächen aus gleichzeitig zu beleuchten und den Verlauf der Strahlenbüschel, welche diese liefern, innerhalb des Öffnungswinkels eines zu prüfenden Objektivs beliebig zu regulieren. Mit dem erwähnten Beleuchtungsapparat wird dieser Zweck auf das einfachste erreicht, indem man Diaphragmen mit mehreren getrennten Öffnungen — aus Kartonpapier zugeschnitten — neben den gewöhnlichen Blendungen verwendet; unter Kontrolle des Öffnungsbildes in der oberen Fokalebene des Objektivs kann man durch Blendungen mit passenden Ausschnitten bei Benutzung der Vorrichtungen zur Veränderung des Lichteinfalls ganz beliebige Teile des Öffnungswinkels gleichzeitig in Tätigkeit setzen.

Das Verfahren der Prüfung zielt darauf ab, das Zusammenwirken der sämtlichen Zonen der Objektivöffnung in der Mitte und am Rande des Sehfeldes zur Anschauung zu bringen und dabei dennoch die Bilder, welche sie einzeln gewähren, deutlich unterscheidbar zu erhalten. Zu dem Zweck wird die Beleuchtung so reguliert, daß in den Spuren der eintretenden Strahlenkegel in der oberen Fokalebene alle Zonen der freien Öffnung, jede aber nur durch einen schmalen

[1] Auf die hiermit zusammenhängende Frage, in welchen Fällen eine Reduktion der Zonenfehler auf andere Objektabstände, wie sie von Lehmann und Hartmann in einem Falle ausgeführt wird, möglich und richtig ist, soll hier nicht eingegangen werden. — [2] E. Abbe, Arch. f. mikr. Anat. **9.** 434. 1873. oder Ges. Abh. **1.** 66. Jena 1904. L. Dippel, Das Mikroskop **1.** 340. Braunschweig 1882. — [3] Vgl. p. 381.

Streifen, repräsentiert sind, während diese Spuren selbst möglichst weit von einander abstehen. Je nach der Größe des Öffnungswinkels werden zwei oder drei isolierte Strahlenbüschel verwandt. Sie werden so angeordnet, daß, wenn z. B. die Öffnungsfläche des Objektivs 6 mm linearen Durchmesser besitzt, im ersteren Falle die — nahezu kreisförmige — Spur des einen von der Mitte bis auf ca. 1,5 mm Abstand, die des andern auf der entgegengesetzten Seite von der Achse von 1,5 bis auf 3 mm, d. h. bis zum Rande, sich erstreckt; im zweiten Falle aber der erste die Zone von der Achse aus bis zu 1 mm Abstand, der zweite die Zone zwischen 1 und 2 mm auf der entgegengesetzten Seite und der dritte die Randzone zwischen 2 und 3 mm, wieder auf der Seite des ersten, in Tätigkeit setzt. Diese Anordnung gibt den empfindlichen Strahlengang, bei welchem alle Korrektionsmängel am stärksten zur Geltung kommen, weil die verschiedenen Strahlenkegel im Bilde unter möglichst großen Winkeln zusammentreffen. — Soviel isolierte Teile der Öffnungsfläche wirksam werden, soviel unterscheidbare Bilder erhält man von einer das Gesichtsfeld ausfüllenden Liniengruppe des Präparats. Bei einem in allen Stücken absolut vollkommenen Objektiv müßten alle diese bei einer bestimmten Einstellung in ein einziges scharfes und farbenfreies Bild zusammenfließen. Die Abbildungsfehler, soweit sie von der Art der sphärischen Aberration sind, haben aber zur Folge, daß eine derartige vollständige Verschmelzung der zwei oder drei partiellen Bilder wenigstens nicht durch das ganze Sehfeld zustande kommt und, soweit sie von der Farbenzerstreuung herrühren, daß die hellen Linien auf dunklem Grunde, sowohl die getrennten Bilder je einer wie auch die korrespondierenden Bilder von mehreren an anderen Stellen des Gesichtsfeldes die verschiedensten Farbensäume erhalten. Ein derartiges Probebild legt den ganzen Korrektionszustand eines Mikroskops in allen Einzelheiten gleichzeitig vor Augen. Mittels der Anleitung, welche die Theorie zur Diagnose der verschiedenen Abbildungsfehler gibt, genügt die Vergleichung der Farbensäume der einzelnen partiellen Bilder, die Beobachtung ihres lateralen Auseinandertretens und ihrer Niveaudifferenzen, in der Mitte des Sehfeldes und in den vier Quadranten der Randzone, alle Korrektionsmängel in ihren letzten Bestandteilen nach Art und Größe genau zu definieren. Dabei erhält man namentlich dasjenige, was von den eigentlichen Aberrationen — den Fehlern der Fokalwirkung — herrührt, deutlich getrennt von solchen Unvollkommenheiten, welche aus bloßen Differenzen der Vergrößerung zwischen ungleich geneigten und ungleich brechbaren Strahlen — den Anomalien — entspringen und kann außerdem durch eine einfache Manipulation den Einfluß des Okulars auf die Beschaffenheit des Bildes außerhalb der Achse vollständig eliminieren[1].

Die erforderliche theoretische Orientierung und praktische Erfahrung vorausgesetzt, um den Befund bei einer derartigen Prüfung in allen Punkten richtig würdigen zu können, gewährt das angedeutete Verfahren ein so erschöpfendes Urteil über die Beschaffenheit eines Objektivs, daß daraufhin, wenn Brennweite und Öffnungswinkel nebenbei ermittelt werden, seine Leistungsfähigkeit nach allen Richtungen hin voraus zu bestimmen ist, wie ich mich durch zahlreiche Proben überzeugt habe. Für die gewöhnlichen Bedürfnisse der Mikroskopiker wird zwar die direktere Prüfung mittels natürlicher Probeobjekte stets den Vorzug behalten; immerhin dürfte die gelegentliche Anwendung dieser anderen Methode nützliche Anhaltspunkte liefern, um die Ansprüche, welche man zurzeit an die Beschaffenheit der Mikroskope stellen und nicht stellen darf, richtig bemessen zu lernen. Wer einmal gute und im praktischen Gebrauch bewährte Objektive auf diese Weise untersucht hat, wird ebensosehr gegen allzu naive Vorstellungen über ihre Vollkommenheit wie auch dagegen gesichert sein, Ansprüche zu erheben, welchen bis jetzt noch niemand genügt hat." (E. ABBE, l. c.)

2. H. SCHRÖDER[2] verwendete für photographische Objektive eine Blende mit vier schmalen länglichen Löchern, die paarweise auf zwei auf einander senkrechten Durchmessern in sagittaler Richtung angebracht waren, und zwar ein Paar nahe dem Rande, das andere näher der Mitte. Er bedient sich also für jedes Einzelbild, sowohl für das Bild des Randes, als das der mittleren Zone, des auf p. 452 erwähnten Einstellungsverfahrens, indem er von der Randzone ebenso wie von der mittleren je zwei Ausschnitte übrig läßt und für beide Zonen nach einander statt auf Schärfe auf das Zusammenfallen von Doppelbildern einstellt. Er benutzt das punktartige Bild einer Flamme in einer polierten Stahlkugel als Objekt und ermittelt die sphärische Aberration auf der Achse, sowie die Aberrationen seitlicher Objektpunkte.

---

[1] „Beispielsweise sei erwähnt, daß diese Methode, in Übereinstimmung mit der Theorie, in der Farbenabweichung, welche bei großem Öffnungswinkel an jeder Stelle des Sehfeldes außerhalb der Achse wirksam wird, nicht weniger als fünf verschiedenartige Bestandteile erkennen läßt, die wegen ihrer sehr ungleichen praktischen Bedeutung bei der Beurteilung eines Mikroskops genau unterschieden werden müssen." — [2] H. SCHRÖDER, Die Elemente der photographischen Optik. Berlin 1891. p. 171.

3. Nach STREHL[1] kann man eine Zone der sphärischen Abberation auch an dem Astigmatismus erkennen, den ein kreisförmiges, herausgeblendetes Stück des Objektivs aufweisen wird, wenn der Mittelpunkt der Kreisblende auf der Zone liegt. Wie STREHL auf beugungstheoretischem Wege nachweist, steht die Empfindlichkeit der Methode im richtigen Verhältnis zur Schädlichkeit des Zonenfehlers.

4. Für die Bestimmung der chromatischen Längsaberrationen von Fernrohren hat SCHUSTER[2] das auf p. 105 erwähnte Einstellungsverfahren benutzt. Das Objekt bilden hier farbige Bilder eines Spaltes, Spektrallinien. Sein Verfahren ist mehrmals mit Erfolg benutzt worden.

5. H. C. VOGEL[3] benutzte bei seiner einfachen, dem gleichen Zweck dienenden Methode Sterne als Objekte, wobei auf ein möglichst kleines Bild eingestellt wird. Er bringt hinter das Okular einen geradsichtigen Prismensatz und zieht das Bild in ein Spektrum aus einander, das an der Stelle derjenigen Farben Einschnürungen zeigt, auf deren Bilder das Okular eingestellt ist. Läßt man durch Verschiebung des Okulars die Einschnürung das Spektrum durchwandern, so ergiebt diese Verschiebung die chromatischen Längendifferenzen für die durch die FRAUNHOFERschen Linien charakterisierten Farben. Bei achromatisierten Objektiven bestätigte VOGEL so auf einfache Weise die auf p. 175 ff. angegebenen Rechnungsergebnisse: Bei der Einstellung auf die Farbe des Kurvenscheitels der Figur 45 erhält man eine Einschnürung, beim Herausziehen des Okulars zwei, die sich nach beiden Seiten verschieben.

II. Die Anwendung der Hartmannschen Einstellungsmethode

besitzt unter den auf p. 453 erwähnten prinzipiellen Vorzügen für die Verwendung zur Prüfung der Korrektion besonders den, eine fast beliebig weit zu treibende Einteilung der Öffnung zu gestatten.

6. Das darauf gegründete HARTMANNsche Verfahren der Objektivprüfung ist in jüngster Zeit vom Erfinder und anderen[4] theoretisch und praktisch ausgebildet und zu den einzigen bisher veröffentlichten Messungen benutzt worden, die die trigonometrischen Rechnungen des Konstrukteurs am fertigen Instrument mit genügender Schärfe nachzuprüfen erlauben.

Verdeckt man die ganze Öffnung mit einer undurchsichtigen Scheibe, in der sich eine Anzahl regelmäßig angeordneter kleiner Löcher befindet, so daß man in beliebigen Azimuten (φ) beliebige Zonen (r) untersuchen kann, und fixiert wieder die Schnitte der von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen in zwei Ebenen in der schon früher angegebenen Weise entweder photographisch oder durch optische Einstellung mittels eines Mikrometerfadens, so erhält man den gesamten Verlauf der von dem Objektpunkt herrührenden Bildstrahlen, also:

a) Wenn der Objektpunkt auf der Achse liegt, die Schnittweiten der Strahlen für jede Zone und jeden Azimut nach der auf p. 452 angegebenen Formel. (Da bei dieser Methode die Schwerlinien enger Lichtröhren (p. 235) für die Strahlen eintreten, so prüft man auch bei künstlichen, niemals punktförmigen Lichtquellen selbst bei großen Öffnungen die sphärische Aberration unbeeinflußt von der Sinusbedingung. Da aber der Strahlenverlauf im Bildraume vollständig bekannt ist, so dürfte man durch genaue Ausmessung der Lichtblende und der Entfernung des Objektpunkts die Erfüllung auch dieser Bedingung aus den Messungsergebnissen vollständig ableiten können. Statt dessen wendet HARTMANN in den von ihm durchgeführten Spezialfalle eines Fernrohrobjektivs die

[1] K. STREHL, Ztschr. f. Instrumentenk. **23.** 6. 1903. — [2] A. SCHUSTER, Phil. Mag. **7.** 95. 1879. — [3] H. C. VOGEL, Monatsber. Berl. Akad. d. Wiss. p. 433. 1880. — [4] J. HARTMANN, Ztschr. f. Instrumentenk. **20.** 51. 1900; **24.** 1. 33. 97. 1904. H. LEHMANN, ibid. **22.** 103. 325. 1902; **23.** 280. 1903. G. EBERHARD, ibid. **23.** 82. 274. 1903. J. WILSING, Publ. d. Astrophys. Observ. zu Potsdam **15.** Nr. 48. 1903.

sehr genaue, unten angegebene Methode an.) Lehmann (l. c.) hat die Hartmannsche Methode als vorzügliches Hilfsmittel für die lokale Verbesserung von Objektiven und Spiegeln benutzt. Seine Angaben über ihre Genauigkeit stimmen mit dem auf p. 453 angeführten theoretischen Werte Hartmanns überein; er hat auch den Einfluß der Verkittung (ebenso wie Eberhard, l. c.), Fassung u. dergl. von Objektiven damit bestimmt.

b) Wenn der Objektpunkt ausserhalb der Achse liegt, so läßt sich der Strahlenverlauf im Bildraume ebenfalls nach einer von Hartmann soeben veröffentlichten Berechnung angeben. Die interessanten Formen der Durchstoßungslinien, die den einzelnen Zonen ($r =$ const.) in verschiedenen Einstellungsebenen angehören und bisher nur der trigonometrischen Rechnung zugänglich waren (vergl. z. B. A. Steinheil, Sitzsber. Münch. Ak. Math.-phys. Kl. 1889. p. 413) sind nun auch experimentell nachgewiesen worden.

Die chromatischen Aberrationen lassen sich nach der Hartmannschen Methode ebenfalls so genau bestimmen, daß man sämtliche chromatischen Variationen der monochromatischen Abbildungsfehler (p. 180) erhält. Man macht entweder die oben beschriebenen extrafokalen Aufnahmen mit einer Anzahl annähernd monochromatischer Lichtquellen. Solche stellt Hartmann durch geeignete, vor eine Hg-Bogenlampe gesetzte Filter her[1]. Man macht dann so viel Aufnahmen, als man Farben untersuchen will — ein auch für andere Einstellungsverfahren brauchbares Hilfsmittel. Oder man benutzt eine Blende mit wenigen, auf einem Durchmesser gelegenen Öffnungen (z. B. vier Öffnungen, die zwei Zonen zu vergleichen erlauben) und läßt die extrafokal und intrafokal aufgefangenen Lichtflecke auf den Spalt eines Spektrographen fallen, der sie in einer zu jenem Durchmesser und dem Spalte senkrechten Richtung in Spektren aus einander zieht; bei subjektiver Beobachtung tritt für den Spektrographen ein Okularprisma ein. Man kann dann die Abstände zweier derselben Zone angehörigen Spektra in jeder Farbe messen; um die einzelnen Farben zu identifizieren, bedient man sich diskontinuierlicher Lichtquellen (eines Sternes mit geeigneten Absorptionsbanden oder des Induktionsfunkens zwischen geeigneten Metallelektroden: oder der mit Metallsalzen imprägnierten Effektkohlen in der Bogenlampe). Der Spektrograph braucht den Spalt in den verschiedenen Farben nicht in gleicher Größe abzubilden; er muß ein genügendes Öffnungsverhältnis besitzen.

Statt so hinter das zu prüfende Objektiv einen Spalt und dann das Kollimatorobjektiv des Spektrographen zu setzen, kann man, ebenfalls nach Hartmann, wenn das zu untersuchende System für unendlich korrigirt ist, dieses selbst als Kollimatorobjektiv eines Spektrographen verwenden[2], was sich bei kurzer Brennweite empfiehlt. Gibt man dann dem Kameraobjektiv des Spektrographen eine lange Brennweite, so werden die chromatischen Abweichungen des Kollimators im Verhältnis der Quadrate der Brennweiten vergrößert.[3] Die Fehler des Kameraobjektivs brauchen dabei desto weniger bekannt zu sein, je länger

[1] J. Hartmann, Ztschr. f. wissensch. Photogr. **1.** 259. 1903; auch l. c. 1904. — [2] Über die Aberrationen bei Vertauschung von Objekt und Bild vgl. die Bemerkung auf p. 331. — [3] Für eine Farbe, für die sich der Spalt im Fokus des Kollimators befindet, ist die Lateralvergrößerung

$$\beta = \frac{f_{\text{kam}}}{f_{\text{koll}}} ,$$

also nach dem allgemeinen Satze von p. 41 die Tiefenvergrößerung

$$\alpha = - \left(\frac{f_{\text{kam}}}{f_{\text{koll}}}\right)^2 .$$

Dies ist also das Verhältnis der Verschiebungen des Spaltes und Spaltbildes in der Nähe des Fokus; die Verschiedenheiten der f für verschiedene Farben können dabei natürlich vernachlässigt werden.

seine Brennweite ist. An die Stelle des Spaltes kommt die punktförmige Lichtquelle, von der extra- und intrafokale Aufnahme gemacht werden. Umgekehrt kann man nach EBERHARD (l. c. 1903) auch das zu prüfende Objektiv zum Kameraobjektiv machen und dem Kollimator eine möglichst lange Brennweite geben. Läßt man hierbei das Kollimatorobjektiv überhaupt weg, so erhält man die einfachste, von HARTMANN für kleinere Objektive empfohlene Anordnung: Man setzt ein Prisma und die zuletzt beschriebene Blende vor das zu untersuchende Objektiv und macht extra- und intrafokale Aufnahme einer entfernten Lichtquelle. Bei den letzten beiden Verfahren werden nur die Strahlen einer Wellenlänge das Objektiv parallel durchsetzen[1].

Die für ein Fernrohrobjektiv ermittelten Werte der sphärischen und chromatischen Aberration stellt HARTMANN in einer Tabelle zusammen, aus der sich auf Grund der Beobachtung leicht die graphische Darstellung von ROHRS gewinnen ließe, die die Figur 46, nach der trigonometrischen Rechnung hergestellt, zeigt.

III. Die Anwendung der Foucaultschen Einstellungsmethode.

7. Endlich ist die FOUCAULTsche Schneidenmethode (p. 453) zur Ermittelung der Aberration geeignet, ja ihre erste Anwendung zielte auf deren Ermittelung ab; und wenn sie vom Erfinder auch zunächst nur erdacht wurde, um die sphärische Oberfläche eines Spiegels zu prüfen, so hat FOUCAULT ihre allgemeinere Bedeutung doch ausdrücklich festgestellt[2]:

„Sehen wir von der Oberfläche ab, um nur das reflektierte Büschel zu betrachten, so lassen sich die Kennzeichen, die die Prüfungsmethoden lieferten, auf das Büschel selbst anwenden, und die Besonderheiten, die als Merkmale einer sphärischen Fläche hingestellt wurden, werden mit vollem Rechte zu den wirklichen Eigenschaften eines streng homozentrischen Büschels."

„Da also in den optischen Instrumenten die Schärfe der Bilder ausdrücklich von dem schließlichen Zusammentreffen der Lichtstrahlen abhängt, so sind diese Instrumente, welcher Art sie auch sein mögen, der Kontrolle derselben Prüfungsmittel unterworfen."

Von seinen drei Untersuchungsmethoden benutzt er die Schneidenmethode zuletzt (die anderen s. auf p. 434—435, 463, 471), um die geringsten Fehler nach der von ihm erfundenen Methode der lokalen Verbesserung zu beseitigen, die noch heute bei den Teleskopen in Übung ist. Eine allgemeinere Anwendung seiner Prüfungsmethoden machte FOUCAULT bereits insofern, als er nicht nur bei zusammenfallendem Objekt und Bild untersuchte, sondern, indem er den leuchtenden Punkt allmählich entfernte, seine Spiegel in immer gestrecktere ellipsoidische und schließlich in die paraboloidische Form überführte. H. SCHRÖDER[3] wandte die Schneidenmethode auch bei der lokalen Verbesserung großer Refraktoren an, bediente sich dabei der Autokollimation und steigerte die Genauigkeit durch mehrfache Reflexionen.

Da man bei der Schneidenmethode die Öffnung selbst betrachtet, so wird deren besondere Einteilung dabei überflüssig. Daß man manchmal statt der Öffnung selbst einen anderen Querschnitt zwischen ihr und dem Bilde betrachtet, ist für das oben Gesagte ohne Bedeutung. Man erhält vielmehr bei irgend welcher Lage des leuchtenden Punktes sofort eine Übersicht über die Teile der Öffnung, die an irgend einer Stelle ein Bild erzeugen, indem bei Verschiebung[4]

[1] Über diesen Umstand s. J. HARTMANN, Ztschr. f. Instrumentenk. **24.** 106. 1904. — [2] L. FOUCAULT, Ann. de l'Obs. imp. de Paris **5.** 1858. p. 242 des Rec. des Trav. scient. de L. FOUCAULT, Paris 1878. — [3] H. SCHRÖDER, Ztschr. f. Instrumentenk. **12.** 153. 1892. Auf eine soeben erschienene Darstellung von G. W. RITCHEY im Astrophys. Journ. **14.** 53. 1904 sei noch hingewiesen. — [4] Die Schneide kann etwa in einer zum abbildenden Hauptstrahl senkrechten Richtung vorgeschoben werden.

der Schneide an dieser Stelle die zum Bilde beitragenden Teile der Öffnungsfläche dunkel werden, während die nicht beitragenden Teile während des Vorschiebens die halbseitige Verdunkelung erfahren, die wir auf p. 453 als Kriterium der Nichteinstellung angegeben haben. Die Öffnung erweckt die Täuschung eines Reliefs, das (wie im Spezialfalle der Form des Spiegels, so im allgemeinen Falle) der Form entspricht, die die Wellenfläche zeigen würde, wenn ihre Abweichungen stark übertrieben und die scheinbare Schattenwirkung auf ihr durch ein Licht hervorgebracht wäre, das sich auf der anderen Seite befindet als von der die Schneide herangeschoben wurde. Auf die Verwandtschaft mit der „Schlierenmethode" ist auf p. 386 hingewiesen worden.

8. Man kann die Schneidenmethode auch gewissermaßen umkehren, indem man das Bild des leuchtenden Punktes nicht durch einen Schirm abblendet, sondern durch eine feine Öffnung auffängt und herausblendet. Man sieht dann in der Öffnung des Systems diejenigen Stellen leuchten, die zu dem aufgefangenen Bilde beitragen, die anderen sind dunkel[1]. Das Verfahren ist (ebenso wie die Schneidenmethode) besonders einfach auch bei kleinen Linsensystemen in der Form anzuwenden, in der es von R. Straubel[2] zuerst empfohlen wurde, wenn man eine linienförmige Lichtquelle (den Faden einer geradfädigen Glühlampe) und einen Spalt verwendet. Die Lampe, das System, der Spalt befinden sich auf den Reitern einer optischen Bank; mit zweien dieser Stücke muß man auch seitliche Verschiebungen und Drehungen um die Achse des Systems ausführen können, wenn man die Abbildung eines beliebigen Punktes durch das System vollständig untersuchen will. — Das Verfahren besitzt vor dem anderen den Vorzug der Symmetrie, es liefert aber aus diesem Grunde nicht den Anschein des Reliefs.

Die Schneidenmethode Foucaults und das zuletzt angeführte Straubelsche Verfahren gestatten auch offenbar eine Messung der Aberrationen, sie verlangen dazu eine meßbare Verschiebung der abblendenden Vorrichtung (Schneide oder Spalt), die in leicht verkennbarer Weise die Längsaberrationen bestimmen läßt.

Man kann übrigens in ähnlicher Weise wie Dvorak (p. 386) Luftschlieren nachweist, einen schnellen Überblick des Korrektionszustandes für einen bestimmten Objektpunkt erhalten, wenn man dort eine sehr kleine Lichtquelle anbringt, und deren Strahlung durch das System hindurch unter Ausschluß alles fremden Lichtes auf einen weißen Schirm auffängt. Hier bildet die Gleichmäßigkeit der Beleuchtung das einfache Prüfungsmittel.

Wir haben endlich außer diesen allgemeinen Prüfungsverfahren noch einige

Methoden zur Untersuchung besonderer Bildfehler für sich.

1. Die Erfüllung der Sinusbedingung kann nach Abbe insbesondere bei weit geöffneten Systemen aus der Verzeichnung bestimmt werden, die man erhält, wenn man den Objektpunkt zum Kreuzungspunkt der Hauptstrahlen, zur E.-P. macht. Die Methode und ihre Ausführung ist auf p. 220 angegeben worden.

2. Hartmann[3] prüft die Konstanz von $h/\sin u'$, die Erfüllung der Sinusbedingung für unendlich entfernte Objekte, indem er mittels des auf p. 443 angegebenen Verfahrens zur Bestimmung der Hauptpunkte die Schnittpunkte achsenparallel einfallender Strahlen mit den das System verlassenden Bildstrahlen aufsucht. Da ihm die Schnittweiten dieser Bildstrahlen durch extrafokale Messungen bekannt sind, so erhält er die Länge dieser Bildstrahlen vom

---

[1] An die Stelle der Dunkelheit treten bei chromatischer Aberration bei der Methode (8) die nicht zum Bilde beitragenden Farben; bei (7) ist das natürlich umgekehrt. — [2] Vgl. R. Straubel, Beleuchtungsprinzipien u. s. w., Beitr. z. Geophys., Ergänzungsbd. I. 1902 (Verhandl. der ersten internationalen seismol. Konferenz). p. 299. — [3] J. Hartmann, Ztschr. f. Instrumentenk. **24**. 43. 1904.

Schnittpunkt mit dem einfallenden Strahl bis zur Achse, das ist die Größe $h / \sin u'$, für jede einzelne Zone.

3. Die Erfüllung der Sinusbedingung für teleskopische Systeme, die Konstanz von h / h', kann mit der auf p. 461 unter d angegebenen Methode untersucht werden.

4. Überträgt man auch die auf p. 435 zuletzt genannte FOUCAULTsche Methode, wie es augenscheinlich der Sinn seiner auf p. 460 zitierten Worte ist, auf dioptrische Systeme, so erlaubt sie zu untersuchen, ob nach Aufhebung der sphärischen Aberration das Netz von allen Teilen des Systems in gleicher Vergrößerung abgebildet wird, dies würde bei genügend kleinem Netze eine Prüfung auf Konstanz der Sinusbedingung bedeuten. Eine derartige Anwendung scheint nicht gemacht worden zu sein.

5. Prüfungen auf Verzeichnungsfreiheit sind schon in älterer Zeit von GRUBB [1] für photographische Systeme ausgeführt worden: Bei Systemen, die für die unendlich ferne Ebene korrigiert sind, muß, wie wir oben begründet haben, die nach dem Verfahren (1) p. 439 bestimmte Brennweite auch für endliche Gesichtsfeldwinkel konstant sein. Ihre Veränderung ergibt die Verzeichnung.

6. In der Sache fast identisch ist die Prüfung auf Verzeichnung, die MOESSARD [2] mittels des Tourniquet ausführte. Die erwähnten, für unendlich entfernte Objekte korrigierten Systeme müssen um den hintern Knotenpunkt auch um endliche Beträge gedreht werden können, ohne daß die Bilder unendlich entfernter Objekte schwanken. (Dieser Punkt braucht, wie oft erwähnt wurde, von den das System durchsetzenden Lichtstrahlen im allgemeinen nicht geschnitten zu werden, beim photographischen Objektiv fällt er zwar mit der A.-P. zusammen, beim Teleobjektiv kann er sehr weit entfernt liegen.)

Die experimentellen Untersuchungen des Korrektionszustandes des Auges sind neuerdings so selbständig ausgebildet worden, daß ihre Besprechung hier nicht möglich ist. (Vgl. die auf p. 436 zitierte HESSsche Darstellung, p. 105.) Vergleichshalber sei nur darauf hingewiesen, daß auch hier die (subjektive) extrafokale Einstellung auf einen leuchtenden Punkt wichtige Ergebnisse geliefert hat.

Besondere mechanische Anordnungen sind vornehmlich zu den häufigsten Prüfungen, denen photographischer Objektive, mehrfach konstruiert worden. Außer denen, die in der Hauptsache zur Bestimmung der Grundfaktoren der Abbildung (s. o.) dienen, seien das Horse (nach SCHRÖDER von ANDREW ROSS herrührend, von SCHRÖDER verbessert [3]) und die neuen Apparate von BECK [4] und HARTMANN [5] erwähnt.

---

[1] s. p. 440. — [2] s. p. 446. — [3] H. SCHRÖDER, Die Elemente d. photogr. Optik. Berlin 1891. p. 167. — [4] Vgl. p. 437. — [5] Vgl. p. 437; auch beschrieben Ztschr. f. Instrumentenk. **24**. 109. 1904.

Sachregister.

B

C

D

E

F

G

H

I

K

L

M

U

V

W

Z

Berichtigungen.

S. 51, Formel 16: statt $\beta\beta_0$ ist zu setzen: $\frac{1}{\beta\beta_0}$.

S. 51, Formel 17: statt β ist zu setzen: $\frac{1}{\beta}$.

S. 85, Zeile 7 v. u.: statt $f' = f$ ist zu setzen: $f' = -f$.

S. 131, Zeile 15 v. o.: „also unabhängig vom Winkel ϑ“ ist zu streichen.

S. 162, Zeile 22 v. o.: „Es ist zu bemerken . . . . wie die von HELMHOLTZ“ ist zu streichen. (Die HELMHOLTZsche Ableitung ist älter.)

S. 326, Zeile 6 v. o.: vor

$$f_1 > \mathfrak{p} + d > \mathfrak{r} + d$$

ist einzuschieben:

$$-f_1 > -\mathfrak{r} - d > -\mathfrak{p} - d \text{ bezw.}$$

